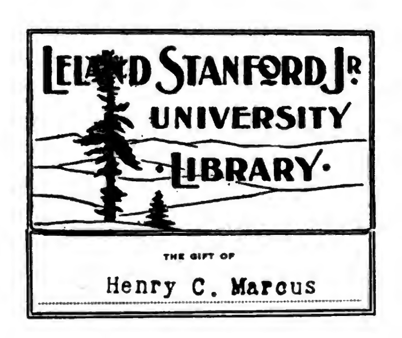
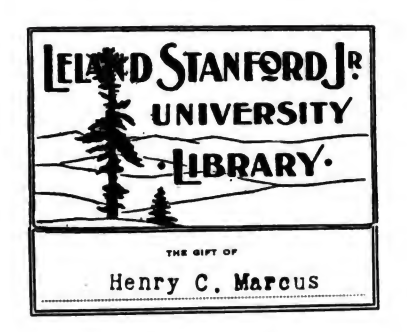
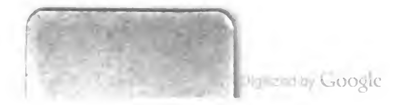

LELAND STANFORD JR.
UNIVERSITY
·LIBRARY·
THE GIFT OF
Henry C. Marcus

Louis J. Frank

stud. rer. mat.

Freiberg 1877.


LELAND STANFORD JR.
UNIVERSITY
·LIBRARY·
THE GIFT OF
Henry C. Marcus



Louis J. Frank

stud. rer. met.

Freiberg 1877.

ELEMENTE

DER

THEORETISCHEN

KRYSTALLOGRAPHIE

VON

DR. CARL FRIEDRICH NAUMANN,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

MIT 86 HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.
1856.

Vorrede.

Seitdem *Weiss* die Beziehung aller Flächen einer und derselben Krystallform auf ein bestimmtes Axensystem geltend gemacht, und das Parameter-Verhältniss einer jeden Krystallfläche als ihr krystallographisches Zeichen eingeführt hatte, seitdem war eigentlich für die Krystallographie die Methode der analytischen Geometrie als diejenige Methode bezeichnet worden, deren sie sich vorzugsweise bedienen sollte, um zu einer möglichst einfachen Lösung ihrer meisten Probleme zu gelangen. Desungeachtet hat diese Methode nur wenig Eingang gefunden; ja, selbst der berühmte Begründer jener Bezeichnung verfolgte den von ihm angebahnten Weg nicht viel weiter, als bis zur Bezeichnung der Krystallflächen, indem er es vorzog, alle weiteren Probleme ohne Beihilfe der analytischen Geometrie zu lösen; *Kupffer's* reichhaltiges Handbuch der rechnenden Krystallonomie scheint fast unbeachtet geblieben zu sein; die Verfasser fast aller neueren Lehrbücher der Krystallographie sind dem Meister der Berliner Schule gefolgt, und nicht selten finden wir es hervorgehoben, dass man absichtlich auf eine analytisch-geometrische Behandlung verzichte, weil solche an die mathematische Vorbildung der meisten Schüler zu grosse Ansprüche mache.

Wenn nun auch diess Letztere zugestanden werden kann, wie ich denn selbst eine praktische und eine theoretische Krystallographie unterscheide, von welchen die erstere nur die Resultate der letzteren zu benutzen hat, ohne sich um die Rechnungen derselben zu kümmern; so bin ich doch anderseits

überzeugt, dass die, schon jetzt nicht geringe, hoffentlich aber immer grösser werdende Anzahl Derjenigen, welchen es um ein tieferes Verständniss der Krystallformen zu thun ist, mit Bereitwilligkeit die analytisch-geometrische Methode annehmen und befolgen werde, sobald man zeigt, welches geringe Maass von mathematischen Kenntnissen doch eigentlich dazu erfordert wird, und in welcher Allgemeinheit und Kürze, mit welcher Sicherheit und Eleganz die meisten Probleme der theoretischen Krystallographie nach jener Methode gelöst werden können. Sie wurde daher schon in meinem Lehrbuche der Krystallographie zu Grunde gelegt. Da aber dieses Werk für die Meisten zu umfänglich sein dürfte, während in ihm doch noch manche sehr wichtige Lehren übergangen wurden, so bin ich bemüht gewesen, in gegenwärtigen Elementen der theoretischen Krystallographie die wichtigsten Lehren dieser Wissenschaft in einer solchen Weise zusammenzustellen, bei welcher jedes weitläufige Eingehen auf die einzelnen Formen vermieden wird, und nur die allgemeinen Verhältnisse derselben zur Sprache kommen. Um aber Denjenigen, welche unbekannt mit den Lehren der analytischen Geometrie oder mit der, unserer Aufgabe entsprechenden Darstellungsweise derselben sind, die erforderliche Grundlage zu bieten, dazu schien es mir zweckmässig, einen kurzen Abriss der analytischen Geometrie der geraden Linie und Ebene vorausgehen zu lassen. Man wird aus ihm ersehen, wie einfach der mathematische Apparat ist, vor dessen Anwendung man sich oft scheut, obgleich man mit seiner Hilfe durch die schwierigsten Probleme der Krystallographie mit einer, auf anderem Wege kaum zu erlangenden Leichtigkeit hindurchgeführt wird. Möge denn die vorliegende Schrift dazu beitragen, die gegen eine analytisch-geometrische Behandlung der Krystallographie noch obwaltenden Vorurtheile zu beseitigen, und dieser Behandlung recht viele Freunde zuzuführen. Uebrigens setze ich eine allgemeine Bekanntschaft mit den Krystallformen voraus, wie solche etwa aus meinen Anfangsgründen der Krystallographie zu erlangen ist, an welche sich die gegenwärtigen Elemente unmittelbar anschliessen; beide Bücher sollen sich gegenseitig ergänzen, und den Schüler durch zwei verschiedene Abschnitte seiner Studien geleiten.

Indem ich nun dem Publico wahrscheinlich meine letzte grössere krystallographische Arbeit vorlege, glaube ich über die von mir gebrauchte Nomenclatur, Ableitung und Bezeichnung noch folgende Erklärung abgeben zu müssen.

Durchdrungen von der Ueberzeugung, dass die Krystallographie nicht nur ein Theil der angewandten Geometrie, sondern auch ein Theil der Morphologie der Natur sein soll, und geleitet von dem Gedanken, dass Lehrbücher überhaupt nicht für die Meister, sondern für die Schüler der Wissenschaft geschrieben werden, und demgemäss einzurichten sind, habe ich es immer für die Hauptaufgabe eines krystallographischen Lehrbuchs gehalten, dem Schüler eine vollständige Uebersicht der Manchfaltigkeit, und eine gründliche Einsicht in den gegenseitigen Zusammenhang der Krystallformen zu verschaffen. Da nun die methodische Benennung der verschiedenen Arten von Formen eines der wichtigsten Hilfsmittel darbietet, um sich in ihrer Manchfaltigkeit zurecht zu finden, so glaubte ich zuvörderst der Nomenclatur der Krystallformen eine grössere Bedeutung zuerkennen zu müssen, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt. Dass demzufolge mancher neue Name in Vorschlag gebracht werden musste, diess ist natürlich, weil zumal in den einaxigen Systemen die namentliche Unterscheidung der Formen noch sehr vernachlässigt worden war. Dabei bin ich jedoch bemüht gewesen, die Nomenclatur stets der Bezeichnung, mit welcher sie Hand in Hand gehen muss, möglichst anzupassen, und sie so zu bilden, dass sie in jeder Sprache Eingang finden kann. Wer sich einmal an sie gewöhnt hat, der wird die Ueberzeugung gewinnen, wie sehr sie die gegenseitige Verständigung erleichtert, und welchen Nutzen sie für die Orientirung im Gebiete eines jeden Krystallsystems gewährt.

Die Einsicht in den inneren Zusammenhang der Formen eines und desselben Krystallsystems, oder die Erkenntniss der Einheit in der Manchfaltigkeit, wird uns besonders durch die Ableitung und die Bezeichnung der Formen gewährleistet; daher habe ich denn auch diesen beiden, sich gegenseitig bedingenden Aufgaben meine besondere Aufmerksamkeit zugewendet. Obgleich nun nicht zu läugnen ist, dass durch die von *Whewell* und *Miller* in Vorschlag gebrachte Ableitung und Bezeichnung für die Berechnung einige Abkürzung und Erleichterung gewonnen wird, so glaubte ich doch, meiner bisherigen Methode treu bleiben zu müssen, weil es mir auch für die Bezeichnung eine unerlässliche Aufgabe zu sein scheint, dass sie möglichst repräsentativ sei, d. h. dass uns jedes Zeichen die Vorstellung seines Gegenstandes möglichst erleichtere. Es bilden aber die Formen den eigentlichen Gegenstand der Krystallographie; diese Formen gruppiren

sich nach gewissen durchgreifenden Gestaltungsgesetzen in verschiedene Systeme, und innerhalb dieser Systeme stellen sich wiederum verschiedene, durch die Ableitbarkeit aus einer gemeinschaftlichen Grundform zusammengehaltene Formencomplexe heraus. Soll also die Bezeichnung wirklich repräsentativ sein, so müssen die Zeichen und die sie begründenden Ableitungs-Constructionen so gewählt werden, dass sie unserer Einbildungskraft die Vorstellung jeder Form so leicht als möglich machen, dass sie uns an das Krystallsystem erinnern, welchem die Form angehört, und dass sie die Vorstellung der Grundform des betreffenden Formencomplexes durchblicken lassen. Um nun allen diesen Anforderungen zu entsprechen, dazu musste ich mir folgende Grundsätze zur Richtschnur dienen lassen:

1. Alle correlaten Flächen in simultaner Existenz zu einer und derselben Form vereinigt zu denken, mithin den Begriff der Form immer in den Vordergrund zu stellen, die Flächen aber nur als Begränzungs-Elemente der Formen, und nicht als selbständige Objecte zu betrachten;
2. Die Ableitung aller, zu einem und demselben Formencomplexe gehörigen Formen, so weit als nur möglich, auf eine Umschreibung derselben um die Grundform zu gründen, und also in der Regel die kleinste Ableitungszahl $= 1$ zu setzen, weil diese Ableitungs-Construction weit leichter vorzustellen ist, als eine auf Einschreibung gegründete Construction;
3. Die Verschiedenheit der Krystallsysteme entweder durch verschiedene Grund-Elemente, oder auch durch charakteristische und häufig wiederkehrende Hilfs-Elemente der Bezeichnung auszudrücken, und
4. In jedes Zeichen desselben Formencomplexes ein gemeinschaftliches Grund-Element aufzunehmen, welches uns an die Grundform dieses Complexes erinnern soll.

Diesen Grundsätzen gemäss musste sich denn auch die Bezeichnung so gestalten, wie sie in vorliegendem Buche und in meinen früheren Schriften geboten worden ist. Ein jedes Zeichen soll uns unmittelbar auf die Form, auf den Inbegriff aller ihrer Flächen, nicht blos auf diese oder jene einzelne Fläche verweisen; dasselbe soll uns aber auch einigermaassen das Krystallsystem erkennen lassen, zu welchem die Form gehört, und soll uns die Beziehungen dieser Form zu der Grundform, also die Vor-

stellung der Grundform, die Ableitungs-Construction und die, solche Construction bestimmenden Ableitungszahlen vergegenwärtigen. Daher besteht denn jedes Zeichen aus dem Symbol der Grundform, als einem in allen Zeichen wiederkehrenden Grund-Elemente, und aus verschiedenen Hilfs-Elementen, deren Stellung, Grösse und Beschaffenheit unsrer Einbildungskraft die Modalität und das Resultat der Ableitungs-Construction vorführen soll.

Dass uns übrigens dieselbe Bezeichnung auch die Zeichen der einzelnen Flächen gewährt, ja, dass sich für jede beliebige Fläche einer Form das ihr zukommende Parameter-Verhältniss aus dem Zeichen der Form selbst unmittelbar ablesen lässt, diess ist so einleuchtend, dass es gar keines Beweises bedarf, und dass sich auch Diejenigen mit unsrer Symbolik befreunden können, welche das Hauptgewicht auf die Bezeichnung der Flächen zu legen gewohnt sind. Aber gerade deshalb, weil man es bald mit dieser, bald mit jener Fläche zu thun hat, weil sich also die Vorzeichen und die Lage der Parameter von einer Fläche zur andern verändern, gerade deshalb scheint es zweckmässig, die Zeichen so einzurichten, dass sie den vollständigen Inbegriff aller correlaten Flächen, d. h. dass sie die Form selbst, und nicht blos zunächst eine einzelne Fläche derselben ausdrücken.

Dass endlich die so gebildeten Zeichen calculativ und hinreichend kurz ausfallen, also auch diesen Anforderungen entsprechen, davon wird man sich bei ihrem Anblicke und Gebrauche überzeugen. Dagegen will es mir nicht zweckmässig erscheinen, sie, mit Aufopferung ihres repräsentativen Charakters, noch kürzer zu fassen, jede Hinweisung auf das Krystallsystem und die Grundform aufzugeben, und eine völlige Uniformität der Bezeichnung in allen Krystallsystemen einzuführen. Will man z. B. das Symbol der Grundform gänzlich fallen lassen, so wird man damit nur wenig gewinnen, wohl aber die Zeichen ihrer Stütze und ihres charakteristischen Elementes, somit ihrer Consistenz und Deutlichkeit im schriftlichen wie im sprachlichen Ausdrucke berauben, was namentlich bei allgemeineren krystallographischen Untersuchungen so fühlbar hervortritt, dass man bei ihnen auf eine solche Vereinfachung der Zeichen gern verzichten wird. Daher sind auch im rhombischen und triklinoëdrischen Systeme die Symbole der Makrodiagonale und Brachydiagonale, sowie im monoklinoëdrischen Systeme die Symbole der Orthodiagonale und Klinodiagonale unmittelbar mit dem Symbol der Grundform verbunden worden, an welchem sie einen festen Stütz-

punct finden und deutlich in die Augen fallen, während sie, über der betreffenden Ableitungszahl angebracht, bei allgemeinen Zeichen-Darstellungen nur eine sehr unsichere und unscheinbare Stellung einnehmen. Die beständige Wiederkehr eines und desselben Elementes, nämlich des Symbols der Grundform, in allen Zeichen kann eben so wenig einen Grund zu seiner Unterdrückung abgeben, als sie z. B. die Chemiker bestimmen würde, in den Formeln der so zahlreichen Silicate das immer wiederkehrende Symbol Si zu unterdrücken, um dadurch auf Unkosten der Deutlichkeit eine Abkürzung der Formeln zu gewinnen. Wohl aber bin ich vollkommen einverstanden damit, die von *Dana* vorgeschlagene Abkürzung der Zeichen zur Signatur der Flächen in den Krystallbildern zu benutzen, zu welchem Behufe sich sogar noch weitere Abkürzungen darbieten würden.

Leipzig, den 13. Januar 1856.

Carl Friedrich Naumann.

INHALT.

Erster Theil.

Analytisch-geometrische Propädeutik.

Seite

Zweiter Theil.

Theoretische Krystallographie.

Erster Abschnitt.

Tesserales System.

Erstes Capitel.

Holoëdrische Formen des Tesseralsystems.

Zweites Capitel.

Hemiëdrische und tetartoëdrische Formen des Tesseralsystems.

Drittes Capitel.

Combinationen der tesseralen Formen.

Viertes Capitel.

Zonenlehre des Tesseralsystems.

Fünftes Capitel.

Transformation der Axen, und Zwillingskrystalle.

Seite

Zweiter Abschnitt.
Tetragonales System.
Erstes Capitel.
Holoëdrische Formen des Tetragonalsystems

Zweites Capitel.
Hemiëdrische Formen des Tetragonalsystems.

Drittes Capitel.
Tetartoëdrische Formen des Tetragonalsystems.

Viertes Capitel.
Combinationen der tetragonalen Formen.

Fünftes Capitel.
Zonenlehre des Tetragonalsystems.

Sechstes Capitel.
Zwillingskrystalle des Tetragonalsystems.

Dritter Abschnitt.
Hexagonales System.
Erstes Capitel.
Axensystem und vorbereitende Rechnungen.

Seite

Zweites Capitel.

Holoëdrische Formen des Hexagonalsystems.

Drittes Capitel.

Hemiëdrische Formen des Hexagonalsystems.

Viertes Capitel.

Tetartoëdrische Formen des Hexagonalsystems

Fünftes Capitel.

Combinationen des Hexagonalsystems.

Sechstes Capitel.

Zonenlehre des Hexagonalsystems.

A. Wichtigste Zonen in den holoëdrischen Combinationen.

Seite

B. Wichtigste Zonen in den rhomboëdrischen Combinationen.

Siebentes Capitel.

Transformation der Axen, und Zwillingskrystalle des Hexagonalsystems.

Vierter Abschnitt.

Rhombisches System.

Erstes Capitel.

Holoëdrische Formen des rhombischen Systems.

Zweites Capitel.

Hemiëdrische und sonstige meroëdrische Ausbildung des rhombischen Systems.

Drittes Capitel.

Combinationen des rhombischen Systems.

Seite

Viertes Capitel.
Zonenlehre des rhombischen Systems.

Fünftes Capitel.
Vertauschung der Grundform und der Hauptaxe.

Sechstes Capitel.
Zwillingskrystalle des rhombischen Systems.

Fünfter Abschnitt.
Monoklinoëdrisches System.

Erstes Capitel.
Formen des monoklinoëdrischen Systems.

Zweites Capitel.
Combinationen und Zonen des monoklinoëdrischen Systems.

Seite

Drittes Capitel.
Transformation der Axen.

Viertes Capitel.
Zwillingskrystalle des monoklinoëdrischen Systems.

Sechster Abschnitt.
Diklinoëdrisches System.

Siebenter Abschnitt.
Triklinoëdrisches System.

Erstes Capitel.
Formen des triklinoëdrischen Systems.

Zweites Capitel
Combinationen und Zonenlehre.

Drittes Capitel.
Transformation der Axen, und Zwillingskrystalle des triklinoëdrischen Systems.

Erster Theil.

Analytisch - geometrische Propädeutik.

§. 1. Einleitung.

Die analytische Geometrie ist diejenige mathematische Doctrin, welche Raumgrössen durch Gleichungen ausdrücken und alle Eigenschaften derselben durch Rechnung finden lehrt. Diese Raumgrössen sind aber wesentlich zweierlei, nämlich Linien und Flächen. Die Körper werden in denen sie begränzenden Flächen erfasst, auf welche ihre analytisch-geometrische Betrachtung zunächst gerichtet ist. Der Punct ist zwar an und für sich keine Raumgrösse, bildet aber desungeachtet gleichsam das transscendente Element der Linien und Flächen; denn jede Linie kann als eine stetige Nacheinanderfolge, und jede Fläche als eine stetige Nach- und Nebeneinanderfolge von Puncten vorgestellt werden. Die analytische Geometrie erfasst nun die Linien und Flächen in ihren einzelnen Puncten, und insofern kann man sagen, dass sie es zunächst mit der Bestimmung von Puncten zu thun habe.

Die Bestimmung der Lage gegebener Puncte ist aber jedenfalls relativ, d. h. sie kann nur beziehungsweise auf andere, gegebene oder willkürlich gewählte Puncte, Linien oder Flächen Statt finden, welche als Fundamental-Elemente der ganzen Bestimmung zu Grunde gelegt werden; wie diess ja schon unsere geographischen Ortsbestimmungen, die Positions-Bestimmungen der Gestirne u. a. beweisen. Nach der verschiedenen Art und Lage dieser Fundamental-Elemente giebt es nun verschiedene Methoden der analytischen Geometrie; wie z. B. die Methode der geradlinigen Coordinaten, deren wir uns bedienen werden, und die Methode der polaren Coordinaten. Wie aber auch diese Methoden beschaffen sein mögen, so werden sich bei ihrer Anwendung immer zwei Fälle unterscheiden lassen, je nachdem die zu bestimmenden Puncte und Linien in einer Ebene enthalten, oder nach verschiedenen Richtungen durch den Raum vertheilt sind. Diesen zwei Fällen entspricht die Eintheilung der analytischen Geometrie in analytische Planimetrie und

analytische Stereometrie. Da nun die Betrachtungen der ersteren viel einfacher und leichter verständlich sind, so ist es zweckmässig, mit ihnen den Anfang zu machen.

Erstes Capitel.

Analytische Planimetrie.

A. Probleme, welche von dem besonderen Charakter des Axensystemes unabhängig sind.

§. 2. Allgemeine Bestimmung der Lage von Puncten.

Wenn uns in einer Ebene mehre Puncte P, P', P'' u. s. w. gegeben sind, so ist eine der bequemsten Bestimmungs-Methoden diejenige mittels geradliniger Coordinaten. Diese Methode besteht wesentlich darin, dass man die Lage der gegebenen Puncte auf zwei, in derselben Ebene willkürlich gewählte, und sich in einem Puncte M schneidende gerade Linien XX und YY bezieht, welche die Ebene selbst in vier Winkelfelder oder Quadranten*) theilen, und als Fundamental-Elemente dienen.

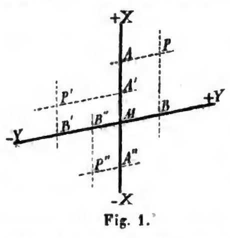


Fig. 1.

Legt man nämlich durch jeden der gegebenen Puncte, z. B. durch P, P', P'' u. s. w. zwei Parallelen PA und PB mit diesen Fundamental-Linien, so wird er als der Durchschnittspunct beider Parallelen fixirt. Diese Parallelen aber bestimmen sich dadurch, dass eine jede derselben, hinreichend verlängert, mit einer der Fundamental-Linien zum Durchschnitte kommt, und von selbiger eine bestimmte Länge MA und MB abschneidet, welche allemal von M aus gerechnet wird. Es ist nun einleuchtend, dass in der That jeder Punct durch die Angabe der Grösse und der Richtung dieser Abschnitte der Fundamental-Linien vollkommen bestimmt sein wird.

Man nennt jede der beiden Fundamental-Linien eine Axe, und beide zusammen das Axensystem, ihren Durchschnittspunct den Anfangspunct oder Mittelpunct des Axensystems, und die durch jeden Punct gelegten Axenparallelen, so weit sie zwischen diesem Puncte und ihrem Durchschnittspuncte mit der anderen Axe begränzt sind, die Coordinaten des Punctes. Alle Coordinaten, welche der einen Axe parallel sind, bezeichnet man mit x, die der anderen Axe parallelen Coordinaten mit y, und unter-

*) Der Kürze wegen werden wir das Wort Quadrant auch dann gebrauchen, wenn sich die Fundamental-Linien oder Axen unter schiefen Winkeln schneiden.

scheidet und benennt hiernach beide Axen als die Axe der x und die Axe der y.

Der Mittelpunct theilt jede Axe in zwei Halbaxen, welche, wegen ihrer entgegengesetzten Richtung von diesem Puncte aus, als positive (+) und negative (—) Halbaxe unterschieden werden; ein Unterschied, der auch auf die betreffenden Axenabschnitte und auf die Coordinaten übergeht, indem selbige das Vorzeichen derjenigen Halbaxen erhalten, auf welche sie sich unmittelbar beziehen.

Das Axensystem selbst ist entweder ein rechtwinkeliges oder ein schiefwinkeliges, je nachdem sich die beiden Axen unter rechten oder schiefen Winkeln schneiden; ein Unterschied, welcher oft einen sehr wesentlichen Einfluss auf die Behandlung und auf das Endresultat der verschiedenen Probleme ausübt. Da es aber gewisse Probleme giebt, welche ganz unabhängig von diesem besondern Charakter des Axensystemes sind, so wollen wir zuvörderst diesen unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

Anm. Bei einem schiefwinkeligen Axensysteme ist es zweckmässig, allemal diejenigen beiden Halbaxen als positive zu betrachten, welche einen der spitzen Neigungswinkel einschliessen.

Indem wir also in vorstehender Figur 1 für den Punct P, dessen Coordinaten x und y die Werthe $MA=a$ und $MB=b$ haben, die beiden Gleichungen

$$x=a \text{ und } y=b,$$

und indem wir eben so für den Punct P', dessen Coordinaten die Werthe $MA'=a'$ und $MB'=-b'$ haben, die beiden Gleichungen

$$x=a' \text{ und } y=-b'$$

hinschreiben, ist jeder dieser Puncte so vollkommen bestimmt, dass er mit keinem anderen Puncte verwechselt werden kann. Denn die Vorzeichen seiner Coordinatwerthe bestimmen für jeden Punct denjenigen Quadranten, innerhalb dessen er liegt, die Grössen dieser Werthe aber bestimmen seinen Ort in solchem Quadranten. Uebrigens ergiebt sich aus dem Wesen der ganzen Bestimmungs-Methode die allgemeine Regel, dass ein Punct in der Ebene zu seiner Bestimmung stets zwei Gleichungen erfordert, welche Lage er auch haben mag.

Anm. Weiter unten in §. 4 werden wir erst die wahre analytisch-geometrische Bedeutung der beiden Gleichungen $x=a$ und $y=b$ kennen lernen, welche allerdings eigentlich etwas anders aufgefasst werden muss, als sie vorläufig hier eingeführt worden ist, wo wir uns unter x und y nur zwei einzelne Linien, nämlich die axoparallelen Abstände des Punctes von den Axen vorstellen.

Liegt der Punct in einer der beiden Axen, so wird natürlich die nach der anderen Axe benannte Coordinate $=0$ sein; demnach sind

$$x=0 \text{ und } y=\pm b$$

die Gleichungen irgend eines Punctes der Axe der y, so wie

$$x=\pm a \text{ und } y=0$$

die Gleichungen irgend eines Punctes der Axe der x; woraus denn folgt, dass der Mittelpunct des Axensystems durch die beiden Gleichungen $x=0$ und $y=0$ bestimmt wird.

§. 3. Gleichung einer geraden Linie.

Wenn uns in einer Ebene irgend eine gerade Linie*) LL von indefiniter oder unbestimmter Länge gegeben ist, so werden wir solche gleichfalls auf ein Axensystem zu beziehen haben, um ihre Lage und ihr Ausdehnungsgesetz zu bestimmen. Wir könnten dieses Axensystem so wählen, dass die gegebene Linie selbst eine der Axen abgäbe; diess würde jedoch zu keiner allgemeinen Lösung der Aufgabe führen, weil damit für die Linie eine ganz besondere Lage vorausgesetzt wäre. Eben so würden die Voraussetzungen, dass die Linie einer der beiden Axen parallel, oder dass sie durch den Mittelpunct des Axensystems laufe, die Allgemeinheit der Aufgabe beschränken, welche nur dann erhalten wird, wenn wir das Axensystem so wählen, dass die zu bestimmende Linie beide Axen, und zwar ausserhalb des Mittelpunctes schneidet. Wohl aber können wir der Allgemeinheit unbeschadet annehmen, dass beide Axen in ihren positiven Hälften geschnitten werden.

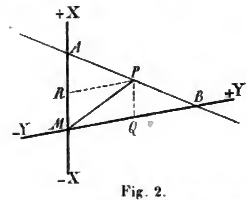


Fig. 2.

In beistehender Figur schneidet also die Linie LL die beiden positiven Halbaxen MX und MY in den Puncten A und B, wodurch sich die beiden Axenabschnitte $MA=a$ und $MB=b$, als ein paar constante, die Lage der Linie unmittelbar bestimmende Elemente ergeben, welche wir nach dem Vorgange von *Lamé* die Parameter der Linie nennen wollen.

Die Linie selbst wird nun aber analytisch-geometrisch durch ihre Gleichung, d. h. durch einen algebraischen Ausdruck darzustellen sein, welcher uns das Ausdehnungsgesetz derselben in ihrer ganzen indefiniten Erstreckung erkennen lässt. Zu einer solchen Gleichung gelangen wir, wenn es uns gelingt, eine allgemein giltige Relation aufzufinden, welche zwischen den unbestimmten Coordinaten x und y irgend eines beliebigen Punctes der Linie und ihren constanten Parametern a und b erfüllt ist. Denn, weil diese Relation für irgend einen beliebigen, so gilt sie offenbar für jeden Punct der Linie, oder für die Linie selbst, welche ja als die stetige Nacheinanderfolge ihrer Puncte betrachtet werden kann.

Wählen wir also in der Linie LL irgend einen Punct P, und ziehen dessen Coordinaten $PQ=x$ und $PR=y$, so ist

$$AM:MB=PQ:QB$$

$$\text{oder}\quad a\ :\ b=x\ :\ b-y$$

folglich wird $bx+ay=ab$, oder

*) Ein für alle Mal mag hier bemerkt werden, dass wir unter Linien stets nur gerade Linien verstehen, so wie auch weiterhin unter Flächen immer nur ebene Flächen gemeint sind. Die Krystallographie hat es lediglich mit Polyëdern zu thun, und sie beruht daher auch nur auf der analytischen Geometrie der geraden Linien und der Ebenen. In dieser sehr beschränkten Bedeutung sind auch unsere Capitel-Titel: analytische Planimetrie und analytische Stereometrie zu verstehen.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

welches die gesuchte Gleichung der Linie ist. Obwohl nun diese Gleichung zunächst für den, zwischen den positiven Halbaxen liegenden Theil der Linie gefunden wurde, so gilt sie doch allgemein für die Linie in ihrer ganzen indefiniten Erstreckung, indem für den jenseits der Axe der x fallenden Theil die y, und für den jenseits der Axe der y fallenden Theil die x negativ einzuführen sind.

Fällt die Linie in einen andern Quadranten, so wird der eine oder der andere Parameter, oder so werden auch beide Parameter negativ sein; wenn man also auf die Vorzeichen der Parameter achtet, so kann man behaupten, dass jede gerade Linie allgemein durch eine Gleichung von der obigen Form darzustellen ist.

Hieraus folgt denn, dass eine Linie in der Ebene jedenfalls durch eine Gleichung vollkommen bestimmt wird; was sich auch umgekehrt so aussprechen lässt, dass eine Gleichung in der Ebene jedenfalls nur eine Linie repräsentirt.

Anm. Man kann die Gleichung $bx+ay=ab$ oder, wie wir sie lieber schreiben, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ auch auf eine andere Weise ableiten, welche wir hier einschalten wollen, weil wir ein ganz ähnliches Verfahren in §. 14, bei der Auffindung der Gleichung einer Ebene, befolgen werden.

Man ziehe in Fig. 2 die PM, so wird durch solche das Dreieck ABM in die beiden Dreiecke PBM und APM zerlegt; wendet man nun auf diese drei Dreiecke das Axiom an, dass das Ganze gleich ist der Summe seiner Theile, so gelangt man unmittelbar auf die gesuchte Gleichung; kraft dieses Axioms ist also

$$PBM+APM=ABM$$

Setzen wir den Neigungswinkel der Axen $=\gamma$, so wird

$$PBM=\tfrac{1}{2}bx\sin\gamma$$
$$APM=\tfrac{1}{2}ay\sin\gamma$$
$$ABM=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma$$

folglich, wie oben, $bx+ay=ab$.

§. 4. Gleichung einer Linie, die einer der Axen parallel ist.

Wenn die Linie einer der Axen parallel ist, so wird ihr in dieser Axe liegender Parameter unendlich gross sein; ist sie also parallel der Axe der x, so wird $a=\infty$, und ihre Gleichung

$$\frac{y}{b}=1 \text{ oder } y=b;$$

ist sie dagegen parallel der Axe der y, so wird $b=\infty$, und ihre Gleichung

$$\frac{x}{a}=1 \text{ oder } x=a.$$

Sobald also in einer Gleichung nur noch eine Coordinate erscheint, so bedeutet sie eine Parallellinie mit derjenigen Axe, welche nach der fehlenden Coordinate benannt ist.

Demnach bedeutet $x=a$ eine Parallellinie der Axe der y, welche die Axe der x in der Entfernung a vom Mittelpuncte schneidet; und eben so bedeutet $y=b$ eine Parallellinie der Axe der x, welche in der Axe der y den Parameter b hat. Und hiermit haben wir denn auch die wahre analytisch-geometrische Bedeutung derjenigen beiden Gleichungen erkannt, durch welche nach §. 2 die Lage eines Punctes bestimmt wird. Jede dieser Gleichungen verweist uns eigentlich auf eine Linie von indefiniter Ausdehnung, welche durch den Punct P parallel mit einer der Axen gedacht wird. Es bedeutet also die Gleichung $x=a$ in Fig. 1 die Linie AP in ihrer unbestimmten Erstreckung, und es bedeutet eben so die Gleichung $y=b$ die Linie BP in ihrer ganzen indefiniten Ausdehnung. Denn, wie überhaupt jede einzelne Gleichung in der Ebene uns allemal auf eine Linie verweist, so gilt diess auch von der Gleichung $x=a$; sie verweist uns nämlich auf diejenige Linie, für deren sämmtliche Puncte die Coordinate x denselben Werth a hat; und auf ähnliche Weise verhält es sich mit der Gleichung $y=b$. Streng genommen wird also der Punct durch diese beiden Gleichungen nicht als der Durchschnittspunct seiner beiden Special-Coordinaten PA und PB, sondern als der Durchschnittspunct zweier durch ihn gelegten Axenparallelen von indefiniter Ausdehnung erfasst und dargestellt; er wird dargestellt als derjenige Punct, welcher zweien Linien gemeinschaftlich zukommt, für deren eine alle x den Werth a, für deren andere alle y den Werth b haben.

Ferner ergiebt sich hieraus, dass $y=0$ die Gleichung der Axe der x, und dass $x=0$ die Gleichung der Axe der y ist; denn jene verweist uns auf diejenige Linie, für deren sämmtliche Puncte es gar keine Coordinate y, und diese verweist uns auf diejenige Linie, für deren sämmtliche Puncte es gar keine Coordinate x giebt.

§. 5. Gleichung einer durch den Mittelpunct gehenden Linie.

Wenn gefordert wird, dass irgend eine Linie, deren Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ist, durch einen Punct gehen soll, dessen Gleichungen $x=p$ und $y=q$ sind, so müssen natürlich die Coordinaten dieses Punctes, weil solcher als irgend ein Punct der Linie vorausgesetzt wird, die Bedingung erfüllen, welche in der Gleichung der Linie ausgedrückt ist; in Bezug auf diesen Punct gilt also

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung der Linie, so folgt:

$$\frac{x-p}{a}+\frac{y-q}{b}=0$$

als die Gleichung einer Linie, welche die Parameter a und b, und zugleich eine solche Lage hat, dass sie durch den gegebenen Punct geht.

Ist nun dieser Punct der Mittelpunct des Axensystems, so wird $p=0$ und $q=0$, und daher

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

die allgemeine Form der Gleichung für eine jede durch den Mittelpunct gehende Linie.

Man sieht, wie sich diese Gleichung von der obigen wesentlich dadurch unterscheidet, dass in ihr gar kein constantes, oder von x und y unabhängiges Glied enthalten ist. Wollen wir also eine ausserhalb des Mittelpunctes gegebene Linie in einer sich selbst parallelen Lage auf den Mittelpunct transportiren, oder, mit andern Worten, wollen wir die Centroparallele einer gegebenen Linie finden, so haben wir nur in der Gleichung derselben das constante Glied $=0$ zu setzen.

Bei einer jeden durch den Mittelpunct gehenden Linie kommt es übrigens gar nicht mehr auf die absolute Grösse, sondern lediglich auf das Verhältniss der beiden Constanten a und b an, welche zwar noch Parameter genannt werden können, dennoch aber eine ganz andere Bedeutung haben, als bei jeder Linie ausserhalb des Mittelpunctes. Diess wird besonders einleuchtend, wenn wir eine ausserhalb des Mittelpunctes gegebene Linie LL in einer sich selbst parallelen Lage auf den Mittelpunct transportiren. Während sie sich hierbei dem Mittelpuncte nähert, werden ihre Parameter MA und MB allmälig immer kleiner, behaupten aber doch immer dasselbe Verhältniss, so dass bei jeder Zwischenlage $MA':MB'=MA:MB$ ist. Im Momente, da die Linie den Mittelpunct erreicht, verschwinden eigentlich ihre Parameter, aber auch als verschwindende Grössen haben sie noch das Verhältniss von $MA:MB$. Es ist daher ganz gleichgiltig, welche absoluten Werthe wir in der Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ für a und b einführen wollen, nur muss das Verhältniss derselben genau dasselbe sein, welches für die Parameter irgend einer Parallellinie ausserhalb des Mittelpunctes gefordert wird.

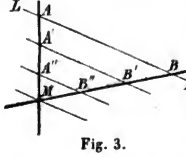


Fig. 3.

§. 5. Durchschnittspunct zweier Linien.

Sind uns zwei Linien L und L' gegeben, so bietet sich als eines der ersten Probleme die Bestimmung ihres Durchschnittspunctes dar. Es seien die Gleichungen der beiden Linien

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$$

indem die Accente von a' und b' ausdrücken sollen, dass die Parameter der zweiten Linie L' andere Werthe haben, als die Parameter a und b der ersten Linie L. Nun ist der Durchschnittspunct P beider Linien eigentlich schon dadurch bestimmt, dass wir beide Gleichungen hinschreiben, und auf ein und dasselbe Object im Raume beziehen. Da aber die einfachste Bestimmungsmethode eines Punctes diejenige durch seine Coordinaten ist, so müssen wir die Coordinaten x und y des Durchschnittspunctes beider Linien auf-

suchen. Dazu gelangen wir durch die sehr einfache Betrachtung, dass für diesen Punct, als den einzigen, welcher beiden Linien gemeinschaftlich angehört, die Bedingungen beider Gleichungen erfüllt sein müssen. Eliminiren wir also aus beiden Gleichungen zuvörderst die Coordinate y, indem wir die erste Gleichung durchweg mit b, die zweite Gleichung durchweg mit b' multipliciren, und hierauf von der ersten Gleichung die zweite subtrahiren, so erhalten wir den Werth von x; und eliminiren wir dann durch ein ähnliches Verfahren die Coordinate x, so erhalten wir den Werth von y. Auf diese Weise findet sich:

$$x=\frac{aa'(b-b')}{a'b-a'b} \quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}$$

welches die gesuchten Coordinaten des Durchschnittspunctes beider Linien, oder die Gleichungen der beiden durch diesen Punct gehenden Axenparallelen sind.

B. Probleme, welche von dem besonderen Charakter des Axensystemes abhängig sind.

§. 6. Centrodistanz eines Punctes.

Die bisherigen Aufgaben, welche sich lediglich auf die Lage von Puncten oder Linien bezogen, sind ganz unabhängig davon, ob das Axensystem ein rechtwinkeliges oder ein schiefwinkeliges ist. Anders verhält es sich mit den nun folgenden Problemen, bei denen es sich um Lineargrössen und Winkelfunctionen handelt, welche eine verschiedene Behandlung erfordern, je nachdem die beiden Axen einen rechten Winkel bilden, oder nicht. Wir werden daher bei diesen Problemen immer zwei Fälle zu unterscheiden haben, von welchen wir allemal denjenigen zuerst in Betrachtung ziehen wollen, welcher ein rechtwinkeliges Axensystem voraussetzt, weil er eine einfachere Lösung gestattet.

Nennen wir Centrodistanz den Abstand eines Punctes vom Mittelpuncte des Axensystems, so ergiebt sich leicht, dass diese Centrodistanz jedenfalls die eine Diagonale des, von den Coordinaten des Punctes gebildeten Parallelogramms ist.

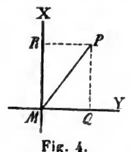


Fig. 4.

Bei rechtwinkeligem Axensystem ist dieses Parallelogramm gleichfalls rechtwinkelig, also ein Rectangel, und es wird daher ganz allgemein für einen Punct, dessen Coordinaten x und y sind, die Centrodistanz

$$D=\sqrt{x^2+y^2}$$

weil ja PM die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreieckes ist, welches von den beiden Coordinaten PQ und PR oder MQ gebildet wird.

Ist dagegen das Axensystem ein schiefwinkeliges, so wird die Centrodistanz eine Function des schiefen Neigungswinkels beider Axen; setzen wir diesen Winkel $=\gamma$, so folgt nach einem bekannten Satze der Tri-

gonometrie $D=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\gamma}$
in welchem Ausdrucke das Glied $2xy\cos\gamma$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Punct in einem der beiden spitzen oder stumpfen Quadranten des Axensystems liegt. Ist $\gamma=90^0$, so wird dieses Glied $=0$, und der Ausdruck von D erhält die, dem rechtwinkeligen Axensysteme entsprechende einfachere Form, wie vorher.

§. 7. Distanz oder Intervall zweier Puncte.

Die gegenseitige Distanz irgend zweier Puncte ist die eine Diagonale desjenigen Parallelogramms, welches von den beiden Differenzen ihrer gleichnamigen Coordinaten gebildet wird. Diess ist unmittelbar einleuchtend, wenn wir uns beide Puncte in einem und demselben Quadranten, und für den einen derselben grössere Coordinatwerthe gegeben denken, als für den andern. Dass aber der Satz ganz allgemeine Giltigkeit hat, davon überzeugt man sich, wenn man für beide, auch in verschiedenen Quadranten liegende Puncte ihre Verbindungslinie, welche die gesuchte Distanz ist, und ihre Coordinaten zieht, und dabei die Vorzeichen der letzteren berücksichtigt, durch welche die Differenz je zweier gleichnamiger Coordinaten in die Summe derselben übergeht, sobald ihre Vorzeichen verschiedene sind.

Um jedoch unser Problem unabhängig von der Berücksichtigung der Vorzeichen lösen zu können, wollen wir uns zunächst beide Puncte P und P' im Quadranten der positiven Halbaxen eines rechtwinkeligen Axensystems gegeben denken, und zwar

den Punct P durch $PQ=x$ und $PR=y$,
- - P' - $P'Q'=x'$ und $P'R'=y'$.

Verlängern wir nun $R'P'$ bis S, so ist offenbar die gesuchte Distanz PP' die Hypotenuse des von den beiden Katheten SP und SP' gebildeten rechtwinkeligen Dreiecks; nun ist aber

$$SP=PQ-SQ=PQ-P'Q'=x-x'$$
$$SP'=SR'-P'R'=PR-P'R'=y-y'$$

Fig. 5.

folglich wird

$$PP'=J=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

Dieser Ausdruck für das Intervall zweier Puncte ist ganz allgemein giltig, welche Lage auch die Puncte haben mögen, sobald man nur auf die Vorzeichen ihrer Coordinaten achtet.

Wenn das Axensystem schiefwinkelig ist, so wird natürlich der Winkel γ seinen Einfluss in ganz ähnlicher Weise geltend machen, wie diess bei der Centrodistanz eines Punctes der Fall war; daraus ergiebt sich in einem solchen Axensysteme

$$J=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\gamma}$$

als der Werth der Distanz oder des Intervalls zweier durch ihre Coordinaten x und y, x' und y' gegebener Puncte; welcher Werth für $\gamma=90^0$ auf den

vorigen zurückkommt. Bei dem Gebrauche dieses Ausdruckes ist natürlich stets auf die Vorzeichen der Coordinaten zu achten, wie sich solche durch die jedesmalige Lage der beiden Puncte bestimmen.

§. 8. Neigungswinkel zweier Linien überhaupt.

Sind uns zwei Linien L und L' gegeben, so ist, nächst der Bestimmung ihres Durchschnittspunctes (§. 5), die Auffindung ihres Neigungswinkels ein besonders wichtiges Problem. Da nun dieser Winkel nicht unmittelbar, sondern nur in einer seiner trigonometrischen Functionen gefunden werden kann, so fragt es sich zuvörderst, welche dieser Functionen wir aufsuchen wollen. Die Tangente ist zwar am einfachsten zu bestimmen; wir ziehen jedoch die Bestimmung des Cosinus vor, weil die dabei zu befolgende Methode den Vorzug einer grösseren Allgemeinheit hat.

Nehmen wir wiederum an, die Gleichungen beider Linien seien

$$\text{für } L,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{für } L',\ \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$$

so ist es ohne Weiteres einleuchtend, dass der Winkel dieser beiden Linien unverändert bleibt, wenn wir sie beide auf den Mittelpunct transportiren, oder, dass der Neigungswinkel ihrer beiden Centroparallelen derselbe ist, welchen sie selbst mit einander bilden. Es sind aber nach §. 4 die Gleichungen der beiden Centroparallelen

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=0$$

Man nehme nun in der ersten Centroparallele irgend einen beliebigen Punct P, in der zweiten Centroparallele irgend einen Punct P', und bezeichne die Coordinaten des letzteren Punctes mit x' und y', um sie von denen des ersteren Punctes zu unterscheiden, so ist klar, dass diese beiden Puncte nebst dem Mittelpuncte M des Axensystems ein Dreieck bestimmen, dessen drei Seiten bekannt sind; denn es ist

MP die Centrodistanz D des Punctes P

MP' die Centrodistanz D' des Punctes P'

PP' das Intervall J der beiden Puncte P und P';

Der gesuchte Winkel W ist aber derjenige, welcher der Seite PP' gegenüberliegt; folglich wird nach einem bekannten Satze der Trigonometrie:

$$\cos W = \frac{\Box MP + \Box MP' - \Box PP'}{2MP \cdot MP'}$$

$$= \frac{D^2 + D'^2 - J^2}{2DD'}$$

Fig. 6.

Bis hierher gilt diese Betrachtung ganz allgemein, die Axen mögen rechtwinkelig oder schiefwinkelig sein; in ihrem weiteren Verfolge wird sie verschieden nach Maassgabe der Beschaffenheit des Axensystems.

§. 9. Neigungswinkel zweier Linien in einem rechtwinkeligen Axensysteme.

Ist nun das Axensystem rechtwinkelig, so folgt, nach Einsetzung der Werthe, welche sich in diesem Falle aus den §§. 6 und 7 für D, D' und J ergeben:

$$\cos W = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Weil aber P ein Punct der Centroparallele von L ist, so gilt für ihn $y=-\frac{b}{b}x$; und weil P' ein Punct der Centroparallele von L' ist, so gilt für ihn $y'=-\frac{b'}{a'}x'$; substituirt man diese Werthe in vorstehendem Ausdrucke, so wird endlich

$$\cos W = \frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

aus welchem dann weiter $\quad \operatorname{tang} W = \frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$

gefolgert werden kann. Diess sind also in einem rechtwinkeligen Axensysteme die allgemeinen Werthe für den Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels zweier Linien, welche beide in den Quadranten der positiven Halbaxen fallen, und daher durch die positiven Parameter a und b, a' und b' bestimmt werden. Haben beide Linien, oder hat eine derselben eine andere Lage, so sind nur die entsprechenden Vorzeichen ihrer Parameter zu berücksichtigen.

Aus vorstehenden Werthen von $\cos W$ oder $\operatorname{tang} W$ lassen sich auch die Bedingungen ableiten, welche erfüllt sein müssen, wenn zwei Linien auf einander normal, oder mit einander parallel sein sollen. Sind beide Linien normal oder rechtwinkelig, so muss für sie

$$\cos W = 0, \text{ oder } \operatorname{tang} W = \infty$$

sein, was nur dann möglich ist, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke dieser beiden Functionen $aa'+bb'=0$ ist. Für die Rechtwinkeligkeit zweier Linien gilt daher die allgemeine Bedingung, dass die Summe der beiden Producte ihrer gleichnamigen Parameter $=0$ sein muss.

Sollen dagegen die Linien parallel sein, so muss für sie

$$\cos W = 1 \text{ oder } \operatorname{tang} W = 0$$

sein, was nur dann möglich ist, wenn $ab'-a'b=0$, oder wenn $a:b=a':b'$ ist, wie man auch leicht erkennt, wenn man in einem beliebigen Axensysteme ein paar parallele Linien einträgt. Für den Parallelismus zweier Linien gilt daher die allgemeine Bedingung, dass ihre Parameter gleiches Verhältniss haben müssen.

§. 10. Neigungswinkel zweier Linien in einem schiefwinkeligen Axensysteme.

Wenn das Axensystem ein schiefwinkeliges ist, so liefert der zu Ende von §. 8 stehende allgemeine Ausdruck ein anderes Resultat, weil dann

für D, D' und J nicht die ersten, sondern die zweiten, in den §§. 6 und 7 stehenden Werthe dieser Grössen zu substituiren sind. Führt man diese Substitution aus, indem man zugleich den sehr wesentlichen Umstand berücksichtigt, dass die Centroparallelen zweier, im Quadranten der positiven Halbaxen gegebenen Linien nothwendig in die beiden anliegenden Quadranten fallen, dass also für jeden ihrer Puncte entweder die Coordinate x oder die Coordinate y negativ zu nehmen ist, und dass demnach in vorliegendem Falle für beide Puncte P und P' entweder die x, oder die y negativ sein müssen, so folgt zunächst:

$$\cos W = \frac{xx' + yy' - (xy' + x'y)\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\gamma}}$$

und setzt man hierin abermals die, aus den Gleichungen beider Centroparallelen folgenden Werthe

$$\text{von } y = -\frac{b}{a}x, \text{ von } y' = -\frac{b'}{a'}x'$$

ein, so ergiebt sich endlich:

$$\cos W = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\gamma}}$$

woraus der Werth von $\operatorname{tang} W = \dfrac{(ab' - a'b)\sin\gamma}{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\gamma}$

gefolgert werden kann.

Diess sind also in einem schiefwinkeligen Axensysteme die allgemeinen Ausdrücke für den Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels zweier im Quadranten der positiven Halbaxen gegebenen Linien. Fallen beide Linien, oder fällt eine derselben in einen anderen Quadranten, so hat man nur die, ihrer Lage entsprechenden Vorzeichen ihrer Parameter zu berücksichtigen.

Aus diesen Ausdrücken, besonders aber aus dem Ausdrucke von $\operatorname{tang} W$ lassen sich nun sehr leicht die Bedingungen ablesen, welche in einem schiefwinkeligen Axensysteme für den Parallelismus oder die Rechtwinkeligkeit zweier Linien erfordert werden. Sollen die Linien parallel sein, so muss $\operatorname{tang} W = 0$, und folglich

$$ab' - a'b = 0, \text{ oder } a' : b' = a : b$$

sein, welches dieselbe Bedingung ist, wie in einem rechtwinkeligen Axensysteme.

Sollen aber die Linien auf einander normal oder rechtwinkelig sein, so wird gefordert, dass $\operatorname{tang} W = \infty$, oder dass

$$aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\gamma = 0$$

sei, was sich auch so schreiben lässt:

$$a'(a - b\cos\gamma) + b'(b - a\cos\gamma) = 0$$

Dabei bleibt immer zu berücksichtigen, dass sich auch diese Bedingung zunächst auf den Fall bezieht, da beide Linien im Quadranten der positiven Halbaxen gegeben sind, weshalb in jedem andern Falle die Vorzeichen ihrer Parameter, nach Maassgabe ihrer besondern Lage, beachtet werden müssen.

§. 11. Centronormale einer gegebenen Linie.

Wir wollen diejenige Normale einer gegebenen Linie, welche durch den Mittelpunct des Axensystems geht, die Centronormale derselben nennen. Nach denen in den beiden vorhergehenden §§. gefundenen Bedingungsgleichungen für die Rechtwinkeligkeit zweier Linien ist es nun leicht, für jede Linie die Gleichung ihrer Centronormale zu finden.

Ist das Axensystem rechtwinkelig, und hat die im Quadranten der positiven Halbaxen gegebene Linie die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

so wird nach §. 5 die Gleichung ihrer Centronormale von der Form

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=0$$

sein müssen. Da nun beide Linien auf einander normal sein sollen, so muss zwischen ihren Parametern, nach §. 9, die Bedingungsgleichung

$$aa'+bb'=0$$

erfüllt sein, aus welcher sich das Verhältniss

$$a':b'=b:-a$$

ergiebt. Weil es nun aber für die gesuchte Normale, als eine durch den Mittelpunct gehende Linie, lediglich auf die Kenntniss des Verhältnisses ihrer Parameter a' und b' ankommt, so können wir in ihrer Gleichung für a' den Werth b, und für b' den Werth $-a$ einsetzen; demnach ist

$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$$

die Gleichung der Centronormale einer im Quadranten der positiven Halbaxen gegebenen Linie, welche in der Axe der x den Parameter a, und in der Axe der y den Parameter b hat.

Vergleichen wir diese Gleichung mit jener der gegebenen Linie, so ergiebt sich folgende allgemeine Regel, um aus der Gleichung irgend einer Linie die Gleichung ihrer Centronormale zu finden: man setze das constante Glied der Gleichung $=0$, vertausche in den beiden übrigen Gliedern die Parameter, und verwandle das Vorzeichen des einen Gliedes in das entgegengesetzte. Durch Ausführung dieser drei Veränderungen gelangt man jedenfalls auf die gesuchte Gleichung der Centronormale.

Ist dagegen das Axensystem ein schiefwinkeliges, so gilt nach §. 10 für die gegebenen Parameter a und b, und für die gesuchten Parameter a' und b' die Bedingungsgleichung:

$$a'(a-b\cos\gamma)+b'(b-a\cos\gamma)=0$$

aus welcher sich das Verhältniss

$$a':b'=b-a\cos\gamma:-a+b\cos\gamma$$

ergiebt. Aber wiederum bedürfen wir für die gesuchte Normale nur die Kenntniss des Verhältnisses ihrer Parameter; folglich wird ihre Gleichung

$$\frac{x}{b-a\cos\gamma}-\frac{y}{a-b\cos\gamma}=0$$

welche zunächst für den Fall gilt, da die gegebene Linie positive Parameter hat, und daher bei einer anderen Lage derselben in den Vorzeichen von a oder b eine angemessene Aenderung erleidet.

Diese wenigen Sätze aus der analytischen Planimetrie sind hinreichend, um uns als eine Vorbereitung auf diejenigen Lehren der analytischen Stereometrie zu dienen, mit welchen wir uns nun zu beschäftigen haben.

Zweites Capitel.

Analytische Stereometrie.

§. 12. Stereometrische Axensysteme und deren Eintheilung.

Wenn uns beliebige Puncte, Linien und Flächen im Raume gegeben sind, so ist deren Bestimmung nur mittels eines, den ganzen Raum beherrschenden, d. h. eines nach drei Dimensionen ausgedehnten oder trimetrischen Axensystemes möglich. Neben den Axen der x und y wird also die Einführung einer dritten Axe, ausserhalb der Ebene jener beiden, nothwendig, und es wird jeder Punct nur dann bestimmt sein, wenn ausser seinen Coordinaten x und y auch die der dritten Axe parallele Coordinate z gegeben ist. Man nennt diese Axe die Axe der z, und die drei, durch je zwei Axen gehenden Ebenen die Coordinat-Ebenen, welche nach denen in ihnen liegenden Axen als die Coordinat-Ebenen (xy), (zx) und (yz) unterschieden und bezeichnet werden. Sie theilen den Raum um den Mittelpunct des Axensystems in acht körperliche Winkel oder Triëder, welche Raumoctanten heissen mögen, und sich am einfachsten nach den Vorzeichen derjenigen Halbaxen unterscheiden lassen, von denen sie eingeschlossen werden.

Anm. So haben wir also einen Octanten der drei positiven Halbaxen, einen Octanten der drei negativen Halbaxen, einen Octanten der zwei positiven Halbaxen der x und der y, aber der negativen Halbaxe der z u. s. w. Der Gleichförmigkeit und leichten Orientirung wegen ist es sehr zweckmässig, stets den oben, vorn und rechts liegenden Octanten als den der positiven Halbaxen zu betrachten, oder die obere Hälfte der Axe der x, die rechte Hälfte der Axe der y, und die vordere Hälfte der Axe der z ein für alle Mal als positive Halbaxen zu wählen, wenn nicht besondere Gründe eine Ausnahme von dieser Regel erfordern.

Da die Neigungswinkel der Coordinat-Ebenen theils rechte, theils schiefe Winkel sein können, so sind auch verschiedene trimetrische Axensysteme möglich. Bezeichnen wir jene drei Neigungswinkel, wie solche an den Axen der x, der y und der z anliegen, mit den Buchstaben A, B und C, so können in Bezug auf sie nur vier verschiedene Fälle Statt finden, welche wir durch folgende Nomenclatur der entsprechenden Axensysteme unterscheiden wollen:

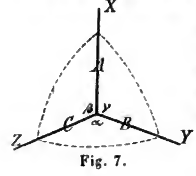


Fig. 7.

1) **orthoëdrisches Axensystem**; A, B und C sind rechte Winkel;
2) **monoklinoëdrisches** Axensystem, A und B sind rechte, C ist ein schiefer Winkel;
3) **diklinoëdrisches** Axensystem, A ist ein rechter Winkel, B und C sind zweierlei schiefe Winkel;
4) **triklinoëdrisches** Axensystem, A, B und C sind dreierlei verschiedene schiefe Winkel.

Die letzteren drei Axensysteme, in welchen überhaupt schiefe Winkel vorkommen, lassen sich auch gemeinschaftlich unter dem Namen der klinoëdrischen Axensysteme zusammenfassen.

Anm. Diese Nomenclatur ist also nicht von den Neigungswinkeln der Axen, sondern von denen der Coordinat-Ebenen, als der Grund-Ebenen des Axensystems, entlehnt, weshalb auch bei ihrer Bildung das Wort *hedra* benutzt worden ist. Wollte man die Eintheilung auf die Neigungswinkel der Axen gründen, so würde es zweckmässiger sein, die Namen orthometrisch, monoklinometrisch u. s. w. zu gebrauchen. Da aber in den Krystallformen die Flächen das zunächst und unmittelbar Gegebene sind, und da die den Coordinat-Ebenen entsprechenden Krystallflächen eine ganz besonders wichtige Rolle spielen, so scheint mir die erstere Eintheilung und Nomenclatur wichtiger zu sein, als die letztere, weshalb ich mich ihrer schon seit längerer Zeit bediene.

In den klinoëdrischen Axensystemen erlangen ausser den Neigungswinkeln der Coordinat-Ebenen auch die Neigungswinkel der Axen eine grosse Wichtigkeit, welche man, weil sie ihren gemeinschaftlichen Scheitel im Mittelpuncte des Axensystems haben, die Mittelpunctswinkel nennen kann. Wir bezeichnen sie in jedem triklinoëdrischen Axensysteme, so wie sie den Winkeln A, B und C gegenüber liegen, mit den Buchstaben α, β und γ; und es ist aus der sphärischen Trigonometrie bekannt, dass diese beiderlei Winkel durch folgende Relationen mit einander verknüpft sind:

$$\cos A \sin\beta \sin\gamma = \cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma$$
$$\cos B \sin\gamma \sin\alpha = \cos\beta - \cos\gamma \cos\alpha$$
$$\cos C \sin\alpha \sin\beta = \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta$$

Da nun das orthoëdrische Axensystem das regelmässigste und einfachste ist, so werden die meisten Probleme in ihm mit weit grösserer Leichtigkeit zu lösen sein, als in den klinoëdrischen Systemen, als deren allgemeinster Repräsentant das triklinoëdrische System zu betrachten ist. Desungeachtet giebt es gewisse Probleme, welche von dem besondern Charakter des Axensystems ganz unabhängig sind, daher wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen wollen.

A. Probleme, welche in allen Axensystemen dieselbe Lösung finden.

§. 13. Allgemeine Bestimmung der Lage von Puncten.

Sind uns im Raume verschiedene Puncte P, P', P'' u. s. w. gegeben, so haben wir solche auf irgend ein Axensystem zu beziehen, welches, nach Maassgabe der besonderen Beschaffenheit derjenigen Formen, denen diese

Puncte angehören, entweder ein orthoëdrisches, oder irgend ein klinoëdrisches sein kann. Da jedoch die allgemeine Bestimmung der Lage von Puncten ganz unabhängig von dem besonderen Charakter des Axensystems ist, so haben auch die folgenden Betrachtungen ganz allgemeine Giltigkeit.

Die Lagenbestimmung eines jeden Punctes wird dadurch gewonnen, dass man sich durch ihn drei Ebenen gelegt denkt, welche den Coordinat-Ebenen des Axensystems parallel sind. Es sei z. B. P ein solcher, im Octanten der positiven Halbaxen liegender Punct, so sind PA, PB und PC die drei Parallel-Flächen der Ebenen (yz), (zx) und (xy), als deren Durchschnittspunct er analytisch-geometrisch erfasst wird. Jede von diesen drei Flächen wird natürlich mit einer der Halbaxen zum Durchschnitte kommen und ein Segment derselben von bestimmter Länge abgränzen; so bestimmt die PA in der Axe der x das Segment $MA=a$, die PB in der Axe der y das Segment $MB=b$, und die PC in der Axe der z das Segment $MC=c$, und es ist einleuchtend, dass die Lage des Punctes P eigentlich schon durch die Angabe der Grösse und der Richtung dieser drei Axensegmente bestimmt sein würde.

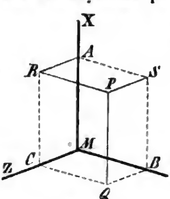


Fig. 8.

Allein die drei Parallelflächen der Coordinat-Ebenen kommen auch gegenseitig zum Durchschnitte und bedingen so die Entstehung der drei Linien PQ, PR und PS, welche den drei Axen parallel sind, die Coordinaten des Punctes P genannt und mit den Buchstaben x, y und z bezeichnet werden; wie denn überhaupt der Begriff der Coordinaten kein anderer ist, als der von Parallel-Linien der Axen, durch welche die axoparallelen Abstände irgend eines Punctes von den drei Coordinat-Ebenen bestimmt werden. Da nun $PQ=MA$, $PR=MB$ und $PS=MC$ ist, so wird der Punct P durch drei Gleichungen von der Form

$$x=a,\ y=b \text{ und } z=c$$

vollkommen bestimmt sein. Dieselbe Bestimmungsmethode gilt übrigens ganz allgemein für alle möglichen Puncte; denn wenn der Punct in irgend einem anderen Octanten liegt, so werden gewisse seiner Coordinaten negative Vorzeichen erhalten. Die Vorzeichen der Coordinaten bestimmen nämlich denjenigen Raum-Octanten, in welchem der Punct gelegen ist, und die Grössenwerthe derselben bestimmen den Ort des Punctes innerhalb dieses Octanten.

Jedenfalls aber erfordert ein Punct im Raume zu seiner Bestimmung drei Gleichungen, woraus sich auch umgekehrt die Folgerung ziehen lässt, dass drei Gleichungen, wenn sie auf ein und dasselbe Object im Raume bezogen werden, uns immer auf einen Punct verweisen.

Anm. Wie also in der Ebene zwei, so werden im Raume drei Gleichungen zu der Bestimmung eines Punctes erfordert; und wie er dort als der Durchschnittspunct zweier Parallellinien der Axen, so wird er hier unmittelbar als der Durchschnittspunct dreier Parallelflächen der Coordinat-Ebe-

nen, oder auch mittelbar als der Durchschnittspunct dreier Parallellinien der Axen erfasst und dargestellt. In §. 16 werden wir sehen, wie eigentlich die wahre analytisch-geometrische Bedeutung der drei Gleichungen $x=\pm a$, $y=\pm b$ und $z=\pm c$ aufgefasst werden muss, durch welche jeder Punct seine einfachste Bestimmung findet. Einstweilen begnügen wir uns mit der Vorstellung, dass durch diese Gleichungen die Richtung und die Grösse der Coordinaten des Punctes ausgedrückt werden sollen.

Fällt der Punct in eine der Coordinat-Ebenen, so wird natürlich diejenige seiner Coordinaten, welche nach der ausserhalb dieser Ebene liegenden Axe benannt ist, den Werth 0 haben, wie sich diess unmittelbar aus dem Begriffe der Coordinaten, als der axoparallelen Abstandslinien des Punctes von den Coordinat-Ebenen, ergiebt. Demnach gelten z. B. für den Punct Q die drei Gleichungen $x=0$, $y=b$ und $z=c$; für den Punct R die drei Gleichungen $x=a$, $y=0$, $z=c$ u. s. w.

Liegt der Punct in einer der Axen, fällt er also in zwei Coordinat-Ebenen, so werden für ihn die beiden, nach den zwei anderen Axen benannten Coordinaten $=0$ sein müssen; daher hat z. B. der Punct A die Gleichungen $x=a$, $y=0$ und $z=0$ u. s. w.

Für den Mittelpunct des Axensystems also, welcher in allen drei Coordinat-Ebenen enthalten ist, gelten demnach die drei Gleichungen $x=0$, $y=0$ und $z=0$.

§. 14. Gleichung einer Fläche *ausserhalb* des Mittelpunctes.

Wenn uns eine Fläche, unter welchem Worte wir jedenfalls eine ebene Fläche*) verstehen, in Bezug auf ein Axensystem gegeben ist, so wird ihre allgemeinste Lage diejenige sein, bei welcher sie ausserhalb des Mittelpunctes mit allen drei Axen zum Durchschnitte kommt. Die dadurch in dreien Halbaxen bestimmten Segmente nennen wir die Parameter der Fläche, und es ist an und für sich einleuchtend, dass eine jede Fläche durch die Grösse und die Richtung ihrer Parameter bestimmt sein müsse. Um jedoch ihre Lage und ihr Ausdehnungsgesetz analytisch-geometrisch, d. h. durch eine Gleichung darzustellen, dazu bedarf es eines algebraischen Ausdruckes, welcher uns eine allgemein giltige Relation zwischen den unbestimmten Coordinaten irgend eines ihrer Puncte und ihren constanten Parametern erkennen lässt. Zur Auffindung einer solchen Gleichung gelangen wir nun sehr einfach durch folgende Betrachtung, bei welcher wir, um sie einstweilen unabhängig von den verschiedenen Vorzeichen der Parameter und Coordinaten zu lassen, voraussetzen wollen, dass die gegebene Fläche in den Octanten der positiven Halbaxen falle. Auch wollen wir zuvörderst ein orthoëdrisches oder rechtwinkeliges Axensystem voraussetzen.

---

*) Da nämlich die Krystallformen, bei normaler Ausbildung, stets von ebenen Flächen begränzt werden, so haben wir es im Folgenden auch immer nur mit solchen Flächen, und folglich auch mit Gleichungen des ersten Grades zu thun.

Es sei nun ABC das innerhalb des Octanten der positiven Halbaxen fallende Feld einer Fläche, deren Parameter $MA=a$, $MB=b$ und $MC=c$ sind, so wird offenbar dieses Flächenfeld, zugleich mit denen von ihm bestimmten Dreiecken der Coordinat-Ebenen, eine dreiseitige Pyramide $ABCM$ begränzen.

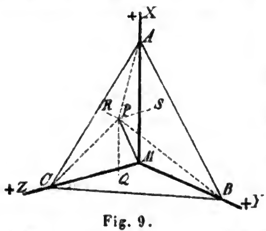


Fig. 9.

In demselben Flächenfelde wählen wir ganz willkürlich einen Punct P, dessen Coordinaten $PQ=x$, $PR=y$ und $PS=z$ sind; hierauf ziehen wir die PM oder die Centrodistanzlinie des Punctes P, und legen durch diese Linie und durch je einen der Parameter die drei Ebenen APM, BPM und CPM, welche, als Schnittflächen gedacht, die ganze Pyramide $ABCM$ in die drei Theilpyramiden $PABM$, $PBCM$ und $PCAM$ zerlegen. Wir brauchen nur noch für diese vier Pyramiden das Axiom geltend zu machen, dass das Ganze gleich ist der Summe seiner Theile, um auf die gesuchte Gleichung zu gelangen. Also ist

$$PBCM+PCAM+PABM=ABCM$$

Betrachten wir nun für jede der drei Theilpyramiden das in der betreffenden Coordinat-Ebene liegende Dreieck als ihre Grundfläche, so bestimmt sich als ihre Höhe diejenige Coordinate des Punctes P, welche nach der ausserhalb dieser Ebene liegenden Axe benannt ist; daraus folgt denn nach bekannter Regel:

$$PBCM=\tfrac{1}{6}bcx,\ PCAM=\tfrac{1}{6}cay,\ PABM=\tfrac{1}{6}abz;$$

wählen wir ferner für die ganze Pyramide das Dreieck BCM als Grundfläche, so wird ihre Höhe $=a$, und folglich ihr Inhalt:

$$ABCM=\tfrac{1}{6}abc,$$

und setzen wir endlich diese Werthe in obige Gleichung, so verwandelt sich solche in

$$bcx+cay+abz=abc$$

welches eigentlich schon die gesuchte Gleichung ist. Wir können sie jedoch in einer noch einfacheren Form schreiben, wenn wir sie in allen ihren Gliedern mit abc dividiren; dann folgt endlich

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

als die Gleichung einer Fläche, welche im Octanten der positiven Halbaxen durch die Parameter a, b und c gegeben ist. Diese von *Lamé* eingeführte Schreibart der Flächengleichungen ist äusserst symmetrisch, und lässt uns in gar keinem Zweifel über die eigentliche Bedeutung der Constanten, welche als Divisoren der Coordinaten auftreten; denn jede dieser Constanten ist derjenige Parameter, welcher in dieselbe Axe fällt, deren Coordinatzeichen als Zähler über ihm steht.

Anm. Der Gleichförmigkeit und leichteren Orientirung wegen ist es daher sehr empfehlenswerth, so weit als thunlich immer den Buchstaben a für den

Parameter in der Axe der x, den Buchstaben b für den Parameter in der Axe der y, und den Buchstaben c für den Parameter in der Axe der z zu gebrauchen. Die grosse Analogie zwischen der Liniengleichung in der Ebene und der Flächengleichung im Raume fällt in die Augen.

§. 15. Fortsetzung.

Dass nun aber in den klinoëdrischen Axensystemen die Flächengleichung genau dieselbe Form hat, dass solche also völlig unabhängig von den Neigungswinkeln der Coordinat-Ebenen und der Axen ist, diess lässt sich ganz allgemein zeigen, wenn wir sogleich ein triklinoëdrisches Axensystem voraussetzen. Nennen wir in solchem

α, β und γ die Neigungswinkel der Axen gegen einander (§. 12),

ξ, v und ζ die Neigungswinkel der Axen gegen die Coordinat-Ebenen,

und denken wir uns abermals eine im Octanten der positiven Halbaxen durch die Parameter a, b und c gegebene Fläche, so wie die von ihr und den drei Coordinat-Ebenen begränzte, schiefe dreiseitige Pyramide durch drei Schnittflächen, welche durch die Axen und irgend einen Punct P von den Coordinaten x, y und z gelegt worden, in drei Theilpyramiden zerlegt, so gilt für diese vier Pyramiden abermals die Gleichung:

$$PBCM + PCAM + PABM = ABCM$$

allein die einzelnen Glieder dieser Gleichung werden etwas anders zu berechnen sein. Es bestimmen sich nämlich die Grundflächen der drei Theilpyramiden, wie folgt:

$$BCM = \tfrac{1}{2}bc \sin\alpha,\ CAM = \tfrac{1}{2}ca \sin\beta,\ ABM = \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma,$$

und die Höhen derselben, oder die von dem Puncte P auf diese Grundflächen gefällten Normalen PQ', PR' und PS' erhalten die Werthe:

$$PQ' = x \sin\xi,\ PR' = y \sin v,\ PS' = z \sin\zeta$$

Für die ganze Pyramide endlich wird, wenn wir BCM als ihre Grundfläche betrachten, die entsprechende Höhe $= a \sin\xi$. Folglich erhält die allgemeine Gleichung zunächst die Form:

$$xbc \sin\alpha \sin\xi + yca \sin\beta \sin v + zab \sin\gamma \sin\zeta = abc \sin\alpha \sin\xi$$

Da nun aber eine sehr einfache Betrachtung lehrt, dass

$$\sin\alpha \sin\xi = \sin\beta \sin v = \sin\gamma \sin\zeta$$

ist, so verschwinden diese gleichen Factoren aus vorstehender Gleichung, und wir gelangen abermals auf den Ausdruck

$$xbc + yca + zab = abc$$

oder auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

als die Gleichung einer, im Octanten der positiven Halbaxen durch die Parameter a, b und c bestimmten Fläche.

Obwohl nun in beiden Fällen, d. h. im orthoëdrischen wie im triklinoëdrischen Axensysteme, diese Gleichung zunächst nur für das, innerhalb des Octanten der positiven Halbaxen liegende Feld der Fläche gefunden

worden ist, so stellt sie uns doch das Ausdehnungsgesetz der Fläche in ihrer ganzen indefiniten Erstreckung dar, indem für jeden ausserhalb dieses Octanten gelegenen Punct nur das Vorzeichen der betreffenden Coordinate zu ändern ist. Auch gilt diese Gleichung ganz allgemein für jede beliebige Fläche, sobald wir die Vorzeichen der Parameter berücksichtigen, wie solche irgend einer, in einem andern Octanten gegebenen Fläche entsprechen; welche Vorzeichen auch auf die rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehende 1 oder sonstige Constante ihren Einfluss ausüben werden.

Anm. Hieraus ergiebt sich denn auch, dass eine Fläche im Raume jedenfalls durch eine Gleichung vollkommen bestimmt wird; was sich auch umgekehrt so aussprechen lässt, dass eine Gleichung im Raume an und für sich allemal eine Fläche darstellt. Da nun der Punct zu seiner Bestimmung drei Gleichungen erfordert, so lässt sich schon im Voraus vermuthen, dass die Linie wohl zweier Gleichungen bedürfen werde.

§. 16. Gleichungen solcher Flächen, welche einer der Axen, oder einer der Coordinat-Ebenen parallel sind.

Wenn eine Fläche einer der Axen parallel ist, so wird ihr in derselben Axe liegender Parameter den Werth ∞ haben. Für irgend eine Parallelfläche der Axe der x wird also $a=\infty$, wodurch aus ihrer Gleichung das mit x behaftete Glied verschwindet; auf ähnliche Weise verhält es sich mit dem Parameter b oder c für Flächen, welche der Axe der y oder z parallel sind. Daher wird denn die Gleichung

einer Parallelfläche der Axe der x, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

- - - - - - y, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$

- - - - - - z, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

und es ergiebt sich hieraus, dass jede Gleichung, in welcher nur zwei Coordinaten auftreten, eine Parallelfläche derjenigen Axe bedeutet, welche nach der fehlenden Coordinate benannt ist.

Wenn eine Fläche zweien Axen, oder, was dasselbe bedeutet, einer Coordinat-Ebene parallel ist, so werden ihre in beiden Axen liegenden Parameter den Werth ∞ haben, wodurch denn die beiden betreffenden Glieder der Gleichung verschwinden; daher wird die Gleichung

einer Parallelfläche der Ebene (xy), $z=c$

- - - - (zx), $y=b$

- - - - (yz), $x=a$

und es folgt hieraus, dass jede Gleichung, in welcher nur noch eine Coordinate auftritt, eine Parallelfläche derjenigen Coordinat-Ebene bedeutet, welche nach den beiden anderen Coordinaten benannt ist.

Anm. Wie überhaupt eine Gleichung im Raume immer nur eine Fläche bedeutet, so gilt diess auch für jede der drei vorstehenden Gleichun-

gen. Die Gleichung $x=a$ sagt eigentlich aus, dass alle x mit dem Werthe a zu denken sind; sie verweist uns auf die Vorstellung sämmtlicher Puncte, deren axoparallele Abstände von der Coordinat-Ebene (yz) den Werth a haben, und folglich auf die Vorstellung derjenigen Parallelfläche dieser Ebene, welche die Axe der x in der Entfernung a vom Mittelpuncte schneidet. Dasselbe gilt in ganz ähnlicher Weise von den beiden Gleichungen $y=b$ und $z=c$.

Damit erkennen wir denn auch die wahre analytisch-geometrische Bedeutung der drei Gleichungen, durch welche nach §. 13 ein Punct im Raume bestimmt wird. Jede dieser Gleichungen verweist uns eigentlich nicht auf die Vorstellung des Werthes, welcher einer von den drei Coordinaten des Punctes P zukommt, sondern auf die Vorstellung einer von denjenigen drei Parallelflächen der Coordinat-Ebenen, welche durch diesen Punct gelegt oder gedacht werden können. Die Gleichung $x=a$ drückt also in der Figur 8 nicht sowohl die Gleichheit der Coordinate PQ mit der Linie AM, als vielmehr die Fläche $PRAS$ in ihrer ganzen indefiniten Erstreckung aus; eben so bedeutet $y=b$ die Fläche $PQBS$, und $z=c$ die Fläche $PQCR$, beide in ihrer indefiniten Ausdehnung. Jeder Punct im Raume wird daher analytisch-geometrisch, oder durch seine Gleichungen, nicht als der Durchschnittspunct seiner drei Special-Coordinaten, sondern als der Durchschnittspunct dreier Parallelflächen mit den Coordinat-Ebenen erfasst und dargestellt.

Aus der vorhergehenden Anmerkung folgt auch, dass $x=0$ die Gleichung der Coordinat-Ebene (yz) ist, sowie dass $y=0$ und $z=0$ die Gleichungen der beiden anderen Coordinat-Ebenen sind. Denn $x=0$ verweist uns mit unserer Vorstellung auf alle diejenigen Puncte, deren axoparalleler Abstand von der Coordinat-Ebene (yz) gleich Null ist; und eben so verhält es sich mit den beiden anderen Gleichungen.

§. 17. Gleichung einer durch den Mittelpunct gehenden Fläche.

Wenn gefordert wird, dass irgend eine Fläche, deren Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ist, durch einen Punct P gehen soll, dessen Gleichungen

$$x=p,\ y=q \text{ und } z=s$$

sind, so wird dieser Punct als ein solcher vorausgesetzt, welcher auch der gegebenen Fläche angehört. Wie nun für alle Puncte dieser Fläche die vorstehende Gleichung Giltigkeit hat, so wird solche auch für diesen Punct gelten müssen, in Bezug auf welchen sie die besondere Form

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{s}{c}=1$$

annimmt. Subtrahirt man diese besondere Gleichung von jener allgemeinen Gleichung, so folgt:

$$\frac{x-p}{a}+\frac{y-q}{b}+\frac{z-s}{c}=0$$

als die Gleichung einer jeden durch die Parameter a, b und c bestimmten

Fläche, welche zugleich durch einen Punct von den Coordinaten p, q und s geht.

Ist also dieser Punct der Mittelpunct des Axensystems, für welchen p, q und s den Werth 0 haben, so erhalten wir

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

als die allgemeine Form der Gleichung einer jeden, durch den Mittelpunct gehenden Fläche.

Vergleichen wir solche mit der Gleichung einer ausserhalb des Mittelpunctes gegebenen Fläche, so erkennen wir als wesentlichen Unterschied den Mangel eines constanten, oder eines von den Coordinaten unabhängigen Gliedes. Wollen wir also irgend eine durch ihre Gleichung gegebene Fläche in einer, sich selbst parallelen Lage auf den Mittelpunct des Axensystems transportiren, oder wollen wir für sie die Gleichung ihrer Centroparallele finden, so brauchen wir in ihrer Gleichung nur das constante Glied, oder, bei der gewöhnlichen Schreibart, die rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehende Einheit verschwinden zu lassen.

Eine unmittelbar aus dieser ihrer Gleichung sich ergebende Folgerung ist, dass es bei jeder durch den Mittelpunct gehenden Fläche nur auf das Verhältniss der Constanten a, b und c, aber durchaus nicht auf die absoluten Grössenwerthe derselben ankommt, wie sie denn in der That nur noch uneigentlich den Namen von Parametern führen. Man überzeugt sich hiervon am leichtesten, wenn man eine ausserhalb des Mittelpunctes gegebene Fäche in einer sich selbst parallelen Lage allmälig auf den Mittelpunct transportirt; das Verhältniss ihrer Parameter bleibt dabei immer das ursprüngliche, aber die Werthe derselben vermindern sich fortwährend, bis sie endlich im Momente, da die Fläche den Mittelpunct erreicht, auf Null herabsinken, aber auch noch in diesem Momente ihr anfängliches Verhältniss behaupten. Daher ist es in der That ganz gleichgiltig, welche absoluten Werthe man in der Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

den Constanten a, b und c ertheilt, wenn nur das Verhältniss dieser Werthe dasjenige ist, welches der Lage der Fläche entspricht, und durch die Parameter irgend einer beliebigen Parallelfläche bestimmt wird.

§. 18. Gleichung einer Fläche, welche durch drei gegebene Puncte geht.

Wenn eine Fläche durch zwei Puncte P und P' von bekannter Lage geht, so ist für jeden beliebigen Werth eines ihrer Parameter die Grösse der beiden anderen Parameter bestimmt, weil durch die Verbindungslinie jener beiden Puncte immer noch unzählige Flächen möglich sind.

Sind uns aber drei Puncte P, P' und P'' durch ihre Coordinaten p, q und s, p', q' und s', p'', q'' und s'' gegeben, so wird die durch sie gehende

Fläche vollkommen bestimmt, und es müssen sich daher die Parameter dieser Fläche durch die Coordinaten jener Puncte ausdrücken lassen.

Nehmen wir an, die Fläche habe die Gleichung

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1$$

so liefern uns die drei Puncte P, P' und P'', weil solche dieser Fläche angehören, die drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{p}{a_1}+\frac{q}{b_1}+\frac{s}{c_1}=1$$

$$\frac{p'}{a_1}+\frac{q'}{b_1}+\frac{s'}{c_1}=1$$

$$\frac{p''}{a_1}+\frac{q''}{b_1}+\frac{s''}{c_1}=1,$$

mittels welcher die unbekannten Parameter a_1, b_1 und c_1 leicht zu bestimmen sind, indem man z. B. aus der ersten und zweiten, sowie aus der zweiten und dritten Gleichung den Parameter a_1 eliminirt, wodurch man auf zwei neue, nur noch mit b_1 und c_1 behaftete Gleichungen gelangt; unterwirft man hierauf diese demselben Verfahren, indem man aus ihnen b_1 eliminirt, so erhält man den Werth von c_1. Auf ähnliche Weise bestimmen sich weiter die Werthe von b_1 und a_1; und führt man dabei die sich von selbst darbietenden Reductionen aus, so findet man endlich:

$$a_1=\frac{p''(qs'-q's)+p'(q''s-qs'')+p(q's''-q''s')}{qs'-q's+\quad q''s-qs''+\quad q's''-q''s'}=\frac{U}{\varphi(qs)}$$

$$b_1=\frac{q''(sp'-s'p)+q'(s''p-sp'')+q(s'p''-s''p')}{sp'-s'p+\quad s''p-sp''+\quad s'p''-s''p'}=\frac{U}{\varphi(sp)}$$

$$c_1=\frac{s''(pq'-p'q)+s'(p''q-pq'')+s(p'q''-p''q')}{pq'-p'q+\quad p''q-pq''+\quad p'q''-p''q'}=\frac{U}{\varphi(pq)}$$

In diesen drei Ausdrücken hat der Zähler einen und denselben Werth; wenn es also nur darauf ankommt, das Verhältniss der Parameter a_1, b_1 und c_1 zu kennen, so kann man den gemeinschaftlichen Zähler vernachlässigen. Dieses Verhältniss wird nämlich:

$$a_1:b_1:c_1=\frac{1}{\varphi(qs)}:\frac{1}{\varphi(sp)}:\frac{1}{\varphi(pq)}$$

oder auch $\quad a_1:b_1:c_1=\varphi(pq)\varphi(sp):\varphi(qs)\varphi(pq):\varphi(sp)\varphi(qs)$

Bei der Bestimmung von Krystallflächen wird man immer nur dieses Verhältniss zu berücksichtigen haben.

§. 19. Durchschnittslinie zwei Flächen.

Wenn uns zwei Flächen F und F' gegeben sind, so tritt uns als eines der nächsten Probleme die Bestimmung ihrer Durchschnittslinie entgegen. Es seien

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\text{ und }\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

die Gleichungen der beiden Flächen, so kann man zwar sagen, dass ihre Durchschnittslinie eigentlich schon durch die gleichzeitige Position beider Gleichungen, in der Voraussetzung, dass solche auf dasselbe Object im Raume bezogen werden sollen, gegeben sei. Wir gelangen jedoch auf eine etwas andere und noch einfachere Bestimmung der gesuchten Linie, wenn wir den Umstand berücksichtigen, dass alle ihre Puncte eben so wohl der Fläche F, als auch der Fläche F' angehören, und folglich den Bedingungen beider Gleichungen Genüge leisten müssen. Dieser Umstand berechtigt uns, die Gleichungen beider Flächen auf eine ähnliche Art durch successive Elimination der Cordinaten x, y und z mit einander zu combiniren, wie solches in §. 5 mit den Gleichungen zweier Linien, Behufs der Auffindung ihres Durchschnittspunctes, geschehen ist.

Wir multipliciren also die erste Gleichung in allen ihren Gliedern mit c, die zweite Gleichung in allen ihren Gliedern mit c', subtrahiren dann die zweite von der ersten, und gelangen dadurch auf eine neue Gleichung, welche nur noch mit den beiden Coordinaten x und y behaftet ist; wiederholen wir dasselbe Verfahren durch Multiplication mit den beiden anderen Parametern, so erhalten wir endlich folgende drei Gleichungen:

$$\frac{x}{M}-\frac{y}{N}=\frac{aa'bb'(c-c')}{MN}$$
$$\frac{z}{R}-\frac{x}{M}=\frac{cc'aa'(b-b')}{RM}$$
$$\frac{y}{N}-\frac{z}{R}=\frac{bb'cc'(a-a')}{NR}$$

indem wir, der leichteren Uebersicht wegen,

$$aa'(bc'-b'c)=M$$
$$bb'(ca'-c'a)=N$$
$$cc'(ab'-a'b)=R$$

schreiben. Wir könnten auch diese Gleichungen auf eine solche Form bringen, dass rechter Hand vom Gleichheitszeichen nur 1 statt der dort stehenden Constanten erschiene, ziehen es jedoch vor, sie so zu schreiben, wie sie unmittelbar gefunden worden sind.

Es fragt sich nun, welche Bedeutung wohl eine jede dieser drei Gleichungen an und für sich hat. Wir wissen (§. 15, Anm.), dass jede einzelne Gleichung im Raume nur eine Fläche bedeuten kann; also muss auch jede dieser Gleichungen an und für sich irgend eine Fläche darstellen. Wir haben ferner in §. 16 gesehen, dass eine jede Gleichung, in welcher nur noch zwei Coordinaten auftreten, eine Parallelfläche mit derjenigen Axe bedeutet, welche nach der fehlenden Coordinate benannt ist; folglich muss die erste Gleichung eine Parallelfläche der Axe der z, die zweite Gleichung eine Parallelfläche der Axe der y, und die dritte Gleichung eine Parallelfläche der Axe der x darstellen.

Weil jedoch diese drei Gleichungen durch Combination der beiden Flächengleichungen von F und F' erhalten worden sind, so können sie sich gemeinschaftlich nur auf alle diejenigen Puncte im Raume beziehen,

welche diesen beiden Flächen zugleich angehören, d. h. so werden wir durch sie, dafern wir sie auf ein und dasselbe Object im Raume beziehen, auf die Durchschnittslinie beider Flächen verwiesen. Folglich wird diese Durchschnittslinie in drei Ebenen erfasst, deren jede einzelne eine Parallelfläche mit einer der Axen ist. Diese Ebenen sind aber in der That keine anderen, als die durch die gesuchte Durchschnittslinie gelegten oder gedachten Parallel-Ebenen der Axen, welche man die projicirenden Ebenen der Linie nennt; und darin besteht eben die einfachste analytisch-geometrische Auffassung dieser Linie, dass sie als die Durchschnittslinie ihrer projicirenden Ebenen vorgestellt wird.

Nun ist aber an und für sich einleuchtend, dass die gesuchte Durchschnittslinie doch eigentlich durch zwei ihrer projicirenden Ebenen schon vollkommen bestimmt wird, dass also die dritte projicirende Ebene gewissermaassen als ein ganz überflüssiges Element zu betrachten ist, welches gar nicht berücksichtigt zu werden braucht, weil es schon in den beiden anderen Ebenen zugleich mit gegeben ist. Diess ergiebt sich auch wirklich aus den gefundenen drei Gleichungen, von welchen sich sehr leicht darthun lässt, dass in je zweien allemal die dritte schon enthalten ist. Man addire nämlich erst alle drei Gleichungen, so folgt:

$$\frac{aa'bb'(c-c')}{MN}+\frac{cc'aa'(b-b')}{RM}+\frac{bb'cc'(a-a')}{NR}=0;$$

hierauf addire man irgend zwei derselben, z. B. die erste und zweite, so erhält man

$$-\frac{y}{N}+\frac{z}{R}=\frac{aa'bb'(c-c')}{MN}+\frac{cc'aa'(b-b')}{RM}.$$

Setzt man hierin für das, was rechter Hand vom Gleichheitszeichen steht, den aus der vorhergehenden Gleichung folgenden Werth, so gelangt man auf die dritte Gleichung

$$\frac{y}{N}-\frac{z}{R}=\frac{bb'cc'(a-a')}{NR}.$$

Hieraus ergiebt sich denn, dass die Durchschnittslinie zweier Flächen F und F' analytisch-geometrisch durch zwei ihrer projicirenden Ebenen erfasst und ausgedrückt wird. Die dritte Gleichung, welche die dritte projicirende Ebene darstellt, ist eigentlich gar keine besondere Gleichung, sondern nur ein Consectarium der beiden anderen Gleichungen; und wenn auch oben durch successive Elimination der Coordinaten drei Gleichungen erhalten wurden, so sind doch eigentlich nur zwei, wirklich verschiedene Gleichungen gefunden worden.

§. 20. Jede Linie im Raume wird durch zwei ihrer projicirenden Ebenen bestimmt.

Was wir im vorhergehenden Paragraph zunächst für die Durchschnittslinie zweier Flächen F und F' erkannt haben, diess gilt allgemein für alle Linien; d. h. eine jede gerade Linie wird analytisch-geometrisch in

zweien ihrer projicirenden Ebenen zu erfassen und darzustellen sein. Die Richtigkeit dieser Behauptung dürfte sich aus folgender allgemeinen Betrachtung ergeben.

Wir sind mit allen unseren Vorstellungen von Punct, Linie und Fläche an den Körper gewiesen, an welchem allein sich diese Ausdehnungen als Begränzungs-Elemente anschaulich verwirklicht finden, indem der erste als Eckpunct, die zweite als Kantenlinie, die dritte als Oberfläche erscheint. Die einzige, seinem Begriffe entsprechende Vorstellungsweise des Punctes ist es, wenn man ihn als den Durchschnittspunct dreier (oder mehrer) Flächen denkt; ebenso entspricht die Vorstellungsweise der Linie, als des Durchschnittes zweier Flächen, die Vorstellungsweise der Fläche, als der Oberfläche eines Körpers, einzig und allein den Begriffen beider Arten von Ausdehnung. Den Punct in abstracto und gleichsam isolirt, als ein Etwas ohne Länge, Breite und Höhe, die Linie in abstracto, als eine Länge ohne Breite richtig vorzustellen, diess scheint nicht wohl möglich. Soll nun die analytisch-geometrische Auffassung dieser Ausdehnungen zu brauchbaren Resultaten führen, und frei von Widersprüchen bleiben, so wird sie offenbar mit jener uns nothwendigen Vorstellungsweise im Einklange stehen müssen. Wir werden daher, wie den Punct als Durchschnitt dreier, so die Linie als Durchschnitt zweier Flächen, so endlich die Fläche selbst als Oberfläche eines Körpers zu erfassen haben. Diess ist auch in der That der Fall; denn, indem wir in den drei Coordinat-Ebenen drei Flächen willkürlich voraussetzen, wird ja offenbar jede Fläche als Theil der Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide erfasst; und indem wir für jeden Punct drei Gleichungen wie $x=a$, $y=b$ und $z=c$ aufstellen, erfassen wir denselben eigentlich als den Durchschnittspunct dreier Ebenen, weil ja jede dieser Gleichungen für sich die Parallelfläche einer Coordinat-Ebene ausdrückt.

Was nun endlich die Bestimmung der geraden Linie im Raume betrifft, so ist es einleuchtend, dass solche zuvörderst jener nothwendigen Vorstellungsweise angemessen, also dergestalt beschaffen sein müsse, dass jede Linie als der Durchschnitt zweier Ebenen fixirt wird. Doch werden wir, zur Vereinfachung der Bestimmungs-Methode, diese Ebenen so zu wählen haben, dass ihre Ausdrücke möglichst einfach werden; welcher Forderung allgemein nur dann Genüge geleistet wird, wenn wir sie als Parallelflächen der Axen einführen. Man nennt aber jede Ebene, welche durch eine gegebene Linie mit einer der Axen parallel gelegt wird, eine projicirende Ebene der Linie; und man begreift, dass es allemal für jede Linie so viele projicirende Ebenen geben wird, als das Axensystem Axen zählt, während doch immer zwei dieser Ebenen zur Bestimmung der Linie vollkommen ausreichend sein werden. Folglich wird jede gegebene Linie im Raume durch zwei ihrer projicirenden Ebenen bestimmt.

Da nun die einfachsten Formen für die Gleichungen dreier projicirenden Ebenen die folgenden sind:

$$\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\nu}=1,\ \frac{z}{\varrho}+\frac{x}{\sigma}=1,\ \frac{y}{\tau}+\frac{z}{v}=1$$

so wird auch im Allgemeinen eine Linie im Raume durch zwei solcher Gleichungen dargestellt werden. Ueberhaupt aber erfordert eine Linie im Raume stets zwei Gleichungen, und umgekehrt verweisen uns zwei Gleichungen, wie sie auch beschaffen sein mögen, allemal auf eine Linie, sobald sie beide auf ein und dasselbe Object im Raume bezogen werden.

§. 21. Linien, welche einer Coordinat-Ebene oder einer Axe parallel sind.

Wenn eine Linie einer der Coordinat-Ebenen parallel ist, so fallen zwei ihrer projicirenden Ebenen in eine Ebene, welche solcher Coordinat Ebene parallel liegt, während die dritte projicirende Ebene ihre allgemeine Lage behauptet. Demnach werden Gleichungen

wie $\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\nu}=1$ und $z=\varrho$

- $\frac{z}{\varrho}+\frac{x}{\sigma}=1$ - $y=\nu$

- $\frac{y}{\tau}+\frac{z}{v}=1$ - $x=\mu$

die Gleichungen dreier Linien, welche beziehendlich den Coordinat-Ebenen (xy), (zx) und (yz) parallel sind.

Wenn dagegen eine Linie zweien Coordinat-Ebenen, oder einer Axe parallel ist, so hat sie ebenfalls nur noch zwei projicirende Ebenen, welche Parallel-Ebenen der betreffenden beiden Coordinat-Ebenen sind; folglich werden

$y=\nu$ und $z=\varrho$

$z=\varrho$ - $x=\mu$

$x=\mu$ - $y=\nu$

die Gleichungen dreier Linien, welche beziehendlich der Axe der x, der y oder der z parallel sind.

Hieraus ergiebt sich denn auch, dass

$y=0$ und $z=0$ die Gleichungen der Axe der x

$z=0$ - $x=0$ - - - - - y

$y=0$ - $z=0$ - - - - - z

sind, wie diess auch daraus gefolgert werden kann, dass die Axe der x die Durchschnittslinie der beiden Coordinat-Ebenen (xy) und (zx) ist, u. s. w.

§. 22. Intersectionen einer Fläche.

Wir wollen die Durchschnittslinien einer gegebenen Fläche mit den Coordinat-Ebenen allgemein die Intersectionen der Fläche nennen, und solche als die Intersection (xy), (zx) und (yz) unterscheiden. Es ist nun leicht, für eine durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegebene Fläche die Gleichungen ihrer Intersectionen zu finden. Da nämlich eine jede derselben in eine der Coordinat-Ebenen fällt, so wird auch solche Coordinat-Ebene die eine ihrer projicirenden Ebenen sein. Folglich gilt zunächst

für die Intersection (xy) die Gleichung $z=0$
- - - (zx) - - $y=0$
- - - (yz) - - $x=0$

Da aber jede Intersection von lauter solchen Puncten gebildet wird, welche der gegebenen Fläche angehören, so muss auch für jede derselben die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Giltigkeit haben. Führt man nun in diese Gleichung successiv die Bedingungen $z=0$, $y=0$ und $x=0$ ein, so erhält man die Gleichungen der zweiten projicirenden Ebenen. Demnach ergeben sich:

für die Intersection (xy) die Gleichungen $z=0$ und $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
- - - (zx) - - $y=0$ „ $\frac{z}{c}+\frac{x}{a}=1$
- - - (yz) - - $x=0$ „ $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Anm. Da jede Intersection innerhalb ihrer Coordinat-Ebene als eine, in einer Ebene gegebene Linie vorgestellt werden kann, so lässt sich auch, bei solcher Vorstellungsweise, von der ersten Gleichung $z=0$ u. s. w. abstrahiren. Diess geschieht ganz gewöhnlich bei der Bestimmung der geraden Linie im Raume, indem man die Intersectionen ihrer projicirenden Ebenen, welche man die Projectionen der Linie nennt, als dergleichen in den Coordinat-Ebenen gegebene Linien einführt, und demgemäss sagt, dass die Linie durch zwei ihrer Projectionen bestimmt werde. Streng genommen gehört aber zur Vorstellung und Darstellung einer solchen Projection allemal noch eine Gleichung von der Form $x=0$, $y=0$ oder $x=0$, weil uns eine Gleichung im Raume stets auf eine Fläche verweist.

§. 23. Gleichung einer durch den Mittelpunct gehenden Linie.

Wenn eine Linie durch den Mittelpunct des Axensystems geht, so müssen natürlich ihre projicirenden Ebenen gleichfalls durch den Mittelpunct gehen; daher wird eine jede solche Linie allgemein durch zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\nu}=0,\ \frac{z}{\varrho}+\frac{x}{\sigma}=0,\ \frac{y}{\tau}+\frac{z}{v}=0$$

bestimmt werden, in welchen es nach §. 17 gar nicht mehr auf die absoluten Grössenwerthe, sondern lediglich auf das Verhältniss der Parameter μ, ν, ϱ u. s. w. ankommt.

Fällt die Linie in den Octanten der positiven Halbaxen, welche Lage wir im Allgemeinen voraussetzen können, so werden ihre Gleichungen nothwendig von der Form

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0,\ \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\sigma}=0,\ \frac{y}{\tau}-\frac{z}{v}=0$$

sein müssen, wie eine sehr einfache Betrachtung erkennen lässt.

Der Umstand aber, dass es für jede durch den Mittelpunct gehende Linie nur noch auf die Kenntniss des Verhältnisses der Parameter ihrer projicirenden Ebenen ankommt, verweist uns noch auf eine Folgerung, durch welche ihre Gleichungen in einen weit innigeren Zusammenhang gebracht werden. Diese Folgerung lässt sich in dem Satze aussprechen, dass es bei jeder solchen Linie nur noch auf die Kenntniss des Verhältnisses dreier Parameter ankommt, weil in ihren Gleichungen die auf dieselbe Axe bezüglichen Parameter stets mit demselben Werthe einzuführen sind.

Es folgt nämlich zuvörderst aus den vorstehenden Gleichungen, dass

$$\mu\varrho\tau = \nu\sigma v$$

Setzen wir nun in der zweiten Gleichung μ statt σ, und $\frac{\mu\varrho}{\sigma}$ statt ϱ, und setzen wir in der dritten Gleichung ν statt τ, und $\frac{\nu v}{\tau}$ statt v, so werden solche

$$\frac{z\sigma}{\mu\varrho}-\frac{x}{\mu}=0 \text{ und } \frac{y}{\nu}-\frac{\tau z}{\nu v}=0$$

Da nun $\frac{\mu\varrho}{\sigma}=\frac{\nu v}{\tau}$, so lassen sich, indem wir diese Grössen durch den einzigen Buchstaben ϱ ausdrücken*), die zweite und die dritte Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0 \text{ und } \frac{y}{\nu}-\frac{z}{\varrho}=0$$

womit sich denn das Resultat ergiebt, dass eine jede durch den Mittelpunct gehende Linie durch zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0,\ \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0,\ \frac{y}{\nu}-\frac{z}{\varrho}=0$$

dargestellt wird, in welchen die auf dieselben Axen bezüglichen Parameter stets gleichen Werth haben; ein eben so einfaches als folgenreiches Resultat.

Anm. Dieses Resultat lässt sich auch folgendermaassen darthun. Man denke sich durch den Mittelpunct eine in den Octanten der positiven Halbaxen fallende Linie, und in derselben irgend einen beliebigen Punct P, dessen Coordinaten μ, ν und ϱ sind, so werden die drei projicirenden Ebenen dieser Linie offenbar durch die drei Gleichungen

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0,\ \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0, \text{ und } \frac{y}{\nu}-\frac{z}{\varrho}=0$$

*) Dessen Bedeutung also von nun an eine andere ist, als vorher.

bestimmt, und zwar ganz allgemein, weil die Coordinaten μ', ν' und ϱ' irgend eines anderen Punctes P' nothwendig das Verhältniss von $\mu:\nu:\varrho$ haben müssen, und weil es bei einer jeden durch den Mittelpunct gehenden Linie lediglich auf das Verhältniss der Parameter ihrer projicirenden Ebenen ankommt.

§. 24. Parallelismus einer Fläche mit einer Linie.

Wenn uns eine Linie L gegeben ist, und die Forderung gestellt wird, dass irgend eine Fläche F dieser Linie parallel sei, so ist die Bedingungsgleichung sehr leicht zu finden, welche für die Parameter der Linie und der Fläche erfüllt sein muss, damit der geforderte Parallelismus wirklich Statt finde.

Aus dem vorausgesetzten Parallelismus der Linie und der Fläche folgt nämlich, dass, wenn wir beide auf den Mittelpunct des Axensystems transportiren, dann die Linie ganz in die Fläche fallen muss, oder dass dann alle Puncte der Linie zugleich Puncte der Fläche sein müssen.

Welche Gleichungen nun auch für die Linie L gegeben sein mögen, so werden doch (nach §. 23) die Gleichungen ihrer Centroparallele auf die Form

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0 \quad \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0$$

gebracht werden können. Die Gleichung der auf den Mittelpunct transportirten Fläche F aber wird allgemein durch

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

dargestellt werden. Da nun, bei ihrer jetzigen Lage, ein jeder Punct der Linie auch ein Punct der Fläche ist, so können wir die aus den Gleichungen der Linie folgenden Werthe von y und z in die Gleichung der Fläche setzen; dadurch werden aus der letzteren alle Coordinaten eliminirt, und es bleibt

$$\frac{\mu}{a}+\frac{\nu}{b}+\frac{\varrho}{c}=0$$

als die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Parametern einer gegebenen Linie L und den Parametern irgend einer Fläche F in Erfüllung gebracht sein muss, wenn die Fläche der Linie parallel sein soll.

Anm. Wie viele Flächen auch einer und derselben Linie parallel sein mögen, so wird doch für eine jede derselben die vorstehende Bedingungsgleichung gelten, welche für die Krystallographie eine grosse Wichtigkeit erlangt, weil an den Krystallen sehr häufig ganze Reihen von Flächen ausgebildet sind, die alle derselben Linie parallel liegen.

§. 25. Bedingung für den Parallelismus einer Fläche mit der Durchschnittslinie zweier gegebenen Flächen.

Sind uns irgend zwei Flächen F und F' gegeben, und wird verlangt, dass eine dritte Fläche F'' der Durchschnittslinie der beiden ersteren parallel sein soll, so finden wir die entsprechende Bedingung gerade so wie im vorhergehenden Paragraph, indem wir sowohl die Durchschnittslinie von F und

F', als auch die dritte Fläche F'' auf den Mittelpunct des Axensystems transportiren, worauf dann jene Linie nothwendig ganz in diese Fläche fallen muss.

Es seien nun die Flächen F und F' gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

so haben die Gleichungen ihrer Durchschnittslinie die in §. 19 zu Anfang stehenden Werthe. Wollen wir diese Linie auf den Mittelpunct transportiren, so sind nach §. 17 in ihren Gleichungen die, rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehenden Constanten $=0$ zu setzen; folglich werden diese Gleichungen

$$\frac{x}{M}-\frac{y}{N}=0 \text{ und } \frac{z}{R}-\frac{x}{M}=0$$

Die dritte Fläche aber wird, wenn wir sie gleichfalls auf den Mittelpunct transportiren, eine Gleichung von der Form

$$\frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}+\frac{z}{c''}=0$$

haben. Setzen wir in dieser Gleichung die, aus den beiden vorhergehenden folgenden Werthe von y und z, so folgt:

$$\frac{M}{a''}+\frac{N}{b''}+\frac{R}{c''}=0$$

oder, indem wir für M, N und R ihre in §. 19 stehenden Werthe einschreiben:

$$\frac{aa'(bc'-b'c)}{a''}+\frac{bb'(ca'-c'a)}{b''}+\frac{cc'(ab'-a'b)}{c''}=0$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist, die für eine Fläche F'' erfüllt sein muss, wenn solche der Durchschnittslinie zweier Flächen F und F' parallel sein soll.

Anm. Man sieht, dass dieses Resultat unmittelbar aus dem vorhergehenden Paragraph gefolgert werden kann, wenn man erwägt, dass hier die Grössen M, N und R ganz dieselbe Bedeutung haben, wie dort die Grössen μ, ν und ϱ.

§. 26. Bestimmung einer Fläche, welche zweien Linien parallel ist.

Wenn uns irgend zwei Linien L und L' gegeben sind, so wird es zwar zahllose Flächen geben, welche zugleich beiden diesen Linien parallel sind. Da jedoch alle diese Flächen auch unter einander selbst parallel sein müssen, so kommt es nur darauf an, das Verhältniss der Parameter aufzufinden, welches für irgend eine derselben Statt findet. Dieses Verhältniss ist nun aber für die durch den Mittelpunct gehende Fläche genau dasselbe, wie für alle übrigen; und diese Fläche bestimmt sich sehr leicht, indem wir beide Linien L und L' auf den Mittelpunct des Axensystems transportiren. In dieser Lage werden ihre Gleichungen:

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0 \text{ und } \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0,$$

$$\frac{x}{\mu'}-\frac{y}{\nu'}=0 \text{ und } \frac{z}{\varrho'}-\frac{x}{\mu'}=0.$$

Es sei nun

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, so gilt für sie (nach §. 24) vermöge des geforderten Parallelismus mit L die Bedingung:

$$\frac{\mu}{a}+\frac{\nu}{b}+\frac{\varrho}{c}=0,$$

und eben so, vermöge des geforderten Parallelismus mit L', die Bedingung

$$\frac{\mu'}{a}+\frac{\nu'}{b}+\frac{\varrho'}{c}=0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Bedingungsgleichungen successiv die Parameter a, b und c, so gelangt man leicht auf folgende drei Proportionen:

$$b : c = \mu\nu' - \mu'\nu : \varrho\mu' - \varrho'\mu$$
$$c : a = \nu\varrho' - \nu'\varrho : \mu\nu' - \mu'\nu$$
$$a : b = \varrho\mu' - \varrho'\mu : \nu\varrho' - \nu'\varrho$$

aus welchen dann weiter die Proportion

$$a:b:c=(\mu\nu'-\mu'\nu)(\varrho\mu'-\varrho'\mu):(\nu\varrho'-\nu'\varrho)(\mu\nu'-\mu'\nu):(\varrho\mu'-\varrho'\mu)(\nu\varrho'-\nu'\varrho)$$

gefolgert werden kann.

Da man nun immer einen der drei Parameter a, b und c mit einem willkürlichen Werthe annehmen kann, so sind auch die anderen beiden, jedenfalls aber alle drei nach ihrem Verhältnisse bekannt.

§. 27. Bestimmung einer Fläche, welche den beiden Durchschnittslinien zweier Flächenpaare parallel ist.

Im vorhergehenden Paragraph wurden die beiden Linien, denen die Fläche parallel sein sollte, als irgend zwei beliebige Linien vorausgesetzt. Wir können aber dasselbe Problem auch in der Weise auffassen, dass uns jede dieser Linien als die Durchschnittslinie irgend eines Flächenpaares gegeben ist; die Lösung der Aufgabe wird dann natürlich dieselbe, und nur die Form des Resultates eine etwas andere sein.

Es sind uns also gegeben irgend zwei Flächen F und F', deren Durchschnittslinie L heissen mag, und eben so irgend zwei andere Flächen F'' und F''' von solcher Lage, dass ihre Durchschnittslinie L' der L nicht parallel ist. Die Parameter der ersten Fläche F seien a, b und c, die gleichnamigen Parameter der übrigen drei Flächen schreiben wir mit einem, mit zwei und mit drei Accenten. Es wird nun verlangt, dass eine fünfte Fläche F_1, deren Parameter a_1, b_1 und c_1 heissen mögen, zugleich der L und der L' parallel sei.

Aus dem Parallelismus mit der Durchschnittslinie L folgt für die Fläche F_1 nach §. 25,

$$\frac{M}{a_1}+\frac{N}{b_1}+\frac{R}{c_1}=0$$

wobei $M=aa'(bc'-b'c)$, u. s. w.

Aus dem Parallelismus mit der Durchschnittslinie L' folgt eben so:

$$\frac{M'}{a_1}+\frac{N'}{b_1}+\frac{R'}{c_1}=0$$

wenn $M'=a''a'''(b''c'''-b'''c'')$, u. s. w.

Vergleicht man diese Bedingungen mit dem, was in §. 26 steht, so ergeben sich ohne Weiteres folgende Proportionen:

$$c_1 : a_1 = NR' - N'R : MN' - M'N$$
$$b_1 : c_1 = MN' - M'N : RM' - R'M$$
$$a_1 : b_1 = RM' - R'M : NR' - N'R$$

durch welche uns denn abermals das Verhältniss der Parameter a_1, b_1 und c_1 bekannt ist, weil wir immer einen derselben mit beliebigem Werthe einführen können.

B. Probleme, welche in verschiedenen Axensystemen eine verschiedene Lösung finden.

§. 28. Centrodistanz eines Punctes.

Wir wenden uns jetzt zu einigen von denjenigen Problemen, welche sich auf Lineargrössen und Winkelfunctionen beziehen, und nach dem besonderen Charakter des Axensystems sowohl eine verschiedene Behandlung erfordern, als auch auf verschiedene Resultate gelangen lassen. Dabei wollen wir jedoch nur zwei Arten von Axensystemen, nämlich das orthoëdrische und das triklinoëdrische System berücksichtigen, weil sich aus denen für dieses letztere System giltigen Resultaten sehr leicht auch diejenigen Resultate ableiten lassen, welche dem monoklinoëdrischen und diklinoëdrischen Axensysteme entsprechen.

Anm. Dasselbe gilt freilich auch für das orthoëdrische Axensystem, dessen besondere Berücksichtigung somit überflüssig erscheinen könnte. Desungeachtet ist es sehr vortheilhaft, ein jedes Problem zuvörderst für dieses einfachste und regelmässigste Axensystem in Betrachtung zu ziehen, weil man dadurch leichter zu einer klaren Einsicht in das Wesen der analytisch-geometrischen Behandlungsweise gelangt.

Das erste Problem, welches sich uns für gegebene Puncte im Raume darbietet, ist die Auffindung ihrer Centrodistanzen, oder ihrer Abstände vom Mittelpuncte des Axensystems. Es leuchtet von selbst ein, dass für irgend einen, durch seine Coordinaten x, y und z gegebenen Punct P diese Centrodistanz PM die, von dem Puncte selbst auslaufende Diagonale desjenigen Parallelepipedons ist, welches durch seine drei Coordinaten bestimmt wird. Die Grösse dieser Diagonale wird aber verschieden ausfallen, und auf etwas verschiedene Weise zu berechnen sein, je nachdem uns ein rechtwinkeliges oder ein schiefwinkeliges Axensystem gegeben ist.

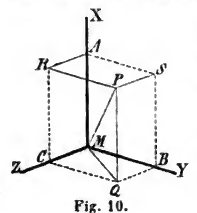


Fig. 10.

I. *Centrodistanz eines Punctes im orthoëdrischen Axensysteme.*

Ist das Axensystem ein orthoëdrisches, so ist das Parallelepipedon rechtwinkelig. Ziehen wir die MQ, so erhalten wir ein rechtwinkeliges Dreieck

MCQ, dessen beide Katheten $QC = y$, und $MC = z$ sind; folglich wird das Quadrat der Hypotenuse $MQ = y^2 + z^2$. Eben so ist aber auch PQM ein rechtwinkeliges Dreieck über den beiden Katheten $PQ = x$, und MQ; daher wird PM, oder die gesuchte Centrodistanz

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

welcher Ausdruck in allen Fällen gilt, der Punct P mag nun in diesem oder in jenem Octanten liegen.

II. *Centrodistanz eines Punctes im triklinoëdrischen Axensysteme.*

Es ist ein bekannter Satz der Stereometrie, dass in jedem Parallelepipedon irgend eine der Diagonalen gleich ist der Summe der Projectionen der drei anliegenden Kanten auf sie selbst.

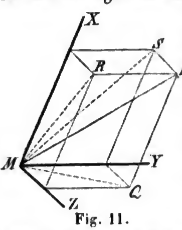


Fig. 11.

Es sei nun $MXYZ$ der Octant der positiven Halbaxen, in welchem ein Punct P durch seine Coordinaten $PQ = x$, $PR = y$ und $PS = z$ gegeben ist, so wird PM, oder die gesuchte Centrodistanz, diejenige Diagonale D des den Punct bestimmenden Parallelepipedons, an welcher dessen drei Coordinaten PQ, PR und PS unmittelbar anliegen. Bezeichnen wir also

mit ξ den Neigungswinkel der PM gegen PQ oder x
- v - - - - - PR - y
- ζ - - - - - PS - z

so folgt aus dem erwähnten Satze der Stereometrie, dass

$$PM = PQ \cdot \cos\xi + PR \cdot \cos v + PS \cdot \cos\zeta$$

oder $$D = x\cos\xi + y\cos v + z\cos\zeta$$

sein muss; denn die rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehenden Grössen sind ja die Projectionen der drei, an der Diagonale PM anliegenden Kanten PQ, PR und PS auf sie selbst. Es handelt sich daher nur noch darum, die drei Winkel ξ, v und ζ zu finden. Zu dem Ende ziehe man in den drei Coordinat-Ebenen die drei Linien MQ, MR und MS, so wird, wenn wir wie in §. 12 mit α, β und γ die den Axen der x, y und z gegenüberliegenden Mittelpunctswinkel oder Axenwinkel bezeichnen:

$$MQ = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha} = Q$$
$$MR = \sqrt{z^2 + x^2 + 2zx\cos\beta} = R$$
$$MS = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = S$$

In den drei Dreiecken PMQ, PMR und PMS lassen sich nun, indem wir $PM = D$ setzen, die Cosinus der drei an P anliegenden Winkel, welche keine anderen, als die Winkel ξ, v und ζ sind, durch folgende Ausdrücke darstellen:

$$\cos\xi = \frac{D^2 + x^2 - Q^2}{2Dx}$$
$$\cos v = \frac{D^2 + y^2 - R^2}{2Dy}$$
$$\cos\zeta = \frac{D^2 + z^2 - S^2}{2Dz}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen beziehendlich mit $2Dx$, $2Dy$ und $2Dz$, und addirt sie hierauf, so folgt:

$$2D^2 = 3D^2 + x^2 + y^2 + z^2 - Q^2 - R^2 - S^2$$

daher

$$D = \sqrt{Q^2 + R^2 + S^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

und endlich, nach Einsetzung der Werthe von Q, R und S,

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma}$$

als der gesuchte Werth der Centrodistanz des, durch seine drei Coordinaten gegebenen Punctes P; ein Werth, bei dessen Benutzung natürlich darauf Rücksicht zu nehmen ist, dass die Formel voraussetzt, der Punct P liege im Octanten der positiven Halbaxen, und die Winkel α, β und γ seien in diesem Octanten lauter spitze Winkel. Sollte also einer dieser Winkel ein stumpfer sein, so wird der betreffende Cosinus negativ zu nehmen sein, und sollte der Punct in einem anderen Octanten liegen, so werden Aenderungen der Vorzeichen sowohl für gewisse Cosinus, als auch für gewisse Coordinaten eintreten müssen.

Anm. Dass in diesem allgemeinsten Ausdrucke für die Centrodistanz eines Punctes auch der vorhergehende, für ein orthoëdrisches Axensystem gefundene Ausdruck enthalten sei, dies ist einleuchtend, weil in diesem Axensysteme $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ wird.

§. 29. Distanz oder Intervall zwei Puncte.

Sind uns zwei Puncte P und P' gegeben, so erkennen wir durch eine sehr einfache Betrachtung, dass ihre gegenseitige Distanz oder ihr Intervall die Diagonale desjenigen Parallelepipedons ist, dessen drei Kanten von den drei Differenzen der gleichnamigen Coordinaten beider Puncte gebildet werden.

Man überzeugt sich besonders leicht von der Richtigkeit dieses Satzes, wenn man sich beide Puncte in einem und demselben Octanten, und für den einen derselben lauter grössere Coordinaten gegeben denkt, als für den anderen. Es hat aber der Satz eine ganz allgemeine Giltigkeit, wenn man, bei anderer Lage der Puncte, und bei anderen Verhältnissen ihrer Coordinatwerthe, nur auf die Vorzeichen der letzteren achtet, durch welche sich in gewissen Fällen die Differenz der Coordinaten als die Summe derselben, oder auch als eine negative Grösse herausstellen wird.

Nehmen wir nun an, um zunächst jeder Berücksichtigung der Vorzeichen überhoben zu bleiben, dass beide Puncte im Octanten der positiven Halbaxen liegen, und dass die Coordinaten des Punctes P grösser sind, als die des Punctes P', so ergiebt sich die Lösung des Problems, die Distanz oder das Intervall beider Puncte zu bestimmen, unmittelbar aus dem vorhergehenden Paragraph, in dessen Resultaten wir nur statt x, y und z die Differenzen $x-x'$, $y-y'$ und $z-z'$ einzusetzen brauchen, weil diess ja im gegenwärtigen Falle die an der gesuchten Diagonale des Parallelepipedons unmittelbar anliegenden Kanten sind.

I. *Distanz zweier Puncte im orthoëdrischen Axensysteme.*

Ist also das Axensystem ein orthoëdrisches, so wird die Distanz oder das Intervall beider Puncte:

$$J=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

welcher Ausdruck ganz allgemeine Giltigkeit hat, sobald nur die Vorzeichen der Coordinaten berücksichtigt werden, wie sich solche nach Maassgabe der Lage der Puncte in diesem oder jenem Octanten bestimmen.

II. *Distanz zweier Puncte im triklinoëdrischen Axensysteme.*

Ist das Axensystem ein triklinoëdrisches, so wird die Distanz beider Puncte:

$$J=\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')+(z-z')^2+2(y-y')(z-z')\cos\alpha+ 2(z-z')(x-x')\cos\beta+2(x-x')(y-y')\cos\gamma]}$$

wobei in jedem besonderen Falle nicht nur auf die Vorzeichen der Coordinaten, sondern auch darauf Rücksicht zu nehmen ist, welche von den Winkeln α, β und γ in dem Octanten der positiven Halbaxen als spitze oder als stumpfe Winkel erscheinen, weil der Ausdruck von J in seiner vorstehenden Form voraussetzt, dass beide Puncte im Octanten der positiven Halbaxen liegen, und dass in demselben Octanten alle drei Winkel spitze Winkel sind.

§. 30. Neigungswinkel zweier Linien.

Sind uns im Raume irgend zwei Linien L und L' gegeben, so ist eines der wichtigsten Probleme die Bestimmung ihres Neigungswinkels W. Denn wenn auch beide Linien gar nicht zum gegenseitigen Durchschnitte kommen, so werden sie doch immer mit einander einen gewissen Winkel bilden. Nun ist es aber von selbst einleuchtend, dass dieser Winkel gar nicht von der absoluten, sondern lediglich von der relativen Lage der Linien abhängt, und dass er unverändert bleibt, wenn wir eine jede derselben in einer sich selbst parallelen Lage auf den Mittelpunct des Axensystems transportiren. Wie also auch die absolute Lage beider Linien beschaffen sein mag, so sind wir berechtigt, bei der Bestimmung ihres Neigungswinkels statt ihrer selbst ihre beiden Centroparallelen einzuführen; und welche Gleichungen uns auch für L und L' gegeben sein mögen, so werden solche immer auf die Form der Gleichungen einer durch den Mittelpunct gehenden Linie zu bringen sein.

Es seien nun die Gleichungen der Centroparallele von L

$$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0 \text{ und } \frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0$$

und eben so die Gleichungen der Centroparallele von L'

$$\frac{x}{p'}-\frac{y}{q'}=0 \text{ und } \frac{z}{s'}-\frac{x}{p'}=0$$

Da wir den Winkel W nicht unmittelbar, sondern nur in einer seiner trigonometrischen Functionen bestimmen können, so wollen wir den Cosinus desselben aufsuchen.

Zu dem Ende wählen wir in der Centroparallele von L irgend einen beliebigen Punct P, dessen Coordinaten x, y und z, sowie in der Centroparallele von L' irgend einen beliebigen Punct P', dessen Coordinaten wir mit x', y' und z' bezeichnen wollen, um sie von denen des ersteren Punctes zu unterscheiden. Ziehen wir nun die Verbindungslinie PP' beider Puncte, so entsteht ein Dreieck $PP'M$, in welchem der an M anliegende Winkel PMP' der gesuchte Neigungswinkel W beider Centroparallelen und folglich auch beider Linien ist. Hieraus ergiebt sich

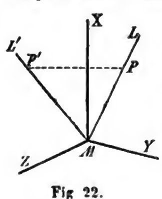


Fig 22.

$$\cos W = \frac{\square PM + \square P'M - \square PP'}{2PM \,.\, P'M}$$

oder, indem wir die für die Centrodistanzen und für das Intervall beider Puncte gebrauchten Buchstaben einführen:

$$\cos W = \frac{D^2 + D'^2 - J^2}{2DD'}$$

Bis hierher ist die Lösung des Problems dieselbe, welche Beschaffenheit auch das Axensystem haben möge; es handelt sich nun aber darum, für D, D' und J ihre Werthe einzusetzen, welche allerdings nach Maassgabe des Axensystems verschieden sind.

I. *Neigungswinkel zweier Linien im orthoëdrischen Axensysteme.*

Wenn das Axensystem ein orthoëdrisches ist, so folgt aus vorstehendem Ausdrucke von $\cos W$, indem man für D, D' und J ihre Werthe

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$D' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$
$$J = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

einsetzt, nach den gehörigen Reductionen,

$$\cos W = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Substituirt man hierin die aus den obigen Gleichungen der Centroparallelen von L und L' sich ergebenden Werthe von y und z, von y' und z', so eliminiren sich alle Coordinaten, und es bleibt

$$\cos W = \frac{pp' + qq' + ss'}{\sqrt{p^2 + q^2 + s^2}\,\sqrt{p'^2 + q'^2 + s'^2}}$$

welches der gesuchte Werth von $\cos W$ in einem orthoëdrischen Axensysteme ist.

Hieraus ergiebt sich für die Rechtwinkeligkeit zweier Linien die Bedingungsgleichung $pp' + qq' + ss' = 0$.

II. *Neigungswinkel zweier Linien im triklinoëdrischen Axensysteme.*

Setzen wir in dem oben vor I stehenden Ausdrucke von $\cos W$

$$D = \sqrt{[x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma]}$$
$$D' = \sqrt{[x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\alpha+2z'x'\cos\beta+2x'y'\cos\gamma]}$$
$$J = \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+2(y-y')(z-z')\cos\alpha+2(z-z')(x-x')\cos\beta+2(x-x')(y-y')\cos\gamma]}$$

so ergiebt sich, nach den gehörigen Reductionen, zunächst $\cos W$

$$= \frac{xx'+yy'+zz'+(yz'+y'z)\cos\alpha+(zx'+z'x)\cos\beta+(xy'+x'y)\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\alpha+2z'x'\cos\beta+2x'y'\cos\gamma}}$$

Substituirt man hierin abermals die aus den obigen Gleichungen der Centroparallelen folgenden Werthe von y und z, von y' und z', so erhält man endlich: $\cos W$

$$= \frac{pp'+qq'+ss'+(qs'+q's)\cos\alpha+(sp'+s'p)\cos\beta+(pq'+p'q)\cos\gamma}{\sqrt{p^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2sp\cos\beta+2pq\cos\gamma}\,\sqrt{p'^2+q'^2+s'^2+2q's'\cos\alpha+2s'p'\cos\beta+2p'q'\cos\gamma}}$$

Für die Rechtwinkeligkeit zweier Linien muss daher die Bedingungsgleichung

$$pp'+qq'+ss'+(qs'+q's)\cos\alpha + (sp'+s'p)\cos\beta + (pq'+p'q)\cos\gamma = 0$$

in Erfüllung gebracht sein.

§. 31. Centronormale einer gegebenen Fläche.

In der theoretischen Krystallographie spielen die Centronormalen der Flächen, d. h. die aus dem Mittelpuncte des Axensystems auf die Krystallflächen gezogenen oder gedachten Normalen eine sehr wichtige Rolle; auch bedürfen wir dieser Linien bei der Bestimmung des Neigungswinkels zweier Flächen; es ist daher nothwendig, für eine gegebene Fläche F die Gleichungen ihrer Centronormale N aufzusuchen.

Es sei die Gleichung der gegebenen Fläche wie gewöhnlich

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

so wird ihre Centronormale, als eine durch den Mittelpunct gehende Linie, im Allgemeinen durch zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0,\quad \frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0,\quad \frac{y}{q}-\frac{z}{s}=0$$

dargestellt werden. Zur Bestimmung der Werthe von p, q und s gelangt man nun aber durch folgende Betrachtung.

Da die gesuchte Linie auf der Fläche normal sein soll, so muss sie es auch auf allen in dieser Fläche liegenden Linien, folglich auch auf den Intersectionen der Fläche sein. Es werden aber diese Intersectionen nach §. 22 durch folgende Gleichungen bestimmt:

Die Intersection (yz) durch $x=0$ und $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,

- - (zx) - $y=0$ und $\frac{z}{c}+\frac{x}{a}=1$,

- - (xy) - $z=0$ und $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Für jede dieser Intersectionen und für die gesuchte Normale muss also die Bedingung der Rechtwinkeligkeit erfüllt sein, welche wir in §. 30 ken-

nen gelernt haben. Da jedoch diese Bedingung nach Maassgabe des Axensystems eine verschiedene ist, so haben wir auch die beiden Fälle des orthoëdrischen und triklinoëdrischen Axensystems besonders in Betrachtung zu ziehen.

I. *Centronormale einer Fläche im orthoëdrischen Axensysteme.*

In einem orthoëdrischen Axensysteme sind nach §. 30 zwei Linien auf einander rechtwinkelig, wenn für ihre Parameter die Gleichung

$$pp' + qq' + ss' = 0$$

erfüllt ist. Lassen wir nun die Parameter p, q und s als die der gesuchten Normale gelten, so werden wir für die drei Parameter p', q' und s' successiv diejenigen Werthe einzuführen haben, welche in den obenstehenden Gleichungen der drei Intersectionen indicirt sind; diese werden:

für die Intersection $(yz) : p' = 0,\ q' = b,\ s' = -c$

- - - $(zx) : p' = -a,\ q' = 0,\ s' = c$

- - - $(xy) : p' = a,\ q' = -b,\ s' = 0$

woraus sich denn für die Rechtwinkeligkeit der gesuchten Normale mit diesen drei Intersectionen die Bedingungen:

$$qb - sc = 0,\ pa - sc = 0,\ \text{und}\ pa - qb = 0$$

ergeben. Da wir nun für die Normale, als eine durch den Mittelpunct gehende Linie, nur die Verhältnisswerthe ihrer Parameter p, q und s zu kennen brauchen, und da diese in den vorstehenden Bedingungsgleichungen gegeben sind, so werden in einem rechtwinkeligen Axensysteme

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0,\ \frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0,\ \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

die Gleichungen der Centronormale einer, im Octanten der positiven Halbaxen mit den Parametern a, b und c gegebenen Fläche. Hat die Fläche eine andere Lage, so werden sich die Vorzeichen dieser oder jener Parameter ändern.

Anm. Wollen wir diese Gleichungen so schreiben, wie es eigentlich für eine durch den Mittelpunct gehende Linie gefordert wird (§. 23), dass nämlich die auf dieselbe Axe bezüglichen Parameter überall denselben Werth haben, so müssen wir die erste mit c, die zweite mit b, und die dritte mit a dividiren; demnach stellen

$$\frac{x}{bc} - \frac{y}{ca} = 0,\ \frac{z}{ab} - \frac{x}{bc} = 0,\ \text{und}\ \frac{y}{ca} - \frac{z}{ab} = 0$$

die Gleichungen der Normale in ihrer wahren und eigentlichen Form dar, auf welche bei manchen Problemen Rücksicht zu nehmen ist.

II. *Centronormale einer Fläche im triklinoëdrischen Axensysteme.*

In einem triklinoëdrischen Axensysteme ist nach §. 30 die allgemeine Bedingungsgleichung für die Rechtwinkeligkeit zweier Linien:

$$pp' + qq' + ss' + (qs' + q's)\cos\alpha + (sp' + s'p)\cos\beta + (pq' + p'q)\cos\gamma = 0$$

Nehmen wir hierin abermals p, q und s als die Parameter der gesuchten Normale N, sowie p', q' und s' successiv als die Parameter der drei Intersectio-

nen von F, wie solche unter I aufgeführt sind, so erhalten wir als die Bedingungsgleichungen ihrer Rechtwinkeligkeit gegen die Normale

für Intersection (yz), $(b-c\cos\alpha)p-(c-b\cos\alpha)s+(b\cos\gamma-c\cos\beta)p=0$

- - (zx), $(c-a\cos\beta)s-(a-c\cos\beta)p+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)q=0$

- - (xy), $(a-b\cos\gamma)p-(b-a\cos\gamma)q+(a\cos\beta-b\cos\alpha)s=0$

Von diesen drei Gleichungen sind je zwei hinreichend, um die Verhältnisswerthe von p, q und s zu bestimmen, auf welche es ja lediglich ankommt. Wählen wir z. B. die beiden Gleichungen für die Intersectionen (yz) und (zx), multipliciren wir die erste in allen ihren Gliedern mit $(c-a\cos\beta)$, die zweite in allen ihren Gliedern mit $(c-b\cos\alpha)$, und addiren wir sie dann, so findet sich das Verhältniss von $p:q$; und durch ein ähnliches Verfahren gelangt man auf das Verhältniss von p und s, oder auch von q und s. Wird diese Rechnung ausgeführt, so folgt endlich nach allen Reductionen:

$$p=bc\sin^2\alpha-ab(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)-ca(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)$$
$$q=ca\sin^2\beta-bc(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)-ab(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)$$
$$s=ab\sin^2\gamma-ca(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)-bc(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)$$

welches die Parameter der gesuchten Centronormale einer im Octanten der positiven Halbaxen durch a, b und c gegebenen Fläche sind, wobei noch vorausgesetzt wird, dass die drei Winkel α, β und γ in solchem Octanten als spitze Winkel erscheinen.

Wir können diese Werthe noch etwas einfacher ausdrücken, wenn wir die zu Ende von §. 12 stehenden Relationen benutzen, welche zwischen den drei Axenwinkeln α, β und γ und den, immer als bekannt vorauszusetzenden Neigungswinkeln A, B und C der Coordinat-Ebenen Statt finden; setzen wir dabei, der leichteren Uebersicht wegen,

$$\cos A\sin\beta\sin\gamma=A'$$
$$\cos B\sin\gamma\sin\alpha=B'$$
$$\cos C\sin\alpha\sin\beta=C'$$

so gelangen wir für p, q und s auf die nachfolgenden Ausdrücke:

$$p=bc\sin^2\alpha-abB'-caC'$$
$$q=ca\sin^2\beta-bcC'-abA'$$
$$s=ab\sin^2\gamma-caA'-bcB'.$$

Anm. Werden die sämmtlichen Winkel $=90^0$ gesetzt, so führen uns diese Werthe auf die Proportion $p:q:s=bc:ca:ab$, aus welcher sich die obigen sehr einfachen Gleichungen der Centronormale in einem rechtwinkeligen Axensysteme ergeben.

§. 32. Neigungswinkel zweier Flächen in einem orthoëdrischen Axensysteme.

Wenn uns zwei Flächen F und F' gegeben sind, so ist, nächst der in §. 19 gegebenen Bestimmung ihrer Durchschnittslinie, die wichtigste Aufgabe die Bestimmung ihres Neigungswinkels. Das Verfahren, dessen wir uns dabei bedienen, ist ganz ähnlich demjenigen, welches in §. 8 befolgt worden ist: d. h. wir suchen den Neigungswinkel W der Centronormalen beider Flächen, welcher ja dem Winkel der Flächen selbst gleich sein muss. Die

Lösung des Problems ist daher auch verschieden nach Maassgabe des Axensystems, und wird zunächst für ein orthoëdrisches Axensystem folgendermaassen zu geben sein.

Es seien die Gleichungen von F und F'

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ und } \frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{c'}=1$$

so werden nach §. 31 die Gleichungen der Centronormale von F:

$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0 \text{ und } \frac{z}{a}-\frac{x}{c}=0$$

und eben so die Gleichungen der Centronormale von F':

$$\frac{x'}{b'}-\frac{y'}{a'}=0 \text{ und } \frac{z'}{a'}-\frac{x'}{c'}=0$$

Verfahren wir nun eben so wie in §. 30, d. h. wählen wir in der ersten Normale irgend einen Punct P, in der zweiten Normale irgend einen Punct P', und betrachten wir das von diesen beiden Puncten und von dem Mittelpuncte M des Axensystems bestimmte Dreieck $PP'M$, in welchem der der Seite PP' gegenüberliegende Winkel der gesuchte Neigungswinkel W ist, so erhalten wir abermals:

$$\cos W=\frac{D^2+D'^2-J^2}{2DD'}$$

oder, nach Substitution der Werthe von D, D' und J,

$$\cos W=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Setzen wir endlich in diesem Ausdrucke für y und z, für y' und z' ihre, aus den Gleichungen der beiden Centronormalen folgenden Werthe, so ergiebt sich endlich

$$\cos W=-\frac{\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}}}$$

$$\text{oder } \cos W=-\frac{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}\sqrt{a'^2b'^2+c'^2a'^2+b'^2c'^2}}$$

welcher Ausdruck deshalb negativ zu nehmen ist, weil es sich gewöhnlich um den stumpfen Neigungswinkel beider Flächen, oder um denjenigen Winkel handelt, innerhalb dessen der Mittelpunct des Axensystems gelegen ist.

Für die Rechtwinkeligkeit zweier Flächen folgt hieraus die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}=0$$

$$\text{oder auch } aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'=0$$

wogegen für den Parallelismus derselben die Proportion $a':b':c'=a:b:c$ erfüllt sein muss. Da nächst dem Cosinus des Neigungswinkels W zweier Flächen auch die Tangente desselben eine wichtige Function bildet, so

setzen wir noch den Werth derselben her, wie er leicht aus dem Werthe von $\cos W$ gefolgert werden kann; es ist

$$\tang W = \frac{\sqrt{a^2a'^2(bc'-b'c)^2+b^2b'^2(ca'-c'a)^2+c^2c'^2(ab'-a'b)^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

oder auch, indem man die in §. 18 gebrauchte Schreibart anwendet:

$$\tang W = \frac{\sqrt{M^2+N^2+R^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

Anm. Es ist nun sehr leicht, aus diesen allgemeinen Ausdrücken für $\cos W$ oder $\tang W$ die Neigungswinkel irgend einer Fläche F gegen die drei Coordinat-Ebenen zu bestimmen. Man braucht zu dem Ende nur die zweite Fläche F' successiv als die Coordinat-Ebene (yz), (zx) und (xy) einzuführen. Bezeichnen wir die Neigungswinkel der Fläche F gegen diese Coordinat-Ebenen mit X, Y und Z, so wird successiv a', b' und $c' = 0$ zu setzen sein, und man findet daher:

$$\cos X = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$$

$$\cos Y = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$$

$$\cos Z = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$$

woraus sich die Proportion:

$$\cos X : \cos Y : \cos Z = bc : ca : ab$$

und die Verhältnisse:

$$\cos X : \cos Y = b : a$$
$$\cos Z : \cos X = a : c$$
$$\cos Y : \cos Z = c : b$$

ergeben, welche aus einem dieser Winkel sehr leicht zur Bestimmung der beiden anderen gelangen lassen.

§. 33. Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen im triklinoëdrischen Axensysteme.

In einem triklinoëdrischen Axensysteme gilt zwar ebenfalls für den Neigungswinkel zweier Flächen der im vorhergehenden Paragraph stehende allgemeine Ausdruck:

$$\cos W = \frac{D^2+D'^2-J^2}{2DD'}$$

allein die Grössen D, D' und J erhalten hier andere Werthe, weil sich ja nach §. 31, II die Parameter p, q und s, p', q' und s' der beiden Centronormalen ganz anders bestimmen, als im orthoëdrischen Axensysteme.

Die Gleichungen der beiden Flächen F und F' seien abermals:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'} = 1$$

Nennen wir ihre Centronormalen N und N', und setzen wir, die Gleichungen seien:

$$\text{für } N: \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = 0 \text{ und } \frac{z}{s} - \frac{x}{p} = 0$$

$$\text{für } N': \frac{x}{p'} - \frac{y}{q'} = 0 \text{ und } \frac{z}{s'} - \frac{x}{p'} = 0$$

so wird nach §. 31, II in diesen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\text{für } N:\ & p = bc\sin^2\alpha - abB' - caC' \\
& q = ca\sin^2\beta - bcC' - abA' \\
& s = ab\sin^2\gamma - caA' - bcB' \\
\text{für } N':\ & p' = b'c'\sin^2\alpha - a'b'B' - c'a'C' \\
& q' = c'a'\sin^2\beta - b'c'C' - a'b'A' \\
& s' = a'b'\sin^2\gamma - c'a'A' - b'c'B'
\end{aligned}$$

Der Neigungswinkel beider Normalen bestimmt sich aber aus ihren vorstehenden Gleichungen, nach §. 30, II, durch $\cos W =$

$$\frac{pp' + qq' + ss' + (qs' + q's)\cos\alpha + (sp' + s'p)\cos\beta + (pq' + p'q)\cos\gamma}{\sqrt{p^2 + q^2 + s^2 + 2qs\cos\alpha + 2sp\cos\beta + 2pq\cos\gamma}\sqrt{p'^2 + q'^2 + s'^2 + 2q's'\cos\alpha + 2s'p'\cos\beta + 2p'q'\cos\gamma}}$$

oder $\cos W = \frac{H}{\sqrt{KK'}}$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für p, q und s, p', q' und s' ihre vorhin angegebenen Werthe, so gelangt man auf den eigentlich gesuchten Werth von $\cos W$. Es würde jedoch diese Substitution eine ziemlich weitläufige Rechnung erfordern, wenn man dabei den Zähler und Nenner von $\cos W$ ohne Weiteres in ihrer vorstehenden Form zu Grunde legen wollte. Weit schneller gelangt man zum Ziele, wenn man vorher den ganzen Ausdruck von $\cos W$ einer Reduction unterwirft, welche sich dadurch ergiebt, dass man sowohl den Zähler H, als auch die beiden Factoren K und K' des Nenners in einer anderen Weise schreibt. Es ist nämlich:

$$H = p(p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta) + q(q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma) + s(s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha)$$

oder auch, auf ähnliche Art ausgedrückt:

$$H = p'(p + q\cos\gamma + s\cos\beta) + q'(q + s\cos\alpha + p\cos\gamma) + s'(s + p\cos\beta + q\cos\alpha)$$

und es ist eben so:

$$K = p(p + q\cos\gamma + s\cos\beta) + q(q + s\cos\alpha + p\cos\gamma) + s(s + p\cos\beta + q\cos\alpha)$$

$$K' = p'(p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta) + q'(q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma) + s'(s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha)$$

Sucht man nun zuvörderst die eingeklammerten Grössen durch Substitution der obigen Werthe von p, q, s, p', q' und s' zu bestimmen, so findet man, wenn

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = E$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
p + q\cos\gamma + s\cos\beta &= bcE \\
q + s\cos\alpha + p\cos\gamma &= caE \\
s + p\cos\beta + q\cos\alpha &= abE \\
p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta &= b'c'E \\
q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma &= c'a'E \\
s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha &= a'b'E
\end{aligned}$$

woraus sich denn ergiebt, dass

$$H = (pb'c' + qc'a' + sa'b')E, \text{ oder auch } = (p'bc + q'ca + s'ab)E$$
$$K = (pbc + qca + sab)E$$
$$K' = (p'b'c' + q'c'a' + s'a'b')E$$

Demgemäss reducirt sich der obige Ausdruck von $\cos W$ auf:

$$\left.\begin{aligned} \cos W &= \frac{pb'c' + qc'a' + sa'b'}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}} \\ \text{oder auch } \cos W &= \frac{p'bc + q'ca + s'ab}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}} \end{aligned}\right\} = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\mathfrak{K}\mathfrak{K}'}}$$

Führt man nun in den einen oder anderen dieser Ausdrücke abermals die oben stehenden Werthe von p, q, s, p', q' und s' ein, so wird:

$$\mathfrak{H} = bb'cc'\sin^2\alpha + cc'aa'\sin^2\beta + aa'bb'\sin^2\gamma - aa'(bc' + b'c)A' - bb'(ca' + c'a)B' - cc'(ab' + a'b)C'$$
$$\mathfrak{K} = b^2c^2\sin^2\alpha + c^2a^2\sin^2\beta + a^2b^2\sin^2\gamma - 2a^2bcA' - 2b^2caB' - 2c^2abC'$$
$$\mathfrak{K}' = b'^2c'^2\sin^2\alpha + c'^2a'^2\sin^2\beta + a'^2b'^2\sin^2\gamma - 2a'^2b'c'A' - 2b'^2c'a'B' - 2c'^2a'b'C'$$

in welchen Formeln man nur noch die zu Ende von §. 31 stehenden Werthe von A', B' und C' zu substituiren braucht, um den definitiven Ausdruck für $\cos W$, als eine Function der Parameter beider Flächen F und F' und der sechs Grundwinkel des Axensystemes zu erhalten.

Man ersieht aus diesem Ausdrucke für $\cos W$, dass die Berechnung von Winkeln nach den Formeln der analytischen Geometrie in den schiefwinkeligen Axensystemen nicht vortheilhaft ist, weil sie meist auf sehr weitläufige Rechnungen führt, während man durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie weit kürzer zum Ziele gelangt.

Desungeachtet hat der allgemeine Ausdruck von $\cos W$ den Vortheil, dass er uns in allen Fällen sofort auf das Endresultat gelangen, insbesondere aber, dass er uns die Bedingungen erkennen lässt, welche für die geforderte Lage irgend gegebener oder auch gesuchter Flächen erfüllt sein müssen. Für die theoretische Krystallographie ist er daher gar nicht zu entbehren.

§. 34. Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen im triklinoëdrischen Axensysteme.

Aus dem zweifachen Ausdrucke, auf welchen wir in §. 33 für den Cosinus des Neigungswinkels W zweier Flächen F und F' gelangt sind, nämlich aus

$$\cos W = \frac{pb'c' + qc'a' + sa'b'}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}}$$

$$\text{und } \cos W = \frac{p'bc + q'ca + s'ab}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}}$$

gelangen wir nun sehr leicht zu der Bestimmung von $\cos^2 W$; indem wir nämlich diese beiden Ausdrücke mit einander multipliciren, ergiebt sich:

$$\cos^2 W = \frac{(pb'c' + qc'a' + sa'b')\;(p'bc + q'ca + s'ab)}{(pbc + qca + sab)\;(p'b'c' + q'c'a' + s'a'b')}$$

woraus sich denn ebenfalls mit Leichtigkeit der Sinus, und endlich die Tangente von W mit folgendem Werthe ergiebt:

$$\tang W = \frac{\sqrt{[aa'(bc'-b'c)(q's-qs')+bb'(ca'-c'a)(s'p-sp')+cc'(ab'-a'b)(p'q-pq')]}}{pb'c'+qc'a'+sa'b'}$$

Dieses ist ein einfacher und übersichtlicher Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen, in welchem solche als eine Function der Parameter beider Flächen und der Parameter ihrer beiden Centronormalen erscheint. Man braucht nur noch für p, q, s, p', q' und s' ihre zu Anfang von §. 33 stehenden Werthe zu substituiren, um diesen Ausdruck so umzugestalten, dass er sich auch als eine Function der Winkel A, B, C, α, β und γ darstellt. Führt man diese Substitution aus, so gelangt man, nach den erforderlichen Reductionen und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\sin C \sin\alpha \sin\beta = \sin B \sin\gamma \sin\alpha = \sin A \sin\beta \sin\gamma$ ist, zuvörderst auf die Werthe von

$$q's-qs' = \sin^2 A \sin^2\beta \sin^2\gamma [aa'(bc'-b'c)+bb'(ca'-c'a)\cos\gamma+cc'(ab'-a'b)\cos\beta]$$
$$s'p-sp' = \sin^2 B \sin^2\gamma \sin^2\alpha [bb'(ca'-c'a)+cc'(ab'-a'b)\cos\alpha+aa'(bc'-b'c)\cos\gamma]$$
$$p'q-pq' = \sin^2 C \sin^2\alpha \sin^2\beta [cc'(ab'-a'b)+aa'(bc'-b'c)\cos\beta+bb'(ca'-c'a)\cos\alpha]$$

und dann auf folgenden definitiven Ausdruck: $\tang W$

$$= \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{(M^2+N^2+R^2+2MN\cos\gamma+2RM\cos\beta+2NR\cos\alpha)}}{aa'bb'\sin^2\gamma+cc'aa'\sin^2\beta+bb'cc'\sin^2\alpha-aa'(bc'+b'c)A'-bb'(ca'+c'a)B'-cc'(ab'+a'b)C'}$$

oder $\tang W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}}{Q}$

in welchem, der besseren Uebersicht wegen, wiederum

$$aa'(bc'-b'c) = M$$
$$bb'(ca'-c'a) = N$$
$$cc'(ab'-a'b) = R$$

und, wie oben in §. 31,

$$\cos A \sin\beta \sin\gamma = A'$$
$$\cos B \sin\gamma \sin\alpha = B'$$
$$\cos C \sin\alpha \sin\beta = C'$$

gesetzt worden ist.

Drittes Capitel.

Allgemeine Zonenlehre.

§. 35. Vorläufige Bemerkung.

Indem wir jetzt zu einigen, die Krystallformen insbesondere betreffenden Problemen der analytischen Geometrie übergehen, müssen wir zu ihrem besseren Verständnisse eine allgemeine Bemerkung vorausschicken, welche sich auf die Ableitung der Krystallformen bezieht.*)

*) Vergl. meine Anfangsgründe der Krystallographie, 2. Aufl. S. 19 f.

Alle Krystallformen, welche an einer und derselben Mineralspecies vorkommen, bilden bekanntlich einen in sich abgeschlossenen Formencomplex, zwischen dessen einzelnen Gliedern ein sehr genauer Zusammenhang Statt findet. Dieser innere Zusammenhang ist wesentlich darin begründet, dass die den verschiedenen Formen angehörigen Flächen verschiedene Parameter-Werthe haben, welche insgesammt auf ein gemeinschaftliches Grundverhältniss zurückgeführt werden können, aus dessen Gliedern die Parameter der übrigen Flächen durch Multiplication mit rationalen, ganzen oder gebrochenen Zahlen abzuleiten sind.

Nennen wir also die Grundparameter a, b und c, so wird es allemal eine Form geben, deren Flächen durch diese Parameter bestimmt sind, weshalb sie auch die Grundform genannt wird. Alle übrigen Formen desselben Formencomplexes lassen nun aber ihre Parameter als rationale Multipla oder Submultipla dieser Grundparameter erkennen. Bezeichnen wir daher die rationalen Factoren der Grundparameter mit den Buchstaben m, n und r, so werden sich die Parameter-Verhältnisse aller übrigen Formen G, G', G'' u. s. w. allgemein durch

$$ma : nb : rc$$
$$m'a : n'b : r'c$$
$$m''a : n''b : r''c$$

u. s. w. darstellen lassen. Man nennt daher auch diese rationalen Factoren m, n und r, m', n' und r' u. s. w. die Ableitungszahlen der Formen G, G' u. s. w., weil durch ihre Einführung die Parameter-Verhältnisse dieser Formen aus dem Grundverhältnisse abgeleitet werden.

Dieses Gesetz, dass die Parameter aller Formen eines und desselben Formencomplexes rationale Multipla oder Submultipla der Parameter einer dieser Formen sind, oder dieses Gesetz der Rationalität der Ableitungszahlen ist bekanntlich eines der wichtigsten und einflussreichsten Gesetze der Krystallographie, dessen Erwähnung an gegenwärtigem Orte erforderlich war, weil die Resultate der folgenden Betrachtungen zum grossen Theile auf ihm beruhen; Betrachtungen, welche sich einestheils auf die Zonen der Krystallflächen, anderntheils auf die Transformation und Copulation der Axensysteme beziehen.

§. 36. Zonen, Zonenlinie, Zonengleichung.

In der Krystallographie spielen die Flächenzonen eine ausserordentlich wichtige Rolle, und die Wissenschaft wird es immer dankbar anerkennen, dass *Weiss* zuerst die grosse Bedeutung dieser Zonen erkannt und nach allen Richtungen geltend gemacht hat. Man versteht nämlich unter einer Zone von Flächen jeden Inbegriff von drei oder mehren Flächen, welche einer und derselben Linie im Raume parallel sind.*) Diejenige Linie, in Bezug auf welche solcher Parallelismus Statt findet, nennt man die Zonenlinie; alle

*) Vergl. Anfangsgründe der Krystallographie, 2. Aufl. S. 5.

Flächen aber, welche zu einer und derselben Zone gehören, wollen wir tautozonale Flächen nennen.

Aus diesem Begriffe einer Zone folgt von selbst, dass alle tautozonale Flächen, wenn sie mit einander zum Durchschnitte kommen, lauter parallele Durchschnittslinien oder parallele Kanten bilden müssen, wodurch sie sich auch gewöhnlich als die Flächen einer und derselben Zone zu erkennen geben. Dergleichen zu einer und derselben Zone gehörige Kanten mögen tautozonale Kanten heissen.

Da das wesentliche Verhältniss aller tautozonalen Flächen in ihrem Parallelismus zu einer und derselben Linie gegeben ist, so ist es gleichgiltig, ob wir uns diese Flächen ausserhalb des Mittelpunctes, oder ob wir sie uns insgesammt auf den Mittelpunct des Axensystems transportirt denken. Sind sie uns also ausserhalb des Mittelpunctes gegeben, wie dies an den Krystallformen der Fall ist, so wird ihr wesentliches Verhältniss nicht gestört werden, wenn wir sie auf den Mittelpunct verlegen. Sie werden sich dort alle in einer und derselben Linie schneiden, welche eben die Zonenlinie ist.

Die Wichtigkeit der ganzen Zonenlehre beruht besonders darauf, dass die Zonenlinie nicht als eine arbiträre, sondern als eine, in der Entwickelung des betreffenden Formencomplexes nothwendig gegebene Linie hervortritt. Sie wird jedenfalls durch irgend zwei Flächen der Zone bestimmt; welche zwei Flächen es aber auch sein mögen, als deren Durchschnittslinie wir uns die Zonenlinie denken wollen, so wird sie doch stets durch zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{x}{\mu} - \frac{y}{\nu} = 0 \text{ und } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{\mu} = 0$$

dargestellt werden können, in welchen, nach Maassgabe ihrer besondern Lage, die Vorzeichen der Parameter angemessene Veränderungen erleiden werden.

Ist uns nun aber die Zonenlinie durch zwei solcher Gleichungen gegeben, so folgt aus §. 24, dass für eine jede Fläche der Zone die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b} + \frac{\varrho}{c} = 0$$

Giltigkeit hat; denn offenbar muss eine jede der Zone angehörige Fläche diese Gleichung erfüllen, welche Werthe und welche Vorzeichen auch ihre Parameter a, b und c haben mögen. Wir können daher diese Gleichung mit allem Rechte die Zonengleichung nennen.

Da uns aber je zwei beliebige Flächen der Zone in ihrer Durchschnittslinie dieselbe Zonenlinie liefern, so wird man auch die Werthe von μ, ν und ϱ aus den Parametern irgend zweier tautozonaler Flächen F' und F'' ableiten können. Aus §. 25 ergiebt sich, dass in diesem Falle für die Zonenlinie die Gleichungen

$$\frac{x}{M} - \frac{y}{N} = 0 \text{ und } \frac{z}{R} - \frac{x}{M} = 0$$

gelten, und dass die Zonengleichung die Form

$$\frac{M}{a} + \frac{N}{b} + \frac{R}{c} = 0$$

erhält, in welchen Gleichungen die drei Grössen M, N und R, welche wir die Coëfficienten der Zonengleichung nennen wollen, durch die Werthe

$$M = a'a''(b'c'' - b''c')$$
$$N = b'b''(c'a'' - c''a')$$
$$\text{und } R = c'c''(a'b'' - a''b')$$

bestimmt sind. Da nun aber diese Linie identisch mit der, oben durch die Parameter μ, ν und ϱ gegebenen Linie ist, so muss offenbar

$$M : N : R = \mu : \nu : \varrho$$

oder auch
$$M = k\mu,\ N = k\nu,\ R = k\varrho$$

sein, wobei k irgend eine, von der Lage der beiden Flächen F' und F'' abhängige Zahl ist, welche sich, als der gemeinschaftliche Factor der zunächst gefundenen Grössen M, N und R leicht bestimmt, und eigentlich von selbst aus den Gleichungen eliminirt, so dass man zuletzt immer auf die einfachsten Werthe von M, N und R, d. h. auf die Werthe μ, ν und ϱ gelangt, welche die Parameter der projicirenden Ebenen der Zonenlinie sind. Auch diese Ebenen entsprechen immer gewissen Krystallflächen der Zone, welche letztere durch sie auf die einfachste Weise bestimmt wird, weshalb man von diesen Krystallflächen sagen kann, dass sie die Zone charakterisiren.

Anm. Dass übrigens die Zonengleichung von den Grundparametern des betreffenden Formencomplexes völlig unabhängig, dass sie in allen Fällen nur als eine zwischen den Ableitungszahlen bestehende Gleichung zu betrachten ist, diess ergiebt sich sofort, wenn man, zufolge der in §. 35 gegebenen Erläuterung, in den Werthen der Coëfficienten M, N und R

statt a', b' und c' die Grössen $m'a$, $n'b$ und $r'c$
- a'', b'' - c'' - - $m''a$, $n''b$ - $r''c$

so wie für die Fläche F

statt a, b und c die Grössen ma, nb und rc

einführt, indem man jetzt unter den Buchstaben a, b und c die Grundparameter versteht. Durch diese Substitution werden die Grundparameter aus der Zonengleichung gänzlich eliminirt, und es erscheint dann diese Gleichung lediglich als eine Function der Ableitungszahlen m, n, r u. s. w.

§. 37. Bestimmung unbekannter Flächen, die in bekannte Zonen fallen.

Wir wissen, dass es bei den Krystallflächen nicht auf ihre absolute, sondern nur auf ihre relative Lage ankommt, woraus denn folgt, dass uns eine Krystallfläche bekannt ist, sobald wir das Verhältniss ihrer Parameter a, b und c kennen, von welchen immer einer mit einem willkürlichen Werthe eingeführt werden kann. In dem Verhältnisse $a:b:c$ ist also eine Grösse als gegeben zu betrachten, und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der beiden anderen Grössen.

Wenn nun eine Fläche F, deren Parameter-Verhältniss $a:b:c$ unbekannt ist, in eine Zone fällt, welche bekannt, d. h. durch ihre Zonenlinie gegeben ist, so wird uns durch dieses eine Zonenverhältniss zwar nicht der

absolute Werth, aber doch das Verhältniss zweier Parameter bestimmt. Denn in der Zonengleichung

$$\frac{\mu}{a}+\frac{\nu}{b}+\frac{\varrho}{c}=0 \text{ oder } \frac{M}{a}+\frac{N}{b}+\frac{R}{c}=0$$

ist ja, nach dem so eben Gesagten, stets eine der drei Grössen a, b oder c als gegeben oder bekannt vorauszusetzen; die Gleichung enthält also nur noch zwei unbekannte Grössen, deren Verhältniss aus ihr abzuleiten ist, indem man die eine als eine Function der anderen ausdrücken kann.

Sehr häufig fällt aber eine und dieselbe unbekannte Fläche F in zwei verschiedene Zonen, und dann ist sie offenbar vollkommen bestimmt, sobald uns beide diese Zonen bekannt, d. h. durch ihre Zonenlinien gegeben sind. Die zweite Zone liefert uns nämlich eine zweite Zonengleichung von der Form

$$\frac{\mu'}{a}+\frac{\nu'}{b}+\frac{\varrho'}{c}=0 \text{ oder } \frac{M'}{a}+\frac{N'}{b}+\frac{R'}{c}=0$$

und dann gelten nach §. 25 für die Parameter a, b und c die Proportionen

$$c : a = \nu\varrho' - \nu'\varrho : \mu\nu' - \mu'\nu$$
$$b : c = \mu\nu' - \mu'\nu : \varrho\mu' - \varrho'\mu$$
$$a : b = \varrho\mu' - \varrho'\mu : \nu\varrho' - \nu'\varrho$$

durch welche ihre Verhältnisswerthe völlig bestimmt werden. Von diesen zonalen Bestimmungen der Flächen wird in der Krystallographie ein eben so häufiger als wichtiger Gebrauch gemacht, wie wir uns später überzeugen werden.

§. 38. Allgemeine Entwickelung einer Zone.

Unter der allgemeinen Entwickelung einer gegebenen Zone versteht man eine erschöpfende Angabe aller derjenigen Flächen, welche rings um das Axensystem in dieser Zone möglich sind, wobei jedoch nur auf die krystallographisch möglichen, d. h. auf diejenigen Flächen Rücksicht genommen wird, deren Parameter-Verhältnisse durch rationale Ableitungszahlen (§. 35) aus einem gemeinschaftlichen Grundverhältnisse abzuleiten sind. Bei dieser Entwickelung dient uns die Zonengleichung

$$\frac{\mu}{a}+\frac{\nu}{b}+\frac{\varrho}{c}=0 \text{ oder } \frac{M}{a}+\frac{N}{b}+\frac{R}{c}=0$$

zum sichersten Leitfaden.

Da in dieser Gleichung die Coëfficienten μ, ν und ϱ, oder M, N und R als bekannte, die Parameter a, b und c dagegen als unbekannte Grössen zu betrachten sind, so wird man nun zuvörderst untersuchen, für welche Vorzeichen der Grössen a, b und c die Gleichung unmöglich wird. Diess muss offenbar für diejenigen Vorzeichen der Fall sein, durch welche alle Glieder der Gleichung entweder positiv oder negativ würden, weil eine Summe von lauter positiven oder lauter negativen Grössen niemals $=0$ sein kann. Man lernt so zuvörderst diejenigen Raum-Octanten kennen, in welchen es überhaupt gar keine Flächen für die Zone giebt, und welche keine anderen sein

werden, als diejenigen, in welche die auf den Mittelpunct transportirte Zonenlinie fällt.

Für die übrigen Raum-Octanten, in welchen also möglicherweise Flächen existiren können, untersucht man nun weiter, wie sich diese Flächen nach den verschiedenen Grössenverhältnissen der Werthe von a, b und c bestimmen, und welche allgemeinen Ableitungszahlen ihnen demgemäss entsprechen werden. Mit der Auffindung dieser Ableitungszahlen ist die Aufgabe einer allgemeinen Entwickelung der Zone selbst als gelöst zu betrachten.

Da sich die Entwickelung, je nach der besonderen Beschaffenheit des Axensystems und je nach der besondern Lage der Zonenlinie auf das Verschiedenste modificirt, so lässt sich auch im Allgemeinen nicht viel mehr darüber sagen, als hier geschehen ist, und muss die speciellere Erläuterung der Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme vorbehalten bleiben.

§. 39. Graphische Darstellung der Zonen nach der Punctirmethode.

Wenn uns um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct und an demselben Axensysteme irgend ein, durch dasselbe Grundverhältniss der Parameter verknüpfter Formencomplex gegeben ist, so können wir zu einer vollständigen Uebersicht aller möglichen, zwischen seinen Flächen existirenden Zonen durch sehr einfache graphische Darstellungen gelangen, auf welche zuerst *Neumann* aufmerksam gemacht hat. Da uns nun dergleichen Darstellungen wirklich alle möglichen und selbst die verstecktesten Zonen des gegebenen Formencomplexes mit einem Blicke erkennen lassen, so gewinnen sie einige Bedeutung für die theoretische Krystallographie, weshalb sie auch an gegenwärtigem Orte erläutert werden sollen.

Die von *Neumann* selbst angewendete graphische Darstellung der Zonen können wir mit *Quenstedt* die Punctirmethode nennen. Sie beruht auf dem Satze, dass die Centronormalen sämmtlicher Flächen einer und derselben Zone in eine Ebene, und folglich die Durchschnittspuncte aller dieser Normalen mit irgend einer beliebigen, als Constructionsfläche dienenden Ebene in eine gerade Linie fallen.*) Diese Durchschnittspuncte der Flächen-Normalen mit der Constructionsfläche bezeichnet *Neumann* mit dem Namen der Flächenorte, und die Aufgabe der Punctirmethode besteht wesentlich darin, sämmtliche Flächenorte eines gegebenen Formencomplexes auf dem, die Constructionsfläche darstellenden Papiere genau einzutragen, um sich ein anschauliches Totalbild aller möglichen Zonen zu verschaffen, welche zwischen den Flächen der gegebenen Formen hervortreten. Denn es wird offenbar eben so viele verschiedene Zonen geben, als sich gerade Linien durch je drei oder mehre Flächenorte ziehen lassen, worüber man durch den

*) *Neumann's* Beiträge zur Krystallonomie, Heft I, S. 1 ff.; diese geraden Linien sind es, welche von *Neumann* Zonenlinien genannt werden.

blosen Augenschein, oder durch Hilfe eines Lineals belehrt wird, wenn nur die Construction mit der gehörigen Genauigkeit ausgeführt wurde.

Da nun die Wahl der Constructionsfläche ganz beliebig ist, so scheint es am zweckmässigsten, dazu die Parallelfläche einer der Coordinat-Ebenen, z. B. der Ebene (yz) zu wählen, welche die dritte Axe, also die Axe der x, in der Entfernung 1 vom Mittelpuncte schneidet. Die Gleichung der so bestimmten Constructionsfläche wird also:

$$x = 1.$$

Ist nun die Gleichung irgend einer Krystallfläche

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

so werden die Gleichungen ihrer Centronormale, unter Voraussetzung eines orthoëdrischen Axensystems:

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0 \text{ und } \frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0$$

Man braucht nun blos diese beiden mit x behafteten Gleichungen der Centronormale mit der Gleichung der Constructionsfläche zu combiniren, d. h. $x = 1$ zu setzen, um die Coordinaten y und z des Flächenortes zu erhalten, und findet demgemäss

$$y = \frac{a}{b} \text{ und } y = \frac{a}{c},$$

wobei natürlich auf die *Vorzeichen* der Parameter a, b und c sorgfältig Rücksicht zu nehmen ist.

Diese Werthe von y und z sind es, welche bei der graphischen Darstellung der Zonen benutzt werden. Man zieht nämlich zwei, sich rechtwinkelig schneidende Linien, welche die in der Constructionsfläche liegenden Axen der y und z vorstellen, trägt hierauf für jede Fläche die ihr zukommenden Werthe $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{c}$ in diese Axen ein, vollendet das Parallelogramm, und erhält so den verlangten Flächenort. Sind auf diese Weise sämmtliche Flächenorte des gegebenen Formencomplexes eingetragen, so machen sich die Zonen von selbst darstellig, indem diese Flächenorte nach verschiedenen Richtungen reihenweise in gerade Linien geordnet erscheinen. Je drei, in *eine und dieselbe* gerade Linie fallende Flächenorte bestimmen *eine* Zone, und jede *einzelne* Fläche fällt in so viele *verschiedene* Zonen, als sich verschiedenen Reihen von Flächenorten nachweisen lassen, zu denen auch *ihr* Flächenort gehört.

Da übrigens je zwei Gegenflächen eine und dieselbe Normale haben, so wird bei der Construction nur auf die *obere* Hälfte einer jeden Form, oder auf diejenigen Flächen Rücksicht zu nehmen sein, für welche der Parameter a positiv ist.

Anm. Wir haben die Punctirmethode nur in der Voraussetzung eines *rechtwinkeligen* Axensystems erläutert, weil solche bei *schiefwinkeligen* Axensystemen minder einfach wird, wie sich daraus ergiebt, dass in der-

gleichen Axensystemen die Centronormalen durch andere, von den schiefen Neigungswinkeln abhängige, und bisweilen ziemlich complicirte Werthe der Parameter bestimmt werden.

§. 40. Graphische Darstellung der Zonen nach der Linearmethode.

Es lässt sich nicht läugnen, dass das gemeinschaftliche Kreuzen vieler Linien in einem und demselben Puncte für die Anschauung ein weit bestimmteres und leichter ergreifbares Verhältniss ist, als die Lage vieler Puncte in einer und derselben geraden Linie. Diess bestimmte *Quenstedt*, eine andere, von *Neumann* gleichfalls angegebene aber nicht angewendete graphische Methode vorzuziehen*), welche die Linearmethode genannt werden kann, und auf dem Satze beruht, dass sich sämmtliche Flächen einer Zone, wenn solche sich selbst parallel auf einen und denselben Punct transportirt werden, in einer und derselben Linie schneiden, welche natürlich keine andere als die Zonenlinie ist. Wird nun eine solche Zone von irgend einer beliebigen Ebene oder Constructionsfläche geschnitten, so stellt sich ihr Durchschnitt gewöhnlich als ein System von geraden Linien dar, welche sich in einem und demselben Puncte schneiden; ausgenommen sind nur diejenigen Zonen, deren Zonenlinien der Constructionsfläche selbst parallel liegen, und deren Durchschnitt daher ein System von Parallellinien darstellen wird. Da nun diese Linearmethode auch gänzlich unabhängig von der besondern Beschaffenheit des Axensystems ist, so dürfte sie aus mehren Gründen der Punctirmethode vorzuziehen sein.

Die beliebige, als Constructionsfläche gewählte Ebene nennt *Quenstedt* die Sections-Ebene, und die Durchschnitte der Flächen mit ihr die Sectionslinien oder Flächenlinien, unter welchem letzteren Namen sie schon *Neumann* einführte. Er transportirt sämmtliche Flächen auf denjenigen Punct der verticalen Axe (also der Axe der x), welcher um die Länge 1 vom Mittelpuncte entfernt ist, und wählt zur Sections-Ebene die Coordinat-Ebene durch die beiden andern Axen. Wir wollen die sämmtlichen Flächen auf den Mittelpunct des Axensystems verlegen, und zur Sections-Ebene diejenige Fläche wählen, deren Gleichung $x = 1$ ist.

Die Aufgabe läuft nun wesentlich darauf hinaus, die sämmtlichen Flächenlinien eines gegebenen Formencomplexes auf dem die Sections-Ebene darstellenden Papiere zu construiren, um sich durch solche Construction ein Bild zu verschaffen, aus welchem man sogleich und mit einem Blicke ersehen kann, nicht nur, welche Flächen zu einer und derselben Zone gehören, sondern auch, in wie viele verschiedene Zonen eine und dieselbe Fläche fällt. Jeder Kreuzungspunct (oder jedes Parallelsystem) von drei oder mehren Flächen-

---

*) *Poggend.* Annalen Band 36, S. 503 und 651, und Methode der Krystallographie, 1840, S. 9 ff. *Neumann* gab die Methode an in seinen Beiträgen zur Krystallonomie, I, S. 117.

linien bestimmt nämlich eine Zone, und es wird so viele verschiedene Zonen geben, als sich dergleichen Kreuzungspuncte (oder Parallelsysteme) herausstellen. Eine und dieselbe Fläche aber fällt in so viele Zonen, als ihre Flächenlinie durch verschiedene Kreuzungspuncte oder Zonenpuncte geht.

Die Ausführung der Sache ist eben so einfach, als die ihr zu Grunde liegende Vorstellung. Die Gleichung der Sections-Ebene ist abermals

$$x = 1.$$

Ist nun die Gleichung irgend einer, auf den Mittelpunct transportirten Fläche

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

so wird die Gleichung ihrer Sectionslinie

$$\frac{ay}{b} + \frac{az}{c} = -1$$

folglich sind $-\frac{b}{a}$ und $-\frac{c}{a}$ die Parameter, welche die Lage der entsprechenden Flächenlinie in der Constructionsfläche bestimmen.

Man ziehe also auf dem Papiere zwei Linien, welche sich unter demselben Winkel schneiden, wie die Axen der y und z, welche Axen sie in der Constructionsfläche auch wirklich vorstellen, nehme für jede Krystallfläche (unter sorgfältiger Berücksichtigung der Vorzeichen ihrer Parameter)

in der Axe der y den Parameter $-\frac{b}{a}$,

in der Axe der z den Parameter $-\frac{c}{a}$,

und ziehe die durch solche Parameter bestimmte Linie, so ist die verlangte Flächenlinie entworfen. Sind auf diese Weise die Flächenlinien aller Formen eingetragen, so ist auch die Uebersicht aller zwischen ihren Flächen bestehenden Zonen construirt worden. Dass übrigens wiederum nur auf die obere Hälfte der Formen Rücksicht zu nehmen ist, diess versteht sich von selbst.

Anm. Die vorstehende Regel zur Ausführung der graphischen Darstellung der Zonen nach der Linearmethode gilt zwar ganz allgemein, erfährt aber in der Anwendung noch einige Modificationen, welche wesentlich darin begründet sind, dass wir es in jedem besonderen Falle nur mit solchen Formen und mit solchen Flächen zu thun haben, welche dem in §. 35 erläuterten Gesetze der Ableitung unterliegen, weshalb denn für a, b und c die Grössen ma, nb und rc eingeführt werden müssen, woraus folgt, dass für jede Sectionslinie

der Parameter in der Axe der y mit dem Werthe $\frac{nb}{ma}$

- - - - - - - - - z - - - - $\frac{rc}{ma}$

zu schreiben ist. Da es nun aber bei allen diesen Constructionen nur auf das Verhältniss der Parameter ankommt, so lässt sich auch der gemeinschaftliche Divisor a gänzlich vernachlässigen. Demnach werden für irgend eine,

durch ihre Parameter ma, nb und rc gegebene Krystallfläche die in der graphischen Darstellung auf der Projectionsfläche $x=1$ einzutragenden Parameter

in der Axe der y den Werth $\frac{nb}{m}$

- - - - - z - - $\frac{rc}{m}$

haben. Die bei den einzelnen Krystallsystemen zu erläuternden Beispiele werden diess noch deutlicher machen.

§. 41. Verhältniss der Tangenten tautozonaler Kanten im orthoëdrischen Axensysteme.

Es ist ein allgemeines, die sämmtlichen Krystallformen beherrschendes Gesetz, dass die Tangenten tautozonaler Kanten zu einander in rationalen Verhältnissen stehen, oder, anders ausgedrückt, dass sie rationale Multipla eines und desselben irrationalen Grundwerthes sind. Obwohl wir den besondern Nachweis dieses Gesetzes erst bei der Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme geben können, so lässt sich doch ganz allgemein darthun, dass dasselbe unter gewissen Bedingungen Giltigkeit haben muss.

Die gegenwärtige allgemeine, wie die später zu gebende besondere Erörterung dieses Gesetzes der Rationalität der Tangenten-Verhältnisse hat jedoch den verschiedenen Charakter der Axensysteme zu berücksichtigen, weshalb wir auch hier die beiden Fälle eines orthoëdrischen und eines triklinoëdrischen Axensystems besonders in Betrachtung ziehen müssen.

Wir denken uns also zuvörderst in einem orthoëdrischen Axensysteme eine Zone, deren Zonenlinie L durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0 \text{ und } \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0$$

gegeben ist. Es seien nun F und F', F_1 und F_1' irgend vier beliebige Flächen dieser Zone, und es bedeute W den Kantenwinkel der beiden ersteren, sowie W' den Kantenwinkel der beiden letzteren Flächen, so ist nach §. 32

$$\operatorname{tang} W=\frac{\sqrt{M^2+N^2+R^2}}{aa'bb'+cc'aa+bb'cc'}$$

$$\operatorname{tang} W'=\frac{\sqrt{M_1^2+N_1^2+R_1^2}}{a_1a_1'b_1b_1'+c_1c_1'a_1a_1'+b_1b_1'c_1c_1'}$$

wenn wir, wie dort, der besseren Uebersicht wegen

$$\begin{array}{ll} aa'(bc'-b'c)=M & a_1a_1'(b_1c_1'-b_1'c_1)=M_1 \\ bb'(ca'-c'a)=N & b_1b_1'(c_1a_1'-c_1'a_1)=N_1 \\ cc'(ab'-a'b)=R & c_1c_1'(a_1b_1'-a_1'b_1)=R_1 \end{array}$$

setzen. Nun wissen wir aber aus §. 36, dass für die beiden ersten Flächen, weil sie in die Zone der Linie L fallen, die Bedingungen

$$M=k\mu,\quad N=k\nu,\quad R=k\varrho,$$

und dass aus demselben Grunde für die beiden anderen Flächen die Bedingungen

$$M_1=k_1\mu,\quad N_1=k_1\nu,\quad R_1=k_1\varrho$$

erfüllt sein müssen. Folglich erhalten die beiden Tangenten die Werthe

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'} = \frac{k\sqrt{P}}{Q}$$

$$\tang W' = \frac{k_1\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{a_1a_1'b_1b_1'+c_1c_1'a_1a_1'+b_1b_1'c_1c_1'} = \frac{k_1\sqrt{P}}{Q_1}$$

Diese beiden Werthe müssen nun jedenfalls ein rationales Verhältniss haben, sobald nur k und Q, sowie k_1 und Q_1 rationale Grössen sind. Diese letztere Bedingung wird aber bei den Krystallflächen wirklich erfüllt sein, wie schon daraus gefolgert werden kann, dass nach §. 35 für Krystallflächen eines und desselben Formencomplexes

satt a, b und c Werthe wie ma, nb und rc
- a', b' und c' - - $m'a$, $n'b$ und $r'c$

u. s. w. vorauszusetzen sind, in denen die Ableitungszahlen m, n, r u.s.w. rational sind, und nach deren Einführung die in den Werthen von Q und Q_1 erscheinenden Producte a^2b^2, c^2a^2 und b^2c^2 ebenfalls rationale Werthe erhalten müssen, sobald die Grundparameter a, b und c entweder nur durch rationale Zahlen oder durch Quadratwurzelzahlen auszudrücken sind. In derselben Voraussetzung werden aber auch die Werthe von k und k_1, welche derselben (ob $\frac{M}{\mu}$ und $\frac{M_1}{\mu}$, oder $\frac{N}{\nu}$ und $\frac{N_1}{\nu}$, oder $\frac{R}{\varrho}$ und $\frac{R_1}{\varrho}$) auch in Anwendung kommen mögen, nothwendig rational ausfallen müssen.

Da nun W und W' irgend zwei beliebige tautozonale Kanten bedeuten, so wäre hiermit vorläufig für sämmtliche orthoëdrische Krystallsysteme die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten, und zugleich die Behauptung erwiesen, dass in diesen Systemen die Tangenten tautozonaler Kanten rationale Multipla einer und derselben irrationalen Grösse, nämlich der Grösse $\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}$ sind.

Auch ergiebt sich hieraus, dass die Tangente irgend einer, von zwei beliebigen Flächen F und F' gebildete Kante durch den Ausdruck

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'},$$

dargestellt wird, sobald nämlich diese Flächen in die durch μ, ν und ϱ bestimmte Zone fallen.

Anm. Da die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse eine durch alle Beobachtungen bestätigte Thatsache ist, und da sie, nach denen für tang$W$ und tangW' gefundenen Werthen, gar nicht Statt finden könnte, wenn die Grundparameter a, b und c andere, als rationale Zahlwerthe oder Quadratwurzelwerthe hätten, so liefert sie uns den Beweis für die Richtigkeit der von *Weiss* geltend gemachten Ansicht, dass die Grundparameter in den orthoëdrischen Krystallsystemen allgemein nur in Quadratwurzelgrössen ihren naturgemässen Ausdruck finden können, ohne dass jedoch rationale Zahlwerthe gänzlich ausgeschlossen sind.

§. 42. Verhältniss der Tangenten tautozonaler Kanten in den triklinoëdrischen Axensystemen.

Nehmen wir an, dass die vier Flächen F und F', F_1 und F_1' einem triklinoëdrischen Axensysteme angehören, so gelangen wir allerdings auf ganz andere und weit complicirtere Resultate. Die allgemeine Begründung dieser Resultate ist jedoch wesentlich dieselbe, wie im vorhergehenden Paragraph, und ihre Verschiedenheit ist nur in dem verschiedenen Werthe begründet, welchen die Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen, vermöge des eigenthümlichen Characters des Axensystems, nothwendig erhalten muss.

Es sei die Zonenlinie abermals durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\mu} - \frac{y}{\nu} = 0 \text{ und } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{\mu} = 0$$

gegeben, und es seien die Parameter der Flächen dieselben wie in §. 41, also a, b und c für F, a', b' und c' für F' u. s. w., so wird nach §. 34 $\tang W =$

$$\frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{(M^2+N^2+R^2+2MN\cos\gamma+2RM\cos\beta+2NR\cos\alpha)}}{aa'bb'\sin^2\gamma+cc'aa'\sin^2\beta+bb'cc'\sin^2\alpha-aa'(bc'+b'c)A'-bb'(ca'+c'a)B'-cc'(ab'+a'b)C'}$$

oder $\tang W = \dfrac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}}{Q}$.

ganz auf ähnliche Weise bestimmt sich der Werth von

$$\tang W' = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma}{Q_1} \sqrt{P_1}$$

indem wir in dem Ausdrucke von $\tang W$ statt M, N und R die Grössen M_1, N_1 und R_1, sowie statt a, b und c die Grössen a_1, b_1 und c_1, endlich statt a', b' und c' die Grössen a_1', b_1' und c_1' einsetzen.

Da nun aber die vier Flächen F, F', F_1 und F_1' tautozonal sein sollen, so gelten für sie abermals die Bedingungen:

$$M = k\mu, \quad N = k\nu, \quad R = k\varrho$$
$$M_1 = k_1\mu, \quad N_1 = k_1\nu, \quad R_1 = k_1\varrho$$

Hieraus folgt denn:

$$\tang W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma\, k \sqrt{P}}{Q}$$
$$\tang W' = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma\, k_1 \sqrt{P}}{Q_1}$$

in welchen Ausdrücken

$$P = \mu^2+\nu^2+\varrho^2+2\mu\nu\cos\gamma+2\varrho\mu\cos\beta+2\nu\varrho\cos\alpha$$

ist, daher sich denn vorläufig ergiebt, dass beide Tangenten Multipla eines und desselben irrationalen Grundwerthes, nämlich der Grösse $\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}$ sind.

Sollen nun aber die Factoren dieses irrationalen Grundwerthes rational sein, so müssen sowohl k und k_1, als auch Q und Q_1 rationale Werthe haben. Für die beiden ersten Grössen ist diess nach §. 41 unbedingt anzunehmen; die beiden anderen Grössen Q und Q_1 aber werden, wenn man in ihnen ma, nb und rc statt a, b und c, sowie $m'a$, $n'b$ und $r'c$ statt a', b' und

c', u. s. w. setzt, solche Werthe erhalten, deren Rationalität nur dann bestehen kann, wenn jedes der drei Producte

$$bcA', \text{ oder } bc\cos A\sin\beta\sin\gamma$$
$$caB', \quad - \quad ca\cos B\sin\gamma\sin\alpha$$
$$abC', \quad - \quad ab\cos C\sin\alpha\sin\beta$$

für sich einen rationalen Zahlwerth hat.

Diess wären also diejenigen drei Bedingungen, welche in einem jeden triklinoëdrischen Axensysteme zwischen den Grundparametern a, b und c, und zwischen den Grundwinkeln desselben erfüllt sein müssen, dafern auch in ihm das Gesetz der Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten erhalten bleiben soll.

Viertes Capitel.

Transformation der Axensysteme.

§. 43. Erläuterung der Aufgabe.

Da in manchen Krystallformen die Wahl des Axensystems eine willkürliche ist, oder auf verschiedene Weise getroffen werden kann, und da es bisweilen selbst für solche Krystallformen, welche uns unbedingt auf ein einziges und bestimmtes Axensystem verweisen, von theoretischem Interesse sein kann, sie auf ein anderes Axensystem zu beziehen, so bildet die Transformation der Axen, oder der Uebergang von einem Axensysteme auf ein anderes, eine nicht unwichtige Aufgabe der Krystallographie.

Diese Aufgabe läuft wesentlich darauf hinaus, für irgend eine, durch ihre Parameter in Bezug auf ein gegebenes Axensystem bestimmte Fläche diejenigen Parameter aufzufinden, welche ihr in dem neu eingeführten Axensysteme zukommen. Da wir jedoch diese Aufgabe nur für das besondere Bedürfniss der Krystallographie zu lösen haben, so wollen wir sie auch gleich in der Weise auffassen, wie sie für die Krystallformen in Anwendung zu kommen pflegt. In den Krystallformen wird nämlich für das neu einzuführende Axensystem gefordert, dass selbiges von irgend dreien, nicht in eine Zone fallenden Krystallflächen, als den neuen Coordinat-Ebenen, und daher von den drei Durchschnittslinien dieser Flächen, als den neuen Axen gebildet werde. Sonach lässt sich unsere Aufgabe folgenderweise ausdrücken:

In einem beliebigen Axensysteme ist uns eine Fläche F durch ihre Parameter a, b und c gegeben; drei andere, auf dasselbe Axensystem bezogene Flächen F', F'' und F''' sollen als die Coordinat-Ebenen eines neuen Axensystems eingeführt werden; man sucht die Parameter a_1, b_1 und c_1, welche sich für die Fläche F in den drei Durchschnittslinien der Flächen F', F'' und F''', als den Axen dieses neuen Axensystems, ergeben.

Bei dieser Transformation wird übrigens stets vorausgesetzt, dass beide Axensysteme einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben; daher werden wir uns die drei Flächen F', F'' und F''' jedenfalls auf den Mittelpunct des gegebenen Axensystems verlegt denken, in welchem sich die neuen Axen eben sowohl schneiden müssen, wie die ursprünglichen. Mit Ausnahme der Fläche F haben wir daher nur solche Flächen zu berücksichtigen, welche durch den Mittelpunct gehen.

§. 44. Allgemeine Auflösung der Aufgabe.

Um unsre Aufgabe ganz allgemein zu lösen, wollen wir annehmen, dass das gegebene oder ursprüngliche Axensystem beliebig entweder ein orthoëdrisches, oder ein triklinoëdrisches sei, wodurch nur für das Endresultat eine Verschiedenheit herbeigeführt wird.

Die Fläche F sei durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben, und eben so seien die Gleichungen der drei, auf den Mittelpunct verlegten Flächen F', F'' und F''':

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=0,\ \frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}+\frac{z}{c''}=0,\ \frac{x}{a'''}+\frac{y}{b'''}+\frac{z}{c'''}=0$$

so kommt es zunächst darauf an, die drei Durchschnittslinien dieser Flächen zu finden, welche ja die neuen Axen bilden sollen. Nennen wir

L	die Durchschnittslinie von	F'	und	F''
L' -	-	- F'''	-	F'
L'' -	-	- F''	-	F'''

so bestimmen sich nach §. 17 und 19 in jedem Axensysteme die Gleichungen dieser Linien, wie folgt:

$$\text{für } L,\quad \frac{x}{M}-\frac{y}{N}=0 \text{ und } \frac{z}{R}-\frac{x}{M}=0$$

$$\text{für } L',\quad \frac{x}{M'}-\frac{y}{N'}=0 \text{ und } \frac{z}{R'}-\frac{x}{M'}=0$$

$$\text{für } L'',\quad \frac{x}{M''}-\frac{y}{N''}=0 \text{ und } \frac{z}{R''}-\frac{x}{M''}=0$$

in welchen Gleichungen:

$$M=a'a''(b'c''-b''c'),\quad N=b'b''(c'a''-c''a'),\quad R=c'c''(a'b''-a''b')$$
$$M'=a'''a'(b'''c'-b'c'''),\quad N'=b'''b'(c'''a'-c'a'''),\quad R'=c'''c'(a'''b'-a'''b')$$
$$M''=a''a'''(b''c'''-b'''c''),\quad N''=b''b'''(c''a'''-c'''a''),\quad R''=c''c'''(a''b'''-a'''b'')$$

Combiniren wir nun die Gleichung der Fläche F successiv mit den Gleichungen der Linien L, L' und L'', so gelangen wir auf die Coordinaten der Durchschnittspuncte P, P' und P'', in welchen jene Linien, als die neu eingeführten Axen, von der Fläche F geschnitten werden. Diese Coordinaten erhalten, wenn wir der leichteren Uebersicht wegen

$$Mbc + Nca + Rab = S$$
$$M'bc + N'ca + R'ab = S'$$
$$M''bc + N''ca + R''ab = S''$$

schreiben, die folgenden Werthe:

für den Punct P, $x = \frac{abcM}{S}$, $y = \frac{abcN}{S}$, $z = \frac{abcR}{S}$,

für den Punct P', $x = \frac{abcM'}{S'}$, $y = \frac{abcN'}{S'}$, $z = \frac{abcR'}{S'}$,

für den Punct P'', $x = \frac{abcM''}{S''}$, $y = \frac{abcN''}{S''}$, $z = \frac{abcR''}{S''}$.

Nun sind die Centrodistanzen dieser drei Puncte offenbar nichts Anderes, als die gesuchten neuen Parameter a_1, b_1 und c_1, durch welche die Lage der Fläche F in Bezug auf das neue, von den drei Linien L, L' und L'' gebildete Axensystem bestimmt wird. Die weitere Auflösung des Problems wird also auf den verschiedenen Charakter des ursprünglichen Axensystems Rücksicht zu nehmen haben.

Ist dieses Axensystem ein orthoëdrisches, so finden sich die neuen Parameter (nach §. 28, I) wie folgt:

$$a_1 = \frac{abc\sqrt{M^2+N^2+R^2}}{Mbc+Nca+Rab} = \frac{abc\sqrt{T}}{S}$$
$$b_1 = \frac{abc\sqrt{M'^2+N'^2+R'^2}}{M'bc+N'ca+R'ab} = \frac{abc\sqrt{T'}}{S'}$$
$$c_1 = \frac{abc\sqrt{M''^2+N''^2+R''^2}}{M''bc+N''ca+R''ab} = \frac{abc\sqrt{T''}}{S''}$$

und hiermit wäre denn die Aufgabe für alle diejenigen Fälle gelösst, da ein rechtwinkeliges Axensystem gegeben ist, welche Beschaffenheit auch das neue Axensystem haben mag.

Wenn dagegen das gegebene oder ursprüngliche Axensystem ein triklinoëdrisches ist, so haben wir zu berücksichtigen, dass die Coordinaten jedes der drei Puncte P, P' und P'' schiefwinkelig zu einander sind, indem x und y den Winkel γ, z und x den Winkel β, y und z den Winkel α bilden. Daher erhalten in diesem Falle die neuen Parameter (nach §. 28, II) folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{abc\sqrt{M^2+N^2+R^2+2NR\cos\alpha+2RM\cos\beta+2MN\cos\gamma}}{Mbc+Nca+Rab} = \frac{abc\sqrt{T}}{S}$$
$$b_1 = \frac{abc\sqrt{M'^2+N'^2+R'^2+2N'R'\cos\alpha+2R'M'\cos\beta+2M'N'\cos\gamma}}{M'bc+N'ca+R'ab} = \frac{abc\sqrt{T'}}{S'}$$
$$c_1 = \frac{abc\sqrt{M''^2+N''^2+R''^2+2N''R''\cos\alpha+2R''M''\cos\beta+2M''N''\cos\gamma}}{M''bc+N''ca+R''ab} = \frac{abc\sqrt{T''}}{S''}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, so gelangt man natürlich wieder auf die vorher gefundenen Werthe.

§. 45. Wichtige Folgerung für die Krystallographie.

Die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate erlangen nun für die Krystallformen deshalb eine ganz besondere Wichtigkeit, weil nach §. 35 alle Flächen eines und desselben Formencomplexes unter dem Gesetze stehen, dass ihre Parameter rationale Multipla gewisser Grundparameter sind, durch welche dieser Formencomplex zunächst charakterisirt wird.

Bezeichnen wir also diese Grundparameter mit a, b und c, und wollen wir die Resultate des vorhergehenden Paragraphen in einer, jenem krystallographischen Gesetze entsprechenden Weise darstellen, so haben wir in ihnen

für die Fläche F statt a, b und c die Werthe ma, nb und rc
- - - F' - a', b' und c' - - $m'a$, $n'b$ und $r'c$
- - - F'' - a'', b'' und c'' - - $m''a$, $n''b$ und $r''c$
- - - F''' - a''', b''' und c''' - - $m'''a$, $n'''b$ und $r'''c$

einzuschreiben. Dadurch erleiden die Werthe von a_1, b_1 und c_1 eine kleine Umgestaltung; denn es wird zuvörderst

$$abc = mnrabc;\ bc = nrbc,\ ca = rmca,\ ab = mnab;$$

ferner erhalten die bisher mit M, N, R u. s. w. bezeichneten Grössen folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
M &= m'm''(n'r''-n''r')a^2bc &&= a\mathrm{M}abc\\
N &= n'n''(r'm''-r''m')ab^2c &&= b\mathrm{N}abc\\
R &= r'r''(m'n''-m''n')abc^2 &&= c\mathrm{R}abc\\
M' &= m'''m'(n'''r'-n'r''')a^2bc &&= a\mathrm{M}'abc\\
N' &= n'''n'(r'''m'-r'm''')ab^2c &&= b\mathrm{N}'abc\\
R' &= r'''r'(m'''n'-m'n''')abc^2 &&= c\mathrm{R}'abc\\
M'' &= m''m'''(n''r'''-n'''r'')a^2bc &&= a\mathrm{M}''abc\\
N'' &= n''n'''(r''m'''-r'''m'')ab^2c &&= b\mathrm{N}''abc\\
R'' &= r''r'''(m''n'''-m'''n'')abc^2 &&= c\mathrm{R}''abc
\end{aligned}$$

Führt man alle diese Werthe in die Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1 ein, so ergiebt sich, dass wenn in irgend einem, durch die Grundparameter a, b, c charakterisirten Formencomplexe eine durch die Parameter ma, nb und rc bestimmte Fläche F auf drei neue Axen bezogen werden soll, welche die Durchschnittslinien dreier anderer Flächen F', F'' und F''' desselben Formencomplexes sind, dann die drei neuen Parameter a_1, b_1 und c_1 der Fläche F sich mit folgenden Werthen herausstellen:

1. wenn das ursprüngliche Axensystem ein orthoëdrisches ist:

$$a_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2\mathrm{M}^2+b^2\mathrm{N}^2+c^2\mathrm{R}^2}}{\mathrm{M}nr+\mathrm{N}rm+\mathrm{R}mn} = \frac{mnr\sqrt{T}}{S}$$

$$b_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2\mathrm{M}'^2+b^2\mathrm{N}'^2+c^2\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{M}'nr+\mathrm{N}'rm+\mathrm{R}'mn} = \frac{mnr\sqrt{T'}}{S'}$$

$$c_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2\mathrm{M}''^2+b^2\mathrm{N}''^2+c^2\mathrm{R}''^2}}{\mathrm{M}''nr+\mathrm{N}''rm+\mathrm{R}''mn} = \frac{mnr\sqrt{T''}}{S''}$$

2. wenn das ursprüngliche Axensystem ein triklinoëdrisches ist:

$$a_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2M^2+b^2N^2+c^2R^2+2bcNR\cos\alpha+2caRM\cos\beta+2abMN\cos\gamma}}{Mnr+Nrm+Rmn} = \frac{mnr\sqrt{T}}{S}$$

$$b_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2M'^2+b^2N'^2+c^2R'^2+2bcN'R'\cos\alpha+2caR'M'\cos\beta+2abM'N'\cos\gamma}}{M'nr+N'rm+R'mn} = \frac{mnr\sqrt{T'}}{S'}$$

$$c_1 = \frac{mnr\sqrt{a^2M''^2+b^2N''^2+c^2R''^2+2bcN''R''\cos\alpha+2caR''M''\cos\beta+2abM''N''\cos\gamma}}{M''nr+N''rm+R''mn} = \frac{mnr\sqrt{T''}}{S''}$$

Betrachtet man diese Werthe genau, so erkennt man sofort, dass jeder derselben aus einem rationalen Factor besteht, welcher mit einem der drei irrationalen Factoren $\sqrt{T}$, oder $\sqrt{T'}$, oder $\sqrt{T''}$ multiplicirt ist. Denn da die Grössen m, n, r, m', n', r' u. s. w. nach §. 35 stets rationale Werthe haben, so gilt dasselbe auch von den Grössen M, N, R, M' u. s. w., und folglich auch von denen durch S, S' und S'' ausgedrückten Summen.

Beziehen wir nun irgend eine zweite Fläche F_1 desselben Formencomplexes, welche uns in dem ursprünglichen Axensysteme durch die Parameter m_1a, n_1b und r_1c gegeben ist, auf dasselbe neue Axensystem, so bestimmen sich deren neue Parameter a_2, b_2 und c_2 in ganz ähnlicher Weise, wie folgt:

$$a_2 = \frac{m_1n_1r_1\sqrt{T}}{S_1},\quad b_2 = \frac{m_1n_1r_1\sqrt{T'}}{S_1'},\quad c_2 = \frac{m_1n_1r_1\sqrt{T''}}{S_1''}$$

wobei die Grösse

$$S_1 = Mn_1r_1 + Nr_1m_1 + Rm_1n_1$$
$$S_1' = M'n_1r_1 + N'r_1m_1 + R'm_1n_1$$
$$S_1'' = M''n_1r_1 + N''r_1m_1 + R''m_1n_1$$

und man erkennt, dass diese drei Parameter abermals aus rationalen Factoren bestehen, welche in *dieselben* drei irrationalen Factoren $\sqrt{T}$, $\sqrt{T'}$ und $\sqrt{T''}$ multiplicirt sind, wie solche in den Werthen von a_1, b_1 und c_1 auftreten.

Da nun die beiden Flächen F und F_1 zwei ganz beliebige Flächen des gegebenen Formencomplexes sein können, so ergiebt sich hieraus das sehr wichtige krystallonomische Gesetz: dass alle Flächen, und folglich auch dass alle Formen eines und desselben Formencomplexes, wenn solche auf ein neues Axensystem bezogen werden, dessen Axen die Durchschnittslinien irgend dreier Flächen desselben Formencomplexes sind, diese neuen Axen gleichfalls in *rationalen* Verhältnissen schneiden.*)

Dieses Gesetz gilt ganz allgemein, es mag nun das ursprüngliche Axensystem ein orthoëdrisches oder ein klinoëdrisches sein; es gilt allgemein, welche Beschaffenheit auch das neue Axensystem haben möge, und es liefert uns sonach den Beweis, dass ein jeder Formencomplex nach Befinden auf sehr verschiedene Axensysteme bezogen werden kann, in deren jedem jenes andere Gesetz (§. 35) erhalten bleibt, dass die Para-

*) *Kupffer* gab den Beweis für dieses Gesetz in seinem Handbuche der rechnenden Krystallonomie 1831, S. 491 ff.

meter aller Flächen rationale Multipla dreier Grundparameter sind, welchen wir wohl im Allgemeinen irrationale Werthe zuerkennen müssen. Denn die drei Grössen $\sqrt{T}$, $\sqrt{T'}$ und $\sqrt{T''}$ stellen in der That die drei neuen Grundparameter dar, so wie die drei Grössen $\frac{mnr}{S}$, $\frac{mnr}{S'}$ und $\frac{mnr}{S''}$ die rationalen Factoren derselben, oder die neuen Ableitungszahlen darstellen.

Bei der Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme werden wir Gelegenheit haben, diese Transformation der Axensysteme specieller zu erläutern.

Fünftes Capitel.

Theorie der Zwillingskrystalle.

§. 46. Erläuterung und Begründung dieser Theorie.

In der Krystallwelt kommt sehr häufig die Erscheinung vor, dass zwei gleichgestaltete Krystalle oder Individuen derselben Species nach einem bestimmten Gesetze mit einander verwachsen sind. Man nennt dergleichen gesetzmässig verbundene Paare von Individuen Zwillingskrystalle. Das ihnen zu Grunde liegende Gesetz lässt sich aber in den meisten Fällen dahin aussprechen, dass beide Individuen in Bezug auf irgend eine Fläche des betreffenden Formencomplexes, welche die Zwillingsfläche genannt wird, zu einander symmetrisch gestellt sind, oder, mit anderen Worten, dass sich das eine Individuum in einer, um die Normale der Zwillingsfläche, welche die Zwillingsaxe genannt wird, durch 180° verdrehten Stellung gegen das andere Individuum befindet.

Dieses Stellungsgesetz der beiden Individuen ist ganz unabhängig von der Art und Weise ihrer Verwachsung; es bleibt unverändert, beide Individuen mögen nur an einander, oder durch einander gewachsen sein; es bleibt also auch unverändert, wir mögen uns die Axensysteme beider Individuen um verschiedene Mittelpuncte, oder um einen und denselben Mittelpunct ausgebildet denken. So weit es sich daher um die Beurtheilung der Stellung beider Individuen eines Zwillingskrystalls handelt, können wir jedenfalls voraussetzen, dass ihre beiden Axensysteme einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben.

Sonach ist uns in jedem Zwillingskrystalle eine Copulation zweier identischer Axensysteme gegeben, welche um einen und denselben Mittelpunct dergestalt ausgebildet sind, dass beide symmetrisch gegen eine bestimmte Fläche liegen, welche stets eine krystallographisch-reelle Fläche des betreffenden Formencomplexes ist. Von dieser Vorstellung ausgehend, können wir die Theorie der Zwillingskrystalle auf die symmetrische und krystallonomi-

sche Copulation zweier identischer Axensysteme gründen, und als ein ganz allgemeines Problem der analytischen Geometrie behandeln.

Die einfachste Vorstellung, welche wir bei dieser Theorie zu Grunde legen können, ist nun die, dass anfangs die beiden Axensysteme I und II coincidiren, und dass hierauf das eine gegen das andere um die Zwillingsaxe durch 180° verdreht werde. Es seien MX, MY und MZ die drei positiven Halbaxen des Axensystems I, und es sei MN die Zwillingsaxe. Das Axensystem II, dessen Axen wir mit MX', MY' und MZ' bezeichnen wollen, coincidirt vor der Drehung mit dem ersteren; nach der Drehung fällt jede seiner Axen in die durch die Zwillingsaxe und die gleichnamige Axe von I bestimmte Ebene, oder in eine der projicirenden Ebenen der Zwillingsaxe, also die MX' in die Ebene NMX, die MY' in die Ebene NMY, und die MZ' in die Ebene NMZ. Auch bildet eine jede dieser Axen mit der Zwillingsaxe denselben Winkel, wie die gleichnamige Axe des Axensystems I, so dass

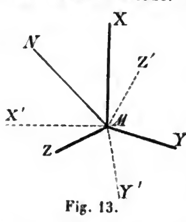


Fig. 13.

$$\text{Winkel } NMX' = \text{Winkel } NMX$$
$$\text{-} \quad NMY' = \text{-} \quad NMY$$
$$\text{-} \quad NMZ' = \text{-} \quad NMZ$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich nun die Gleichungen der Axen des zweiten Axensystems in Bezug auf das erste Axensystem ableiten; ein Problem, dessen Lösung uns weiter auf die Erkennung des Zusammenhanges führt, welcher zwischen den Flächen der beiden Individuen eines Zwillingskrystalls obwaltet, weshalb wir es wenigstens für die orthoëdrischen Axensysteme etwas ausführlicher behandeln und verfolgen müssen.

§. 47. Transposition des einen Axensystems auf das andere, bei rechtwinkeligen Axen.

Wenn die symmetrisch copulirten Axensysteme orthoëdrische sind, so wird die allgemeine Lösung der Aufgabe, die Axen des zweiten Systems als Linien darzustellen, welche uns im ersten Axensysteme gegeben sind, in folgender Weise zu geben sein.

Es sei die im Axensysteme I gegebene Gleichung der Zwillingsfläche

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

so werden nach §. 31 die Gleichungen der Zwillingsaxe:

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0, \quad \frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0, \quad \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

oder, vollständig so geschrieben, wie es eigentlich für eine durch den Mittelpunct gehende Linie gefordert wird (§. 23 und §. 31, Anm.)

$$\frac{x}{bc} - \frac{y}{ca} = 0, \quad \frac{z}{ab} - \frac{x}{bc} = 0, \quad \frac{y}{ca} - \frac{z}{ab} = 0.$$

Unterscheiden wir nun die Axen des zweiten Axensystems als Axen der x', y' und z' von den Axen der x, y und z des ersten Axensystems, so ist es die erste Bedingung für ihre Lage, dass eine jede derselben in eine der projicirenden Ebenen der Zwillingsaxe fällt; und zwar fällt

die Axe der x' in die projicirende Ebene durch x,
- - - y' - - - - - y,
- - - z' - - - - - z,

folglich wird die eine Gleichung

$$\text{für die Axe der } x': \ \frac{y}{ca} - \frac{z}{ab} = 0$$

$$\text{für die Axe der } y': \ \frac{z}{ab} - \frac{x}{bc} = 0$$

$$\text{für die Axe der } z': \ \frac{x}{bc} - \frac{y}{ca} = 0$$

Da nun aber diese drei Axen gleichfalls durch den Mittelpunct des ersten Axensystems gehen, so sind wir nach §. 23 berechtigt, als zweite Gleichungen für sie die folgenden einzuführen:

$$\text{für die Axe der } x': \ \frac{x}{\mu} - \frac{y}{ca} = 0$$

$$\text{für die Axe der } y': \ \frac{x}{bc} - \frac{y}{\nu} = 0$$

$$\text{für die Axe der } z': \ \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{bc} = 0$$

und es handelt sich jetzt nur noch darum, die Parameter μ, ν und ϱ zu finden. Dazu gelangen wir durch Benutzung der zweiten Bedingung für die Lage dieser Axen; der Bedingung nämlich, dass jede derselben mit der Zwillingsaxe einen gleich grossen Winkel bildet, wie die gleichnamige Axe des ersten Axensystems.

Es bestimmen sich aber die Winkel ξ, v und ζ, welche die Axen der x, y und z mit der Zwillingsaxe bilden, nach dem in §. 30, I stehenden Ausdrucke

$$\cos W = \frac{pp' + qq' + ss'}{\sqrt{p^2+q^2+s^2}\sqrt{p'^2+q'^2+s'^2}}$$

wenn wir in selbigem einerseits $p = bc$, $q = ca$ und $s = ab$, anderseits successiv $p' = \infty$, $q' = \infty$ und $s' = \infty$ setzen, wie folgt:

$$\cos\xi = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}} = \frac{bc}{\sqrt{S}}$$

$$\cos v = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}} = \frac{ca}{\sqrt{S}}$$

$$\cos\zeta = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}} = \frac{ab}{\sqrt{S}}$$

Eben so erhalten wir die Winkel ξ', v' und ζ', welche die Axen der x', y' und z' mit der Zwillingsaxe bilden, wenn wir in demselben Ausdrucke von

$\cos W$ einerseits für p, q und s die vorherigen Werthe, anderseits statt p', q' und s' successiv die nachstehenden Werthe einsetzen:

für die Axe der x': $p' = \mu$, $q' = ca$, $s' = ab$
für die Axe der y': $p' = bc$, $q' = \nu$, $s' = ab$
für die Axe der z': $p' = bc$, $q' = ca$, $s' = \varrho$

Auf solche Weise bestimmt sich

$$\cos\xi' = \frac{\mu bc + c^2a^2 + a^2b^2}{\sqrt{S}\sqrt{\mu^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\cos v' = \frac{\nu ca + a^2b^2 + b^2c^2}{\sqrt{S}\sqrt{\nu^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}$$

$$\cos\zeta' = \frac{\varrho ab + b^2c^2 + c^2a^2}{\sqrt{S}\sqrt{\varrho^2 + b^2c^2 + a^2b^2}}$$

Macht man nun die Bedingungen geltend, dass $\xi' = \xi$, $v' = v$ und $\zeta' = \zeta$ sein müssen, so ergeben sich zunächst drei Gleichungen, aus welchen mit Leichtigkeit folgende Werthe von μ, ν und ϱ abgeleitet werden:

$$\mu = \frac{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)}{2bc}$$

$$\nu = \frac{c^2a^2 - b^2(c^2+a^2)}{2ca}$$

$$\varrho = \frac{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2)}{2ab}$$

Demnach werden die Gleichungen der drei Axen des Axensystems II, wenn solche auf das Axensystem I bezogen werden, folgende:

für die Axe der x': $\dfrac{2bcx}{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)} - \dfrac{y}{ca} = 0$ und $\dfrac{y}{ca} - \dfrac{z}{ab} = 0$

für die Axe der y': $\dfrac{2cay}{c^2a^2 - b^2(c^2+a^2)} - \dfrac{x}{bc} = 0$ und $\dfrac{z}{ab} - \dfrac{x}{bc} = 0$

für die Axe der z': $\dfrac{2abz}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2)} - \dfrac{x}{bc} = 0$ und $\dfrac{x}{bc} - \dfrac{y}{ca} = 0$

mit welchen drei Systemen von Gleichungen die Grundlage für die Theorie aller Zwillingskrystalle orthoëdrischer Krystallformen gefunden ist.*)

§. 48. Transposition der Coordinat-Ebenen des zweiten Axensystems auf das erste.

Nachdem wir die Axen des Axensystems II als Linien dargestellt haben, welche uns im Axensysteme I gegeben sind, so ist es eine sehr leichte Aufgabe, auch die Coordinat-Ebenen jenes Axensystems als Flächen innerhalb des ersten Axensystems auszudrücken. Zu diesem Ende bedarf es nur der Erwägung, dass eine jede dieser Ebenen die Normal-Ebene einer der

*) Vergl. mein Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie, II, S. 236, wo dieselben Resultate mitgetheilt worden sind.

Axen, oder dass jede Axe die Centronormale einer der gesuchten Coordinat-Ebenen ist; es ist nämlich

die Axe der z' die Centronormale der Ebene $(x'y')$
- - - y' - - - - $(z'x')$
- - - x' - - - - $(y'z')$

Man setze nun, es sei allgemein die Gleichung einer jeden dieser drei Coordinat-Ebenen von der Form:

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 0$$

so werden die Gleichungen ihrer Centronormalen allgemein:

$$\frac{x}{b'c'} - \frac{y}{c'a'} = 0, \quad \frac{z}{a'b'} - \frac{x}{b'c'} = 0, \quad \frac{y}{c'a'} - \frac{z}{a'b'} = 0.$$

Da nun diese Centronormalen identisch mit den Axen der z', der y' und x' sind, so brauchen wir nur ihre Gleichungen successiv mit denen zu Ende des vorhergehenden Paragraphs stehenden Gleichungen derselben Axen zu identificiren, um für jede der drei Coordinat-Ebenen die ihr zukommenden Werthe von a', b' und c' zu finden. Es wird also z. B. für die Axe der x', als die Centronormale der gesuchten Ebenen $(y'z')$:

$$a'b' = ab, \quad c'a' = ca, \quad b'c' = \frac{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)}{2bc}$$

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen, und setzt man in das Product $a'^2b'c'$ statt $b'c'$ den durch die dritte Gleichung gegebenen Werth, so findet man

$$a'^2 = \frac{2a^2b^2c^2}{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)}$$

woraus sich das Verhältniss $a'^2 : a'b' : c'a'$, oder

$$a' : b' : c' = \frac{2ab^2c^2}{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)} : b : c$$

folgern lässt, auf dessen Kenntniss es ja lediglich ankommt, weil die gesuchte Coordinat-Ebene $(y'z')$ eine durch den Mittelpunct gehende Fläche ist. Durch dasselbe Verfahren erhalten wir nun überhaupt folgende Parameter-Verhältnisse für die transponirten Coordinat-Ebenen des zweiten Axensystems:

für die Ebene $(x'y')$: $a' : b' : c' = a : b : \dfrac{2ca^2b^2}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2)}$

für die Ebene $(z'x')$: $a' : b' : c' = a : \dfrac{2bc^2a^2}{c^2a^2 - b^2(c^2+a^2)} : c$

für die Ebene $(y'z')$: $a' : b' : c' = \dfrac{2ab^2c^2}{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)} : b : c$

Anm. Betrachten wir diese Verhältnisse etwas genauer, indem wir zugleich darauf Rücksicht nehmen, dass die Zwillingsfläche, wenn wir sie ganz allgemein als irgend eine abgeleitete Fläche vorstellen wollen, eigentlich durch ein Parameter-Verhältniss $ma : nb : rc$ bestimmt wird, dass also in vorstehenden Verhältnissen diese Grössen an die Stelle von a, b und c gesetzt werden müssen, so gelangen wir zu der Erkenntniss, dass sich die Parameter a', b' und c' der transponirten Coordinat-Ebenen jedenfalls als rationale

Multipla der drei Grundparameter des Axensystems I herausstellen, sobald nur diese Grundparameter entweder durch rationale Zahlen, oder durch Quadratwurzelzahlen ausgedrückt werden können.

Damit sind wir aber offenbar auf das Resultat gelangt, dass, bei jeder zwillingsmässigen Copulation zweier identischer (orthoëdrischer) Axensysteme, die drei Coordinat-Ebenen des Axensystems II dreien krystallographisch-möglichen Flächen des Axensystems I entsprechen, und vice versa. Wir können also in jedem Zwillingskrystalle die drei Coordinat-Ebenen des einen Individuums als drei krystallographisch-mögliche Flächen des anderen Individuums betrachten.

§. 49. Transposition irgend einer beliebigen Fläche des einen Axensystems auf das andere.

Das so eben hervorgehobene Resultat betrifft jedoch nur den besonderen Fall eines ganz allgemeinen Gesetzes; des Gesetzes nämlich, dass in allen Zwillingskrystallen orthoëdrischer Formen jede Fläche des einen Individuums, wenn sie auf das andere Individum transponirt wird, einer krystallographisch-möglichen Fläche dieses Individuums entspricht, indem sich ihre Parameter auch in dem Axensysteme dieses Individuums als rationale Multipla der Grundparameter herausstellen.

Die Wirklichkeit dieses Gesetzes lässt sich auf folgende Weise darthun. Denken wir uns im Axensystem II irgend eine Fläche F' durch die Gleichung

$$\frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{c'}=1$$

gegeben, so läuft die ganze Untersuchung darauf hinaus, für dieselbe Fläche diejenigen Parameter a_1, b_1 und c_1 zu berechnen, welche ihr in den Axen der x, der y und der z des Axensystems I zukommen. Nun haben wir bereits in §. 47 die Axen der x', der y' und der z' als Linien innerhalb des Axensystems I bestimmt; die vorstehende Gleichung aber sagt uns, dass solche Linien von der Fläche F' respective in den Distanzen a', b' und c' vom Mittelpuncte geschnitten werden. Bezeichnen wir also die Durchschnittspuncte dieser Linien mit den Buchstaben X', Y' und Z', so wird unsere Aufgabe wesentlich darin bestehen, erstens die Coordinaten x, y und z für jeden der drei Puncte X', Y' und Z' zu bestimmen, wobei die Parameter a', b' und c', als die Centrodistanzen dieser Puncte, zu benutzen sind; dann aber nach §. 18 die Parameter derjenigen Fläche aufzusuchen, welche durch dieselben drei Puncte geht, und natürlich keine andere, als die auf das Axensystem I transponirte Fläche F' ist. Wir wollen den ersten Theil dieser Rechnung beispielsweise für einen dieser Puncte, etwa für den Punct X' durchführen, hierauf die Coordinaten für alle drei Puncte zusammenstellen, zuletzt aber den §. 18 in Anwendung bringen, um das Endresultat, d. h. um die Bestimmung von a_1, b_1 und c_1 zu erhalten.

Die Coordinaten des Punctes X' finden sich durch folgende Betrachtung. Für jeden Punct der Axe der x' gelten die Gleichungen:

$$\frac{2bcx}{b^2c^2-a^2(b^2+c^2)}-\frac{y}{ca}=0 \text{ und } \frac{y}{ca}-\frac{z}{ab}=0$$

oder $x=\dfrac{y(b^2c^2-a^2b^2-c^2a^2)}{2abc^2}$, und $z=\dfrac{aby}{ac}$;

die Centrodistanz irgend eines Punctes dieser Axe wird daher

$$D=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{y(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)}{2abc^2}=\frac{yS}{2abc^2}$$

Nun ist uns aber die Centrodistanz des Punctes X' mit dem Werthe a' gegeben; folglich wird für diesen Punct, wenn wir seine Coordinaten mit p, q und s statt mit x, y und z bezeichnen,

$$p=\frac{(b^2c^2-a^2b^2-c^2a^2)a'}{S},\ q=\frac{2abc^2a'}{S},\ s=\frac{2ab^2ca'}{S}.$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen bestimmen sich für den Punct Y' die Coordinaten:

$$p'=\frac{2abc^2b'}{S},\ q'=\frac{(c^2a^2-b^2c^2-a^2b^2)b'}{S},\ s'=\frac{2ab^2cb'}{S};$$

und eben so für den Punct Z' die Coordinaten:

$$p''=\frac{2ab^2cc'}{S},\ q''=\frac{2a^2bcc'}{S},\ s''=\frac{(a^2b^2-c^2a^2-b^2c^2)c'}{S}.$$

Die in dem Axensysteme II durch die Parameter a', b' und c' gegebene Fläche F' geht nun aber durch diese drei Puncte, deren vorstehende Coordinaten sich auf das Axensystem I beziehen; schreiben wir also ihre auf dasselbe Axensystem bezügliche Gleichung

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1$$

so werden ihre in die Axen der x, der y und der z fallenden Parameter a_1, b_1 und c_1 durch die neun Coordinaten p, q, s, p' u. s. w. nach §. 18 vollkommen bestimmt sein. Substituirt man nämlich in denen zu Ende von §. 18 stehenden Ausdrücken für a_1, b_1 und c_1, statt p, q, s, p' u. s. w. ihre vorstehenden Werthe, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen:

$$a_1=\frac{a'b'c'(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)}{2abc(bb'+cc')a'+(b^2c^2-a^2b^2-c^2a^2)b'c'}=\frac{a'b'c'S}{2abc(bb'+cc')a'-Ab'c'}$$

$$b_1=\frac{a'b'c'(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)}{2abc(cc'+aa')b'+(c^2a^2-b^2c^2-a^2b^2)c'a'}=\frac{a'b'c'S}{2abc(cc'+aa')b'-Bc'a'}$$

$$c_1=\frac{a'b'c'(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)}{2abc(aa'+bb')c'+(a^2b^2-c^2a^2-b^2c^2)a'b'}=\frac{a'b'c'S}{2abc(aa'+bb')c'-Ca'b'}$$

welches die gesuchten Parameter der auf das Axensystem I transponirten Fläche sind.

Dass nun aber diese Parameter wirklich rationale Multipla der Grundparameter sind, diess wird sofort ersichtlich, wenn wir sowohl die Fläche F (oder die Zwillingsfläche) als auch die Fläche F' (oder die beliebige Krystallfläche des Individuums II) als abgeleitete Flächen einführen, indem

wir voraussetzen, dass der betreffende Formencomplex durch die Grundparameter a, b und c charakterisirt sei, und demgemäss in vorstehenden Werthen

statt a, b und c die Grössen ma, nb und rc,
- a', b' und c' die Grössen $m'a$, $n'b$ und $r'c$

einsetzen. Dadurch wird zuvörderst:

$$\begin{aligned} S &= m^2n^2a^2b^2+r^2m^2c^2a^2+n^2r^2b^2c^2 \\ A &= m^2n^2a^2b^2+r^2m^2c^2a^2-n^2r^2b^2c^2 \\ B &= m^2n^2a^2b^2-r^2m^2c^2a^2+n^2r^2b^2c^2 \\ C &= -m^2n^2a^2b^2+r^2m^2c^2a^2+n^2r^2b^2c^2 \end{aligned}$$

und endlich:

$$a_1 = \frac{m'n'r'Sa}{2mnr(nn'b^2+rr'c^2)m'a^2-n'r'A} = Pa$$

$$b_1 = \frac{m'n'r'Sb}{2mnr(rr'c^2+mm'a^2)n'b^2-r'm'B} = Qb$$

$$c_1 = \frac{m'n'r'Sc}{2mnr(mm'a^2+nn'b^2)r'c^2-m'n'C} = Rc.$$

Da nun die Factoren P, Q und R rationale Werthe haben, sobald nur die Grundparameter a, b und c entweder durch rationale Zahlen oder durch Quadratwurzelzahlen darstellbar sind, so ergiebt sich, dass solchenfalls auch a_1, b_1 und c_1 rationale Multipla der Grundparameter des betreffenden Formencomplexes sind.*)

§. 50. Transposition des einen Axensystems auf das andere bei schiefwinkeligen Axen.

In den schiefwinkeligen und zumal in den triklinoëdrischen Axensystemen lässt uns die Theorie der Zwillingsbildung auf weit complicirtere Resultate gelangen, weshalb wir uns auf die Transposition der Axen beschränken wollen.

Denken wir uns, in einem triklinoëdrischen Axensysteme sei die Zwillingsfläche ebenfalls durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben, so werden die Gleichungen der Zwillingsaxe, nach §. 31, II,

$$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0,\ \frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0,\ \frac{y}{q}-\frac{z}{s}=0$$

in welchen

$$\begin{aligned} p &= bc\sin^2\alpha-abB'-caC' \\ q &= ca\sin^2\beta-bcC'-abA' \\ s &= ab\sin^2\gamma-caA'-bcB' \end{aligned}$$

und $A'=\cos A\sin\beta\sin\gamma$, $B'=\cos B\sin\gamma\sin\alpha$, $C'=\cos C\sin\alpha\sin\beta$.

---

*) Vergl. mein Lehrbuch der Krystallographie, II, S. 240.

Da nun die Axen der x', y' und z' des zweiten Axensystems aus ihrer anfänglichen Lage (der Coincidenz mit den Axen der x, y und z) durch eine halbe Umdrehung um die Zwillingsaxe in ihre neue Lage gebracht worden sind, so müssen sie abermals in die projicirenden Ebenen der Zwillingsaxe fallen, weshalb sich denn die eine Gleichung

$$\text{für die Axe der } x' \text{ mit } \frac{y}{q} - \frac{z}{s} = 0,$$

$$\text{für die Axe der } y' \text{ mit } \frac{z}{s} - \frac{x}{p} = 0,$$

$$\text{für die Axe der } z' \text{ mit } \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = 0$$

bestimmen wird. Auch werden sich die zweiten Gleichungen wiederum

$$\text{für die Axe der } x' \text{ in der Form } \frac{x}{\mu} - \frac{y}{q} = 0$$

$$\text{für die Axe der } y' \text{ in der Form } \frac{x}{p} - \frac{y}{\nu} = 0$$

$$\text{für die Axe der } z' \text{ in der Form } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{p} = 0$$

einführen lassen, weil alle drei Axen durch den Mittelpunct des Axensystems gehen. Zur Bestimmung der noch unbekannten Parameter μ, ν und ϱ gelangen wir abermals durch die Bedingung, dass jede Axe des zweiten Axensystems mit der Zwillingsaxe denselben Winkel bildet, wie die gleichnamige Axe des ersten Systems. Es ist aber nach §. 30, II der allgemeine Ausdruck für den Neigungswinkel zweier Linien in einem triklinoëdrischen Axensysteme: $\cos W =$

$$\frac{pp'+qq'+ss'+(qs'+q's)\cos\alpha+(sp'+s'p)\cos\beta+(pq'+p'q)\cos\gamma}{\sqrt{p^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2sp\cos\beta+2pq\cos\gamma}\sqrt{p'^2+q'^2+s'^2+2q's'\cos\alpha+2s'p'\cos\beta+2p'q'\cos\gamma}}$$

Lassen wir in diesem Ausdrucke die Buchstaben p, q und s unverändert, während wir successiv p', q' und s' mit dem Werthe ∞ einführen, so finden wir die Neigungswinkel ξ, v und ζ der Axen der x, y und z gegen die Zwillingsaxe mit folgenden Werthen:

$$\cos\xi = \frac{p+s\cos\beta+q\cos\gamma}{\sqrt{K}}$$

$$\cos v = \frac{q+s\cos\alpha+p\cos\gamma}{\sqrt{K}}$$

$$\cos\zeta = \frac{s+q\cos\alpha+p\cos\beta}{\sqrt{K}}$$

in welchem $K = p^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2sp\cos\beta+2pq\cos\gamma$ ist.

Die gleichnamigen Neigungswinkel ξ', v' und ζ' der Axen der x', y' und z' gegen dieselbe Zwillingsaxe erhalten wir aber, wenn wir, mit Beibehaltung der Buchstaben p, q und s, successiv

für die Axe der x': $p'=\mu$, $q'=q$, $s'=s$
für die Axe der y': $p'=p$, $q'=\nu$, $s'=s$
für die Axe der z': $p'=p$, $q'=q$, $s'=\varrho$

einsetzen; es wird nämlich

$$\cos\xi'=\frac{\mu(p+s\cos\beta+q\cos\gamma)+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+sp\cos\beta+pq\cos\gamma}{\sqrt{K}\sqrt{\mu^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2\mu s\cos\beta+2\mu q\cos\gamma}}$$

$$\cos v'=\frac{\nu(q+p\cos\gamma+s\cos\alpha)+s^2+p^2+2sp\cos\beta+pq\cos\gamma+qs\cos\alpha}{\sqrt{K}\sqrt{\nu^2+s^2+p^2+2sp\cos\beta+2\nu p\cos\gamma+2\nu s\cos\alpha}}$$

$$\cos\zeta'=\frac{\varrho(s+q\cos\alpha+p\cos\beta)+p^2+q^2+2pq\cos\gamma+qs\cos\alpha+sp\cos\beta}{\sqrt{K}\sqrt{\varrho^2+p^2+q^2+2pq\cos\gamma+2\varrho q\cos\alpha+2\varrho p\cos\beta}}$$

Um nun die Werthe von μ, ν und ϱ zu finden, dazu haben wir abermals die drei Bedingungen $\xi'=\xi$, $v'=v$ und $\zeta'=\zeta$ geltend zu machen. Wir wollen beispielsweise die Rechnung für die erste Bedingung durchführen, dann aber die Endresultate mittheilen, wie sich solche aus der ähnlichen Behandlung der beiden übrigen Bedingungen ergeben.

Zur leichteren Verfolgung der Bedingung $\cos\xi'=\cos\xi$ setze man zuvörderst

$$p+s\cos\beta+q\cos\gamma=V$$
$$q^2+s^2+2qs\cos\alpha+sp\cos\beta+pq\cos\gamma=W$$

so führt uns die Bedingung $\cos\xi'=\cos\xi$ auf die Gleichung:

$$\mu V+W=V\sqrt{\mu^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2\mu s\cos\beta+2\mu q\cos\gamma}$$

oder auch, indem man das Wurzelzeichen wegschafft,

$$\mu^2V^2+2\mu VW+W^2=\mu^2V^2+V^2(q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2\mu s\cos\beta+2\mu q\cos\gamma)$$

woraus denn folgt, dass

$$2\mu V(W-s\cos\beta V-q\cos\gamma V)=V^2(q^2+s^2+2qs\cos\alpha)-W^2 \quad (1)$$

Substituirt man in dem linker Hand vom Gleichheitszeichen stehenden Factor von $2\mu V$ für V und W ihre Werthe, so bestimmt sich

$$W-s\cos\beta V-q\cos\gamma V=q^2\sin^2\gamma+s^2\sin^2\beta+2qs(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)=L$$

Man setze ferner $W=T+R$, nämlich

$$q^2+s^2+2qs\cos\alpha=T,\ \text{und}$$
$$sp\cos\beta+pq\cos\gamma=R$$

so wird die bei (1) rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehende Grösse

$$V^2(q^2+s^2+2qs\cos\alpha)-W^2=T(V^2-T-2R)-R^2$$

Der Factor von T erhält aber den Werth:

$$V^2-T-2R=p^2-L$$

also verwandelt sich die bei (1) stehende Gleichung in folgende:

$$2\mu VL=(p^2-L)T-R^2$$

Nun ist aber $p^2T-R^2=p^2L$, folglich wird

$$\mu=\frac{p^2-T}{2V}$$

Setzt man in diesen Ausdruck für T und V ihre Werthe, so bestimmt sich endlich:

$$\mu = \frac{p^2 - q^2 - s^2 - 2qs\cos\alpha}{2(p + q\cos\gamma + s\cos\beta)}$$

Behandelt man auf ähnliche Weise die Bedingungsgleichung $\cos v' = \cos v$, so findet man:

$$\nu = \frac{q^2 - s^2 - p^2 - 2sp\cos\beta}{2(q + s\cos\alpha + p\cos\gamma)}$$

und durch dasselbe Verfahren aus der Bedingung $\cos\zeta' = \cos\zeta$:

$$\varrho = \frac{s^2 - p^2 - q^2 - 2pq\cos\gamma}{2(s + p\cos\beta + q\cos\alpha)}$$

Wir begnügen uns mit diesen Resultaten, ohne solche noch weiter durch Substitution der Werthe von p, q und s zu verfolgen, weil in den triklinoëdrischen Krystallen die Zwillingsfläche in der Regel einer der Coordinat-Ebenen, oder auch die Zwillingsaxe einer der Axen entspricht, wodurch sich die Sache sehr vereinfacht. Für die Zwillinge monoklinoëdrischer Krystalle erhalten die Grössen p, q und s ebenfalls sehr einfache Werthe; für orthoëdrische Krystalle aber wird $p = bc$, $q = ca$, $s = ab$, weshalb denn (weil auch $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ ist) die vorstehenden Werthe von μ, ν und ϱ auf die in §. 47 gefundenen Werthe zurückkommen.

Zweiter Theil.

Theoretische Krystallographie.

---

§. 51. Uebersicht der Krystallsysteme.

Es ist bekannt, dass die sämmtlichen Krystallformen nach denen in ihren Symmetrie-Verhältnissen angezeigten Axensystemen in sieben Abtheilungen gebracht werden können, welche man Krystallsysteme genannt hat.*)

Der geometrische Grundcharakter eines jeden krystallographischen Axensystems beruht nämlich auf folgenden drei Momenten:

1) auf der Zahl der Coordinat-Ebenen oder Axen,
2) auf dem allgemeinen Neigungsverhältnisse der Coordinat-Ebenen, und
3) auf dem allgemeinen Grössenverhältnisse der Axen.

Nach der Zahl der Coordinat-Ebenen oder Axen zerfallen die sämmtlichen Krystallformen zuvörderst in die beiden Abtheilungen der trimetrischen und der tetrametrischen Formen, je nachdem sie vermöge ihrer Symmetrie-Verhältnisse auf ein dreizähliges, d. h. aus drei Coordinat-Ebenen bestehendes Axensystem, oder auf ein vierzähliges, d. h. aus vier Coordinat-Ebenen bestehendes Axensystem zu beziehen sind.

Die trimetrischen Formen zerfallen weiter nach dem allgemeinen Neigungsverhältnisse ihrer Coordinat-Ebenen in vier Abtheilungen, welchen die oben in §. 12 erläuterten Axensysteme zu Grund liegen, weshalb denn diese Abtheilungen selbst füglich als orthoëdrische, monoklinoëdrische, diklinoëdrische und triklinoëdrische Formen aufgeführt werden können. Die tetrametrischen Formen lassen nur das einzige Neigungsverhältniss erkennen, dass sich drei Coordinat-Ebenen in einer und derselben Linie unter 60° schneiden, während die vierte auf ihnen rechtwinkelig ist.

In Bezug auf das Grössenverhältniss der Axen, in welchem auch ihr gegenseitiges Werthverhältniss begründet ist, findet nun bei den or-

---

*) Vergl. meine Anfangsgründe der Krystallographie, 2. Aufl. S. 10 f.

thoëdrischen Formen eine dreifache Verschiedenheit Statt, je nachdem nämlich alle drei Axen als vollkommen gleiche und gleichwerthige, oder nur noch zwei als solche erscheinen, oder endlich alle drei ungleich und ungleichwerthig sind. In den verschiedenen klinoëdrischen Formen scheinen die drei Axen immer ungleich und ungleichwerthig zu sein, weshalb denn das Grössenverhältniss derselben keine weiteren Unterschiede bedingt. In den tetrametrischen Formen waltet stets das eine Verhältniss, dass die drei in einer Ebene liegenden Axen gleiche und gleichwerthige sind, während die vierte, auf ihnen rechtwinkelige Axe ungleich oder doch wenigstens ungleichwerthig ist.

Fassen wir nun alle Merkmale zusammen, so erhalten wir zuvörderst folgende Definition: ein Krystallsystem ist der Inbegriff aller möglichen Formen, welche, bei gleicher Zahl und bei demselben allgemeinen Neigungsverhältnisse der Coordinat-Ebenen, dasselbe allgemeine Grössenverhältniss der Axen besitzen. Nach diesem Begriffe und nach den vorhergehenden Erörterungen gelangen wir aber zur Anerkennung folgender sieben Krystallsysteme:

A. Trimetrische Formen;

a. Orthoëdrische Formen;

1. Tesserales oder isometrisches Krystallsystem,
2. Tetragonales oder monodimetrisches Krystallsystem,
3. Rhombisches oder anisometrisches Krystallsystem;

b. Klinoëdrische Formen;

4. Monoklinoëdrisches Krystallsystem,
5. Diklinoëdrisches Krystallsystem,
6. Triklinoëdrisches Krystallsystem;

B. Tetrametrische Formen;

7. Hexagonales oder monotrimetrisches Krystallsystem.

Wir glaubten hier diese Uebersicht der Krystallsysteme einschalten zu müssen, weil sie uns die Reihenfolge für die nun folgenden Lehren der theoretischen Krystallographie bestimmt.

Warum wir denen, an und für sich trefflichen Namen isometrisches, monodimetrisches und monotrimetrisches System die Namen tesserales, tetragonales und hexagonales System vorziehen, darüber werden wir uns bei der Betrachtung dieser Krystallsysteme aussprechen. Der Name rhombisches System aber ist äusserst bezeichnend für die betreffende Abtheilung von Formen, und jedenfalls weit bezeichnender als der Name anisometrisches oder trimetrisches System, weil dieses System die Ungleichheit aller drei Axen mit den klinoëdrischen Systemen gemein hat, während ihm die Eigenschaft ausschliesslich zukommt, dass seine Formen nach allen drei Axen rhombische Querschnitte, d. h. solche Querschnitte liefern, welche entweder Rhomben oder doch solche Figuren sind, in und um welche sich Rhomben beschreiben lassen.

Erster Abschnitt.

Tesserales System.

Erstes Capitel.

Holoëdrische Formen des Tesseralsystems.

§. 52. Axensystem; Zwischenaxen.

Gleichheit und absolute Gleichwerthigkeit dreier, auf einander rechtwinkeliger Axen sind bekanntlich die Eigenschaften, welche das tesserale Krystallsystem auszeichnen, und für seine Formen den höchsten Grad von Regelmässigkeit bedingen, dem wir überhaupt in der Krystallwelt begegnen. Ja, es gehören sogar mehre von den regelmässigen Körpern, welche die Geometrie zu betrachten pflegt, mit in den Bereich der tesseralen Formen.

Daher sind wir denn auch fast genöthigt, bei der Nomenclatur der tesseralen Formen dasselbe Princip zu befolgen, dem die Geometrie bei der Benennung der regelmässigen Körper gefolgt ist, d. h. die Namen derselben nach der Zahl ihrer Flächen zu bilden. Wollten wir anders verfahren, so würden dieselben Körper in zwei so nahe verwandten Wissenschaften verschiedene Namen erhalten, was sich auf dem Gebiete der Krystallographie um so seltsamer ausnehmen würde, als sie eine Tochter der Geometrie ist, und zwar die jüngstgeborene Tochter, welcher es gewiss nicht zukommt, den zweitausendjährigen Sprachgebrauch ihrer Mutter zu verdrängen. Nirgends dürfte wohl die Regel, dass den älteren Namen, sobald sie nur gut und brauchbar sind, das Vorrecht gebührt, mehr zur Geltung zu bringen sein, als auf dem Gebiete einer der Geometrie entsprossenen Wissenschaft. Und was ist wohl an den so bezeichnenden Namen Tetraëder, Hexaëder und Oktaëder auszusetzen, welche man neulich durch die Namen Helvinoëder, Haloëder und Magnetoëder zu ersetzen versucht hat? —

Was den Namen des Krystallsystems selbst betrifft, so ziehen wir das Prädicat tesseral deshalb den (übrigens sehr bezeichnenden) Prädicaten isometrisch oder regulär vor, weil es sich besser zu gewissen Zusammensetzungen eignet. So kann z. B. eine hemiëdrische Form des Tesseralsystemes sehr wohl eine semitesserale Form, aber nicht füglich eine hemi-isometrische oder semireguläre Form genannt werden.

Aus der absoluten Gleichwerthigkeit der drei Axen ergiebt sich, dass ganz beliebig eine jede derselben als Hauptaxe gelten, oder die aufrechte Stellung der Formen bestimmen kann, dass also jede tesserale Form drei völlig gleichwerthige Hauptaxen besitzt. Wir denken uns nun das Axensystem in einer solchen Stellung vor uns, dass eine seiner Axen vertical steht, während eine der horizontalen Axen gegen uns gerichtet ist. Die aufrechte Axe betrachten wir als die Axe der x, die an uns vorbeilaufende Axe als die

Axe der y, und die auf uns zulaufende Axe als die Axe der z; auch bestimmen wir ein für alle Mal den vorn, oben, rechts liegenden Octanten als den Octanten der positiven Halbaxen.

Ausser den drei Hauptaxen sind noch einige andere, durch den Mittelpunct gehende Linien von Wichtigkeit, welche wir die Zwischenaxen nennen, und als rhombische und trigonale Zwischenaxen unterscheiden. Unter rhombischen Zwischenaxen verstehen wir nämlich diejenigen in den Coordinat-Ebenen enthaltenen Linien, welche mitten zwischen zwei Hauptaxen liegen, und folglich den Winkel derselben halbiren; unter trigonalen Zwischenaxen dagegen verstehen wir diejenigen Linien, welche mitten zwischen drei Hauptaxen liegen, und also gegen jede derselben gleich geneigt sind. Es giebt daher 6 rhombische, und 4 trigonale Zwischenaxen.

Da wir ihrer oft bedürfen, so müssen wir die Gleichungen dieser Zwischenaxen wenigstens im Octanten der positiven Halbaxen aufsuchen; aus der so eben mitgetheilten Lagenbestimmung derselben ergeben sich für die drei rhombischen Zwischenaxen dieses Octanten die Gleichungen:

$$x = 0 \text{ und } y - z = 0$$
$$y = 0 \text{ und } z - x = 0$$
$$z = 0 \text{ und } x - y = 0$$

für die trigonale Zwischenaxe desselben Octanten aber gelten die Gleichungen

$$x - y = 0 \text{ und } z - x = 0$$

Man wird sich leicht auch für jede andere dieser Axen die ihr zukommenden Gleichungen bilden können.

§. 53. Verschiedene Parameter-Verhältnisse.

Unter einer Form überhaupt versteht man in der Krystallographie einen Inbegriff von lauter isoparametrischen Flächen, d. h. von solchen Flächen, welchen dasselbe Parameter-Verhältniss zukommt; man unterscheidet aber die Formen als holoëdrische und als hemiëdrische Formen, je nachdem sie den vollständigen Inbegriff, oder nur die symmetrisch vertheilte Hälfte aller derjenigen Flächen besitzen, welche für das gegebene Parameter-Verhältniss möglich sind; (Anfangsgr. S. 14 und 15). Da nun die Eigenthümlichkeit einer jeden Form wesentlich in dem Parameter-Verhältnisse ihrer Flächen begründet ist, so wird es offenbar eben so viele Arten von holoëdrisch-tesseralen oder plenotesseralen Formen geben, als es wesentlich verschiedene Parameter-Verhältnisse giebt. Allgemein sind diese Verhältnisse nur dreierlei: nämlich das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit, das Verhältniss der Gleichheit zweier gegen einen ungleichen Parameter, und das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit. Die beiden letzteren Verhältnisse sind jedoch verschiedener Modalitäten fähig, welche eine besondere Berücksichtigung erfordern.

Betrachten wir zuvörderst das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit, welches sich allgemein durch $m:n:1$ ausdrücken lässt, indem wir den

kleinsten Parameter = 1 setzen, den grössten mit m, und den mittleren mit n bezeichnen, so begründet es eine wesentliche Verschiedenheit, ob der grösste Parameter m noch einen endlichen Werth hat, oder ob er mit dem absolut grössten Werthe ∞ gegeben ist. Sonach kann das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit der Parameter in den zweierlei Modalitäten

$$m : n : 1 \text{ und } \infty : n : 1$$

vorkommen, welchen zwei verschiedene Arten von Formen entsprechen.

Das Verhältniss der Gleichheit zweier gegen einen ungleichen Parameter ist zunächst ein verschiedenes, je nachdem die beiden gleichen Parameter grösser oder kleiner als der dritte Parameter sind. Bezeichnen wir also wiederum den grössten Parameter mit m, und setzen wir den kleinsten = 1, so gelangen wir auf die beiden Modalitäten $m : m : 1$, und $m : 1 : 1$. Beide diese Verhältnisse gestatten aber wiederum die Unterscheidung der Fälle, ob m noch mit einem endlichen Werthe, oder mit dem absolut grössten Werthe ∞ auftritt, weshalb denn das Verhältniss zweier gleicher gegen einen ungleichen Parameter in den vier Modalitäten

$$m : m : 1, \text{ und } \infty : \infty : 1,$$
$$m : 1 : 1, \text{ und } \infty : 1 : 1$$

vorkommen kann, welchen eben so viele Arten von Formen entsprechen werden.

Das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit der Parameter, welches sich am einfachsten durch $1 : 1 : 1$ darstellen lässt, gestattet natürlich gar keine weitere Verschiedenheit, und liefert auch daher immer nur eine und dieselbe Form.

Hieraus ergiebt sich denn, dass im Tesseralsysteme nur sieben wesentlich verschiedene Parameterverhältnisse, und folglich auch nur sieben Arten von holoëdrischen Formen möglich sind; was durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird.

§. 54. Arten der plenotesseralen Formen.

Denen im vorhergehenden §. nachgewiesenen Parameter-Verhältnissen entsprechen nun folgende sieben Arten von plenotesseralen Formen.

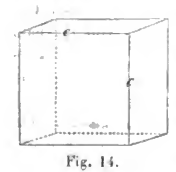


Fig. 14.

1. Das Hexaëder, der Sechsflächner oder der Würfel (*tessera*); eine von 6 gleichen Quadraten umschlossene Form, deren 12 Kanten 90° messen, und deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty : \infty : 1$ haben; diese Form ist einzig in ihrer Art, weshalb sich denn die verschiedenen Hexaëder nur durch ihre Grösse und durch den verschiedenen Grad der Regelmässigkeit ihrer Ausbildung unterscheiden.

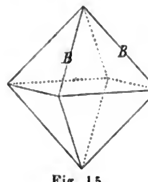
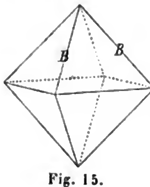



Fig. 15.

2. Das Oktaëder, oder der Achtflächner; eine von 8 gleichen, gleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, deren 12 Kanten 109° 28′ messen, und deren Flächen das Parameter-Verhältniss 1 : 1 : 1 haben; auch diese Form ist einzig in ihrer Art, weshalb es denn keine wesentlich verschiedenen Oktaëder giebt, und ihre wirklich vorkommende Verschiedenheit nur in den absoluten Dimensionen, oder in der verschiedenen Vollkommenheit der Ausbildung begründet ist.

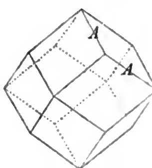


Fig. 16.

3. Das Rhombendodekaëder, oder der Zwölfflächner; eine von 12 gleichen und ähnlichen Rhomben umschlossene Form, mit 24 gleichwerthigen Kanten, welche 120° messen, und mit 14 Ecken, von denen 6 tetragonal und 8 trigonal sind.*) Die Flächen haben das Parameter-Verhältniss $\infty : 1 : 1$, und sind durch das Verhältniss ihrer beiden Diagonalen $\sqrt{2} : 1$ charakterisirt. Das Rhombendodekaëder ist, eben so wie das Hexaëder und das Oktaëder, einzig in seiner Art, und gestattet daher keine verschiedenen Varietäten.

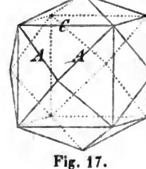


Fig. 17.

4. Die Tetrakishexaëder, Viermalsechsflächner oder Pyramidenwürfel; sie sind von 24 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Flächen allgemein durch das Parameter-Verhältniss $\infty : n : 1$ bestimmt werden, und deren Gestalt sich, nach Maassgabe des Werthes von n, bald mehr dem Hexaëder, bald mehr dem Rhombendodekaëder nähert, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 36 Kanten fallen die 12 längeren mit den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders zusammen; die Ecke zerfallen in 6 tetragonale und 8 sechsflächige Ecke. Es giebt möglicherweise eine zahllose Menge von Varietäten dieser Form.

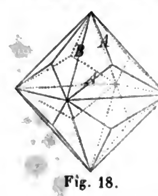


Fig. 18.

5. Die Triakisoktaëder, Dreimalachtflächner, oder Pyramidenoktaëder; sie sind gleichfalls von 24 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Flächen jedoch allgemein durch das Parameter-Verhältniss $m : 1 : 1$ bestimmt werden, und deren Gestalt sich, nach Maassgabe des Werthes von m, bald mehr dem Oktaëder, bald mehr dem Rhombendodekaëder nähert, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 36 Kanten fallen die 12 längeren mit den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders zusammen; die

*) Ueber diese Unterscheidung der Ecke vergl. Anfangsgründe S. 5.

Ecke unterscheiden sich als 6 ditetragonale und 8 trigonale Ecke. Möglicherweise kann es zahllose Varietäten dieser Form geben.

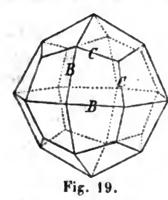


Fig. 19.

6. Die Ikositetraëder oder Vierundzwanzigflächner sind von 24 Deltoiden oder symmetrischen Trapezoiden umschlossene Formen, deren Flächen allgemein durch das Parameter - Verhältniss $m : m : 1$ bestimmt werden, und deren Gestalt sich, nach Maassgabe des Werthes von m, bald mehr dem Oktaëder, bald mehr dem Hexaëder nähert, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 48 Kanten fallen die 24 längeren paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Oktaëders, die 24 kürzeren paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Hexaëders; die Ecke zerfallen in 6 tetragonale, 8 trigonale und 12 rhombische Ecke. Auch diese Form kann in zahllosen Varietäten vorkommen.

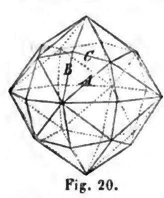


Fig. 20.

7. Die Hexakisoktaëder oder Sechsmalachtflächner sind von 48 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren Flächen allgemein durch das Parameter-Verhältniss $m : n : 1$ bestimmt werden, und deren Gestalt sich, nach Maassgabe der besonderen Werthe von m und n, bald mehr dieser, bald mehr jener der vorher aufgeführten Formen nähert, weshalb denn die Tetrakishexaëder, die Triakisoktaëder und die Ikositetraëder gewissermaassen als die ersten, das Hexaëder, das Oktaëder und das Rhombendodekaëder aber als die letzten Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 72 Kanten fallen die 24 mittleren paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Oktaëders, die 24 kürzesten paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Hexaëders, und die 24 längsten einzeln über die Kanten des eingeschriebenen Rhombendodekaëders. Die Ecke unterscheiden sich als 6 ditetragonale, als 8 sechsflächige (bald ditrigonale, bald hexagonale), und als 12 rhombische Ecke. Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Form.

Anm. Unter diesen Varietäten sind zwei Gruppen hervorzuheben, welche sich durch eine besondere Regelmässigkeit auszeichnen. Die erste Gruppe begreift diejenigen Hexakisoktaëder, deren sechsflächige Ecke hexagonale sind, oder deren längste und kürzeste Kanten gleiches Winkelmaass haben; die zweite Gruppe ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre längsten Kanten mit den Kanten des eingeschriebenen Rhombendodekaëders zusammenfallen, und folglich zu je sechs und sechs einander parallel sind. Wir wollen die ersteren die isogonalen, die andern die parallelkantigen Hexakisoktaëder nennen.

§. 55. Grundform, Ableitung und Bezeichnung.

Zur Grundform kann nur eine solche Form gewählt werden, deren Flächen ein dem Axenverhältnisse entsprechendes Parameter-Verhältniss haben;

(Anfangsgr. S. 20). Da nun jenes Verhältniss das der durchgängigen Gleichheit ist, so wird auch für die Grundform des Tesseralsystems das Parameter-Verhältniss 1 : 1 : 1 gefordert.

Denken wir uns um das Axensystem für dieses Verhältniss den vollständigen Inbegriff aller isoparametrischen Flächen, so erhalten wir das reguläre Oktaëder. Denn in jedem Raum-Octanten ist offenbar nur eine solche Fläche möglich; jede derselben wird durch ihre drei Nebenflächen als ein gleichseitiges Dreieck begränzt, und alle diese Dreiecke werden einander gleich sein. Das Oktaëder ist also die Grundform des Tesseralsystems, und der Buchstabe O liefert uns das krystallographische Zeichen, dessen Anblick unsrer Einbildungskraft die Gestalt des Oktaëders vorführen soll; (Anfangsgr. S. 21). Auch folgt hieraus, dass jede Halbaxe des Oktaëders den Werth 1 oder dieselbe Länge hat, wie jeder Parameter seiner Flächen.

Unter Benutzung der übrigen Parameter-Verhältnisse lassen sich nun die übrigen sechs plenotesseralen Formen sehr leicht durch Umschreibung aus dem Oktaëder ableiten, und mit den entsprechenden krystallographischen Zeichen versehen.

Man lege in jedes Oktaëdereck eine Fläche, welche den beiden, nicht zu diesem Ecke gehörigen Hauptaxen parallel ist, oder selbige in der Entfernung ∞ schneidet, so resultirt das Hexaëder, dessen Zeichen $\infty O \infty$ wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty : \infty : 1$ haben.

Man lege in jede Oktaëderkante eine Fläche, welche der nicht zu dieser Kante gehörigen Hauptaxe parallel ist, oder solche in der Entfernung ∞ schneidet, so resultirt das Rhombendodekaëder, dessen Zeichen ∞O wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty : 1 : 1$ haben.

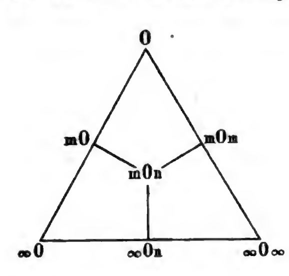
Man verlängere jede Halbaxe des Oktaëders nach einer rationalen Zahl m, welche grösser als 1 ist, und lege hierauf in jede Kante zwei Flächen, welche die nicht zu dieser Kante gehörige Hauptaxe beiderseits in der Entfernung m schneiden, so resultirt ein Triakisoktaëder, dessen Zeichen mO wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $m : 1 : 1$ haben.

Man verlängere abermals jede Halbaxe des Oktaëders nach einer Zahl m, und lege hierauf in jedes Oktaëdereck vier Flächen, von welchen jede einzelne über eine Fläche dieses Eckes dergestalt fällt, dass sie die beiden zu derselben Fläche gehörigen Halbaxen in der Entfernung m schneidet, so resultirt ein Ikositetraëder, dessen Zeichen mOm wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $m : m : 1$ haben.

Man vergrössere jede Halbaxe des Oktaëders nach einer rationalen Zahl n, die grösser als 1 ist, und lege hierauf in jedes Oktaëdereck vier Flächen, von welchen jede einzelne über eine Kante dieses Eckes dergestalt fällt, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe in der Entfernung n schneidet, während sie der nicht zu dieser Kante gehörigen Axe parallel ist, oder solche in der Entfernung ∞ schneidet, so resultirt ein Tetrakishexaëder, dessen Zeichen ∞On wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty : n : 1$ haben.

Man verlängere endlich jede Halbaxe des Oktaëders nach zwei verschiedenen rationalen Zahlen m und n, von denen $m > n$ ist, während beide > 1 sind, und lege hierauf in jedes Oktaëdereck acht Flächen, von welchen je zwei über eine Kante dieses Eckes dergestalt fallen, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe in der kleineren Entfernung n, die nicht zu dieser Kante gehörige Axe aber beiderseits in der grösseren Entfernung m schneiden, so resultirt ein Hexakisoktaëder, dessen Zeichen mOn wird, weil seine Flächen das Parameter-Verhältniss $m:n:1$ haben.

Die Uebergänge und Verwandtschaften der sieben plenotesseralen Formen lassen sich am besten aus folgendem triangulären Schema erkennen:



In der Mitte dieses Schemas steht das Hexakisoktaëder, welches als der eigentliche Repräsentant aller plenotesseralen Formen zu betrachten ist, wie ja auch in seinem Zeichen alle übrigen Zeichen enthalten sind. An den Eckpuncten des Dreieckes stehen die drei singulären Formen des Tesseralsystems; jede Seite des Dreieckes aber wird von einer der 24flächigen Formen eingenommen, mit welchen das Hexakisoktaëder durch unmittelbare Uebergänge verbunden ist, so wie es andere, mehr mittelbare Uebergänge in jene drei singulären Formen erkennen lässt. Alle diese und manche andere Verhältnisse, so wie die numerischen Bedingungen, welche für die Ableitungszahlen m und n bei dem einen oder anderen Uebergange erfüllt sein müssen, lassen sich aus vorstehendem Schema mit einem Blicke ersehen.

§. 56. Das Hexakisoktaëder als Repräsentant aller Formen.

Wie das Verhältniss $m:n:1$ das allgemeinste Parameter-Verhältniss ist, weil ja aus ihm alle übrigen Verhältnisse hervorgehen, sobald wir nur für m und n gewisse besondere Werthe einführen, so muss auch die durch dieses Verhältniss bestimmte Form die allgemeinste plenotesserale Form sein, in welcher die Bedingungen für die Existenz aller übrigen Formen gegeben sind. Da nun die analytisch-geometrische Methode fordert, das Besondere in dem Allgemeinen zu erfassen, so müssen wir zunächst untersuchen, welche Eigenschaften dieser allgemeinsten Form des Tesseralsystems zukommen. Wir können diese Eigenschaften in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) Das Hexakisoktaëder ist eine von 48 Flächen umschlossene Form;
2) Dasselbe besitzt dreierlei Ecke, nämlich
   a) 6 achtflächige Ecke an den Endpuncten der Hauptaxen,

b) 8 sechsflächige Ecke an den Endpuncten der trigonalen Zwischenaxen, und

c) 12 vierflächige Ecke an den Endpuncten der rhombischen Zwischenaxen;

3) Seine sämmtlichen Flächen begränzen sich gegenseitig als lauter gleiche und ähnliche, ungleichseitige Dreiecke.

Diese Sätze beweisen sich durch folgende sehr einfache Betrachtungen.

1. Das Parameter-Verhältniss $m:n:1$ erfordert offenbar in jedem Octanten 6 isoparametrische Flächen. Nehmen wir z. B. innerhalb des Octanten der positiven Halbaxen den Parameter 1 in der Axe der z, so wird der Parameter m einmal in die Axe der x, und einmal in die Axe der y fallen können, während zugleich der Parameter n in der Axe der y, oder in der Axe der x liegt, was also zwei verschiedene Flächen giebt. Da nun aber, bei der absoluten Gleichwerthigkeit aller drei Axen, die Parameter ihre Stellen beliebig vertauschen können, so wird der Parameter 1 auch eben so in der Axe der y, oder in der Axe der x anzunehmen sein, während die Parameter m und n ihre Stellen respective in den Axen der z und x, oder der y und z finden. Folglich wird es für das Verhältniss $m:n:1$ im Octanten der positiven Halbaxen 6 Flächen, und, weil Dasselbe für jeden anderen Octanten gilt, überhaupt 48 isoparametrische Flächen geben.

2. In jedem Octanten liegen an jeder Halbaxe zwei Flächen, welche dieselbe in der Entfernung 1 vom Mittelpuncte schneiden; da nun eine jede Halbaxe zwischen vier Octanten fällt, so müssen auch um jede derselben acht Flächen liegen, welche solche in einem und demselben Puncte schneiden. Folglich muss das Hexakisoktaëder 6 achtflächige, in den Hauptaxen liegende Eckpuncte haben.

In jeden einzelnen Octanten fallen aber überhaupt sechs Flächen, welche die trigonale Zwischenaxe desselben Octanten in einem Puncte schneiden. Im Octanten der positiven Halbaxen z. B. sind die Gleichungen dieser Flächen folgende:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1 \qquad \frac{x}{m}+y+\frac{z}{n}=1$$

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}+z=1 \qquad \frac{x}{n}+y+\frac{z}{m}=1$$

$$x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1 \qquad x+\frac{y}{n}+\frac{z}{m}=1$$

während die Gleichungen der trigonalen Zwischenaxe

$$x-y=0 \text{ und } z-x=0$$

sind. Welche von jenen sechs Flächengleichungen wir nun mit den Gleichungen der Zwischenaxe combiniren mögen, so erhalten wir für die Coordinaten des Durchschnittspunctes immer dieselben Werthe

$$x=y=z=\frac{mn}{mn+m+n}$$

woraus denn folgt, dass sich die sechs Flächen eines und desselben Octanten in einem und demselben Puncte der trigonalen Zwischenaxe schneiden, und dass

also das Hexakisoktaëder 8 sechsflächige, in den trigonalen Zwischenaxen liegende Ecke haben muss.

An der Gränze je zweier Neben-Octanten liegen allemal vier Flächen, welche die daselbst befindliche rhombische Zwischenaxe in einem Puncte schneiden. Diese Flächen sind z. B. an der Gränze des Octanten der positiven Halbaxen gegen den darunter liegenden Octanten durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1 \qquad \frac{x}{m}+y+\frac{z}{n}=1$$

$$-\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1 \qquad -\frac{x}{m}+y+\frac{z}{n}=1$$

während die Gleichungen der betreffenden rhombischen Zwischenaxe

$$x=0 \text{ und } y-z=0$$

sind. Welche von den erstern vier Gleichungen wir auch mit den Gleichungen der Zwischenaxe combiniren, so erhalten wir für die Coordinaten des Durchschnittspunctes immer dieselben Werthe

$$x=0,\quad y=z=\frac{n}{n+1}$$

woraus denn folgt, dass je vier, an der Gränze zweier Octanten liegende Flächen die dortige rhombische Zwischenaxe in einem und demselben Puncte schneiden, und dass also das Hexakisoktaëder 12 vierflächige, in den rhombischen Zwischenaxen liegende Ecke haben muss.

3. Jede Fläche trägt mit bei zur Bildung von drei Ecken und erleidet drei Durchschnitte von drei anderen Flächen, von welchen zwei mit ihr in denselben Octanten fallen, während die dritte in einen Neben-Octanten fällt; folglich wird jede Fläche als ein Dreieck begränzt werden. Alle diese Dreiecke müssen aber gleich und ähnlich sein, weil für ein jedes derselben die drei Seiten in den Verbindungslinien je eines achtflächigen, eines sechsflächigen und eines vierflächigen Eckpunctes desselben Octanten gegeben sind. Dass aber diese Dreiecke stets ungleichseitige sein müssen, diess lässt sich leicht zeigen. Ein jedes derselben trägt nämlich mit seinen drei Winkeln bei zur Bildung eines achtflächigen, eines sechsflächigen und eines vierflächigen Eckes; nennen wir diese drei Winkel w, w' und w'', so ist nothwendig

jeder Winkel $w < 45^0$
jeder Winkel $w' < 60^0$
jeder Winkel $w'' < 90^0$

Da nun aber $w+w'+w''=180^0$ ist, so folgt auch, dass

jeder Winkel $w' > 45^0$

sein muss; mithin kann niemals $w=w'$ sein; eben so folgt aber auch, dass

jeder Winkel $w'' > 75^0$

sein muss, woraus sich denn ergiebt, dass w'' niemals weder $=w$ noch $=w'$ werden kann. Folglich wird das Hexakisoktaëder von 48 gleichen und ähnlichen, stets ungleichseitigen Dreiecken gebildet.

Anm. Jede andere plenotesserale Form lässt sich als ein Quasi-Hexakisoktaëder betrachten, indem man ihre Flächen durch Theilungslinien in solche

Dreiecke zerlegt, welche den Flächen eines Hexakisoktaëders entsprechen. Diese Reduction aller Formen auf die Vorstellung eines Hexakisoktaëders erweist sich bei manchen Betrachtungen sehr vortheilhaft, wie wir bald sehen werden.

§. 57. Berechnung des Hexakisoktaëders mOn.

Wir haben bei der Berechnung des Hexakisoktaëders besonders zweierlei Probleme, nämlich die Bestimmung der Zwischenaxen und die der Kantenwinkel zu berücksichtigen.*)

1. Berechnung der Zwischenaxen.

In §. 56 haben wir gesehen, dass sich die Coordinaten des sechsflächigen Eckpunctes im Octanten der positiven Halbaxen mit den Werthen

$$x = y = z = \frac{mn}{mn+m+n}$$

bestimmen. Da nun dieser Eckpunct zugleich der Endpunct der trigonalen Zwischenaxe ist, so wird uns seine Centrodistanz die Grösse der halben Zwischenaxe liefern. Nach §. 28, I ist die Centrodistanz eines durch seine Coordinaten x, y und z gegebenen Punctes $= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; diess wird im vorliegenden Falle $= x\sqrt{3}$; folglich bestimmt sich T, oder die halbe trigonale Zwischenaxe des Hexakisoktaëders mOn, durch

$$T = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}$$

Wir fanden ferner in §. 56, dass sich die Coordinaten eines vierflächigen Eckpunctes mit den Werthen

$$x = 0 \quad y = z = \frac{n}{n+1}$$

bestimmen. Da nun dieser Eckpunct zugleich der Endpunct einer rhombischen Zwischenaxe ist, so liefert uns die Centrodistanz desselben die Grösse R der rhombischen Halbaxe mit dem Werthe $y\sqrt{2}$, oder

$$R = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Im Oktaëder wird also $T = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, und $R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; betrachten wir diese Grössen der beiderlei Zwischenaxen als die Grundwerthe derselben, so werden die Zahlen t und r, mit welchen solche Grundwerthe multiplicirt werden müssen, um wieder auf die allgemeinen Werthe von T und R zu gelangen,

$$t = \frac{3mn}{mn+m+n}$$

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

---

*) Die Einheit, welche diesen und allen folgenden Berechnungen tesseraler Formen zu Grunde liegt, ist die Länge der halben Hauptaxe. Die Berechnung der Kantenlinien habe ich nicht mitgetheilt, und verweise ich deshalb auf mein Lehrbuch der Krystallographie, wo alle Begränzungs-Elemente der Formen berechnet worden sind.

Diese beiden Zahlen t und r nennen wir die **Coëfficienten** der Zwischenaxen.

Anm. Im Rhombendodekaëder wird $t=\frac{3}{2}$; da nun in den **parallelkantigen** Hexakisoktaëdern (§. 54 Anm.) die längsten Kanten mit denen des Rhombendodekaëders zusammenfallen, und da die **Lage** dieser Kanten wesentlich durch die Grösse der trigonalen Zwischenaxe bestimmt wird, so muss in diesen Hexakisoktaëdern t genau denselben Werth haben, oder es muss

$$\frac{3mn}{mn+m+n}=\frac{3}{2}$$

sein. Daraus folgt $mn=m+n$, oder $n=\frac{m}{m-1}$; die parallelkantigen Hexakisoktaëder stehen daher unter der allgemeinen Zeichenform

$$m\text{O}\frac{m}{m-1}$$

und man kann es auf den ersten Blick erkennen, ob ein durch sein Zeichen gegebenes Hexakisoktaëder die in Rede stehende Eigenschaft besitzt. So sind z. B. die Varietäten $3\text{O}\frac{3}{2}$, $4\text{O}\frac{4}{3}$, $64\text{O}\frac{64}{63}$ parallelkantig.

2. **Berechnung der Kantenwinkel.**

Bezeichnen wir in einem jeden Hexakisoktaëder $m\text{O}n$ die **längsten** Kanten mit A, die **mittleren** Kanten mit B, die **kürzesten** Kanten mit C, so sind in beistehender Figur F', F'' und F''' diejenigen drei Flächen, welche mit der Fläche F eine Kante A, B und C bilden. Setzen wir also in dem allgemeinen Ausdrucke für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen (§. 32)

Fig. 21.

$$\cos W=-\frac{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}\sqrt{a'^2b'^2+c'^2a'^2+b'^2c'^2}}$$

zuvörderst für a, b und c die Parameter*) der Fläche F, also m, n und 1, dann aber für a', b' und c' successiv die Parameter der Fläche F', F'' und F''', indem wir berücksichtigen, dass in dem Ausdrucke von $\cos W$ unter a', b' und c' die, respective in der Axe der x, y und z liegenden Parameter gemeint, und solche durchgängig positiv vorausgesetzt sind, so erhalten wir folgende Werthe:

$$\cos A=-\frac{mn(mn+2)}{m^2(n^2+1)+n^2}=-\frac{mn(mn+2)}{K}$$

$$\cos B=-\frac{m^2(n^2+1)-n^2}{m^2(n^2+1)+n^2}=-\frac{m^2(n^2+1)-n^2}{K}$$

$$\cos C=-\frac{n(2m^2+n)}{m^2(n^2+1)+n^2}=-\frac{n(2m^2+n)}{K}$$

---

*) Eine jede Fläche des Hexakisoktaëders hat allemal den **kleinsten** Parameter 1 in derjenigen Halbaxe, mit welcher sie unmittelbar zum Durchschnitte kommt; ihre mittlere Kante verweist uns auf diejenige Halbaxe, in welcher der **mittlere** Parameter n,

Derselbe Ausdruck von $\cos W$ verhilft uns auch zur Bestimmung der **halben** Kantenwinkel, deren Kenntniss oft noch wichtiger ist. Die Fläche F bildet nämlich

die Kante $\frac{1}{2}A$ mit der Fläche, deren Gleichung $x-y=0$
- - $\frac{1}{2}B$ - - - - - $x=0$
- - $\frac{1}{2}C$ - - - - - $y-z=0$

Setzen wir also in dem Ausdruck von $\cos W$ ein für alle Mal:

$$a=m,\quad b=n,\quad c=1,$$

und successiv

$$a'=1,\quad b'=-1,\quad c'=\infty,$$
$$a'=0,\quad b'=\infty,\quad c'=\infty,$$
$$a'=\infty,\quad b'=1,\quad c'=-1,$$

so ergeben sich die Werthe:

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\frac{m-n}{\sqrt{2K}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{2K}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{m(n-1)}{\sqrt{2K}}$$

in welchen $K=m^2(n^2+1)+n^2$ ist, und aus welchen die Proportion

$$\cos\tfrac{1}{2}A:\cos\tfrac{1}{2}B:\cos\tfrac{1}{2}C = m-n:n\sqrt{2}:m(n-1)$$

folgt, mittels welcher man leicht aus einem dieser Winkel die beiden andern berechnen kann.

Eine **Gleichheit** der Kantenwinkel kann möglicherweise nur für die beiden Kanten A und C eintreten, und es folgt aus den Werthen von $\cos\frac{1}{2}A$ und $\cos\frac{1}{2}C$, dass für solche Gleichheit die Bedingung $n=\frac{2m}{m+1}$ erfüllt sein muss. Daher wird

$$m\mathrm{O}\frac{2m}{m+1}$$

die allgemeine Zeichenform für alle **isogonalen** Hexakisoktaëder (§. 54 Anm.), zu welchen also z. B. $3\mathrm{O}\frac{3}{2}$, $5\mathrm{O}\frac{5}{3}$ u. a. gehören. Die Varietät $3\mathrm{O}\frac{3}{2}$ besitzt die merkwürdige Eigenschaft, sowohl isogonal als auch parallelkantig zu sein.

§. 58. Berechnung der übrigen plenotesseralen Formen.

Wir könnten die Berechnung der übrigen plenotesseralen Formen unmittelbar auf ähnliche Weise vornehmen, wie solches in §. 57 für die Hexakisoktaëder geschehen ist. Da sich aber (nach §. 56 Anm.) eine jede dieser Formen als ein Hexakisoktaëder vorstellen lässt, und da ihr Zeichen in dem allgemeinen Zeichen $m\mathrm{O}n$ enthalten ist, so gelangen wir weit kürzer zum Ziele,

---

und ihre kürzeste Kante auf diejenige Halbaxe, in welcher der **grösste** Parameter m liegt. Man wird hiernach leicht für jede Fläche ihre Gleichung aus der Figur ablesen können.

wenn wir in denen für das Hexakisoktaëder gefundenen Resultaten statt m und n diejenigen Werthe einsetzen, welche irgend einer anderen Form zukommen.

a. Berechnung der Ikositetraëder mOm.

Setzen wir in den Resultaten des §. 57 $n=m$, so gelangen wir auf die zur Berechnung der Ikositetraëder dienenden Formeln.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen.

$$t = \frac{3m}{m+2},\ r = \frac{2m}{m+1}$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A = -1$$
$$\cos B = -\frac{m^2}{m^2+2}$$
$$\cos C = -\frac{2m+1}{m^2+2}$$

Die Kante A existirt also nicht mehr als solche, weil sie 180° misst; ihre Kantenlinie entspricht der symmetrischen Diagonale der Deltoide, zu denen sich je zwei Flächen des Hexakisoktaëders vereinigen, indem sie in eine einzige Ebene fallen; die Ikositetraëder lassen sich daher als solche Hexakisoktaëder vorstellen, deren längste Kanten 180° messen.

b. Berechnung der Triakisoktaëder mO.

Setzen wir in den Resultaten des §. 57 $n=1$, so erhalten wir die zur Berechnung der Triakisoktaëder dienenden Formeln.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen.

$$t = \frac{3m}{2m+1},\ r = 1$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A = -\frac{m(m+2)}{2m^2+}$$
$$\cos B = -\frac{2m-1}{2m^2+1}$$
$$\cos C = -1$$

also verschwindet die Kante C; ihre Kantenlinie entspricht der Höhenlinie der gleichschenkeligen Dreiecke, zu welchen sich je zwei Flächen des Hexakisoktaëders vereinigen, indem sie in eine Ebene fallen; die Triakisoktaëder sind daher solche Hexakisoktaëder, deren kürzeste Kanten 180° messen.

c. Berechnung der Tetrakishexaëder ∞On.

Setzen wir in den Resultaten des §. 57 $m=\infty$, so ergeben sich die Formeln zur Berechnung der Tetrakishexaëder.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen.

$$t = \frac{3n}{n+1},\ r = \frac{2n}{n+1}$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A = -\frac{n^2}{n^2+1}$$
$$\cos B = -1$$
$$\cos C = -\frac{2n}{n^2+1}$$

Hieraus folgt, dass die Kanten B verschwinden; ihre Kantenlinien erscheinen nur noch als die Höhenlinien der gleichschenkeligen Dreiecke, zu welchen sich je zwei Flächen des Hexakisoktaëders vereinigen, indem dasselbe in ein Tetrakishexaëder übergeht; diese Tetrakishexaëder lassen sich daher als solche Hexakisoktaëder betrachten, deren mittlere Kanten 180° messen.

Da $\cos A = \cos C$ wird, wenn $n=2$ ist, so ist die Varietät $\infty O2$ isogonal, d. h. ihre zweierlei Kanten haben gleiches Winkelmaass, und ihre sechsflächigen Ecke sind hexagonal.

d. Berechnung des Rhombendodekaëders ∞O.

Setzt man in den für ∞On gefundenen Formeln $n=1$, so ergiebt sich für das Rhombendodekaëder:

$$t = \tfrac{1}{2},\quad r = 1$$
$$\cos A = -\tfrac{1}{2}, \text{ folglich } A = 120^0$$
$$\cos B = -1$$
$$\cos C = -1$$

Die Kanten B und C verschwinden also; je vier an einem rhombischen Ecke des Hexakisoktaëders liegende Flächen fallen in eine Ebene, und bilden einen Rhombus, dessen halbe Diagonalen noch die Kanten B und C repräsentiren. Das Rhombendodekaëder lässt sich daher als ein Hexakisoktaëder vorstellen, dessen mittlere und kürzeste Kanten 180° messen.

e. Berechnung des Oktaëders O.

Setzt man in den für mO, oder auch in den für mOm gefundenen Formeln $m=1$, so erhält man für das Oktaëder:

$$t = 1,\quad r = 1$$
$$\cos A = -1$$
$$\cos B = -\tfrac{1}{3}, \text{ also } B = 109^0\ 28'\ 16''$$
$$\cos C = -1$$

Es fallen also je 6, zu einem sechsflächigen Eckpuncte des Hexakisoktaëders gehörige Flächen in eine Ebene, und bilden ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhenlinien uns noch die Kanten A und C vergegenwärtigen. Das Oktaëder lässt sich daher als ein Hexakisoktaëder betrachten, dessen längste und kürzeste Kanten 180° messen.

f. Berechnung des Hexaëders $\infty O \infty$.

Setzt man in den für mOm gefundenen Formeln $m=\infty$, oder auch in den für ∞On gefundenen Formeln $n=\infty$, so erhält man für das Hexaëder:

$t = 3, \quad r = 2$
$\cos A = -1$
$\cos B = -1$
$\cos C = 0, \quad \text{also } C = 90^0$

Demnach fallen je 8, zu einem achtflächigen Eckpuncte des Hexakisoktaëders gehörige Flächen in eine Ebene, und bilden ein Quadrat, dessen Diagonalen und Transversalen uns noch die Kanten A und B vergegenwärtigen. Das Hexaëder lässt sich daher als ein Hexakisoktaëder deuten, dessen längste und mittlere Kanten 180⁰ messen.

Zweites Capitel.

Hemiëdrische und tetartoëdrische Formen des Tesseralsystems.

§. 59. Uebersicht der semitesseralen Formen.

In der Natur sind bekanntlich bis jetzt sechs wirklich hemiëdrische Formen des Tesseralsystems nachgewiesen worden, von welchen vier geneigtflächig und zwei parallelflächig sind, was einen wichtigen Unterschied begründet, weil an derselben Species nie zugleich geneigtflächig- und parallelflächig-semitesserale Formen auftreten. Von jeder dieser Formen giebt es übrigens zwei, einander vollkommen gleiche und ähnliche, und nur durch ihre Stellung verschiedene Gegenkörper.

A. Geneigtflächig-semitesserale Formen.

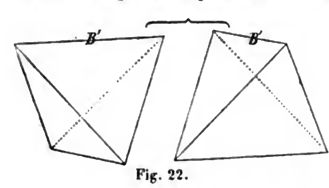


Fig. 22.

1. Das Tetraëder oder der Vierflächner; eine von 4 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, deren 6 Kanten 70⁰ 32′ messen, und deren Flächen das Parameterverhältniss 1 : 1 : 1 haben. Diese Form ist ihrer Gestaltung nach einzig in ihrer Art, obwohl ihrer gegenseitigen Stellung nach zwei Tetraëder zu unterscheiden sind.

2. Die Trigondodekaëder; sie sind von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $m : m : 1$ haben, und sich, nach Maassgabe des Werthes von m, bald in 4 dreizählige, bald in 6 zweizählige Flächensysteme gruppiren, weshalb denn auch die Gestalt selbst bald mehr dem Tetraë-

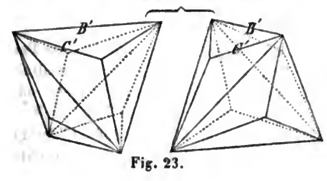


Fig. 23.

der, bald mehr dem Hexaëder genähert ist, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 18 Kanten fallen die 6 längeren mit den Kanten des eingeschriebenen Tetraëders zusammen; die Ecke sind 4 trigonale und 4 sechsflächige. Es kann zahllose Varietäten dieser Form geben.

3. Die Deltoiddodekaëder; sie sind von 12 Deltoiden oder symmetrischen Trapezoiden umschlossene Formen, deren Flächen das Parameter-Verhältnis $m:1:1$ haben, und sich, nach Maassgabe des Werthes von m, mehr oder weniger auffallend in 4 dreiflächige Systeme gruppiren, weshalb auch die Gestalt bald mehr dem Tetraëder, bald mehr dem Rhombendodekaëder genähert ist, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 24 Kanten fallen die 12 längern paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Tetraëders; die Ecke sind 4 spitzere und 4 stumpfere trigonale, sowie 6 rhombische. Möglicherweise giebt es zahllose Varietäten dieser Form.

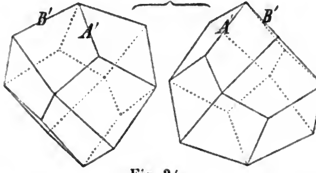


Fig. 24.

4. Die Hexakistetraëder oder Sechsmalvierflächner; sie sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $m:n:1$ haben, und einer sehr verschiedenen Gruppirung fähig sind, weshalb denn auch die Gestalt bald mehr dieser, bald mehr jener Form genähert ist, und die Trigondodekaëder, die Deltoiddodekaëder sowie die Tetrakishexaëder als die nächsten, das Tetraëder, das Hexaëder und das Rhombendodekaëder als die letzten Gränzformen derselben zu betrachten sind. Von den 36 Kanten fallen die 12 mittleren paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Tetraëders. Die Ecke unterscheiden sich als 4 spitzere und 4 stumpfere sechsflächige, sowie als 6 rhombische. Es können zahllose Varietäten von dieser Form existiren.

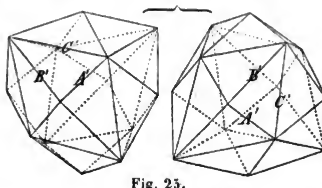


Fig. 25.

B. Parallelflächig-semitesserale Formen.

1. Die Pentagondodekaëder; sie sind von 12 symmetrischen Pentagonen umschlossene Formen, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty:n:1$ haben, und sich, nach Maassgabe des Werthes von n, mehr oder weniger auffallend in 6 zweizählige Systeme gruppiren, weshalb auch die Gestalt bald mehr dem Hexaëder, bald mehr dem Rhombendodekaëder genähert ist, welche als die beiden Gränzformen derselben zu betrachten

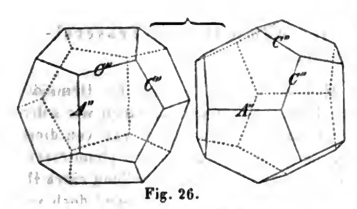


Fig. 26.

sind. Von den 30 Kanten fallen die 6 regelmässigen (längeren oder kürzeren) über die Flächen des eingeschriebenen Hexaëders; die Ecke zerfallen in 8 trigonale, und in 12 unregelmässig dreiflächige. Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten. Das reguläre Pentagondodekaëder der Geometrie ist zwar als Krystallform unmöglich, bildet aber doch die ideale Gränzform zwischen den beiden Gruppen, in welche die Pentagondodekaëder überhaupt zerfallen, je nachdem die fünfte Seite ihrer pentagonalen Flächen grösser oder kleiner ist, als jede der vier übrigen.

2. Die Dyakisdodekaëder oder Zweimalzwölfflächner; sie sind von 24 gleichschenkeligen Trapezoiden oder auch Trapezen umschlossene Formen, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $m:n:1$ haben und sich, nach Maassgabe der Werthe von m und n, verschiedentlich, meist aber zu zweizähligen Flächensystemen gruppiren, weshalb denn die allgemeine Gestalt bald dieser bald jener Form genähert ist, und die Pentagondodekaëder, die Ikositetraëder, sowie die Triakisoktaëder als die nächsten, das Hexaëder, das Oktaëder und das Rhombendodekaëder als die letzten Gränzformen der Dyakisdodekaëder zu betrachten sind. Von den 48 Kanten fallen die 12 längsten über die Flächen, die 12 kürzesten paarweise über die regelmässigen Kanten des eingeschriebenen Pentagondodekaëders. Die Ecke unterscheiden sich als 6 rhombische, 8 trigonale und 12 unregelmässig vierflächige Ecke. Es sind zahllose Varietäten möglich, unter welchen diejenigen, deren Flächen Trapeze sind, in jedem Flächenpaare drei parallele Kanten besitzen, weshalb sie parallelkantige Dyakisdodekaëder genannt werden können.

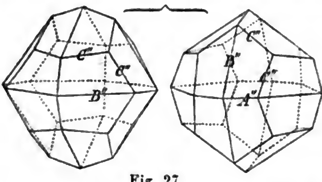


Fig. 27.

Anm. Die Kanten, welche hier die kürzesten genannt worden sind, pflegen es in der Regel auch wirklich zu sein. Eigentlich aber ist diese Bezeichnung nicht ganz richtig, weil es Dyakisdodekaëder geben kann, in welchen dieselben Kanten länger sind, als die unregelmässigen Kanten. Genauer würde es daher sein, die Kanten der Dyakisdodekaëder zuvörderst als symmetrische und als unregelmässige, dann aber die ersteren als längere und als kürzere symmetrische Kanten zu unterscheiden, welche Benennungen in allen Fällen richtig bleiben. Der Kürze wegen behalten wir jedoch einstweilen noch die obige, allen bis jetzt in der Natur nachgewiesenen Dyakisdodekaëdern entsprechende Unterscheidung bei.

§. 60. Verschiedene Arten der Hemiëdrie im Tesseralsysteme.

Wollen wir die verschiedenen Modalitäten und Gesetze der Hemiëdrie des Tesseralsystems ganz allgemein und sicher erkennen, so haben wir solche zunächst für das Hexakisoktaëder aufzusuchen. Denn was von dieser Form gilt, das wird auch, mutatis mutandis, von jeder anderen plenotesseralen Form gelten müssen, weil solche jedenfalls auf die Vorstellung eines Hexakisoktaëders zurückgeführt werden kann (§. 56 Anm.), und weil doch vorauszusetzen ist, dass jede Form der Hemiëdrie unterliegen wird, sobald diess für eine Form der Fall ist.

Unter Berücksichtigung des allgemeinen Gesetzes der Hemiëdrie (Anfangsgr. S. 16), kraft dessen für die bleibenden Flächen jedenfalls eine ringsum symmetrische Vertheilung um das Axensystem erfordert wird, erhalten wir nun für das Hexakisoktaëder folgende Resultate.

1. Das Hexakisoktaëder ist der Hemiëdrie fähig nach den abwechselnden einzelnen Flächen. Die dadurch entstehende Form ist, wie sich leicht zeigen lässt, ein von 24 unregelmässigen Pentagonen umschlossener Körper. Diese Art der Hemiëdrie wurde jedoch bis jetzt noch nicht beobachtet, weshalb wir sie auch hier als eine mögliche zwar erwähnen, als eine in Wirklichkeit noch unbekannte aber weiter nicht berücksichtigen.

2. Das Hexakisoktaëder ist der Hemiëdrie fähig nach denen an den abwechselnden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaaren. Denken wir uns die so bestimmten Flächenpaare allein ausgebildet, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Dyakisdodekaëder. Nach dem einfachsten Resultate, welches diese Hemiëdrie liefert, können wir sie auch die dodekaëdrische Hemiëdrie nennen.

3. Das Hexakisoktaëder ist endlich der Hemiëdrie fähig nach den vier abwechselnden sechszähligen Flächensystemen, oder nach denen in den vier abwechselnden Octanten gelegenen Flächensystemen. Denken wir uns diese Flächensysteme allein ausgebildet, so verwandelt sich die holoëdrische Stammform in ein Hexakistetraëder. Nach dem einfachsten Resultate, welches diese Art der Hemiëdrie liefert, können wir sie auch die tetraëdrische Hemiëdrie nennen.

Eine andere Modalität der Hemiëdrie, als die drei hier genannten, kann am Hexakisoktaëder und also im Tesseralsysteme überhaupt nicht vorkommen, weshalb wir uns denn auch, sofern wir nur die wirklich nachgewiesenen Modalitäten berücksichtigen, nur mit der tetraëdrischen und dodekaëdrischen Hemiëdrie zu beschäftigen haben.

§. 61. Tetraëdrische oder geneigtflächige Hemiëdrie.

Dass wirklich ein jedes Hexakisoktaëder mOn, sobald nur seine abwechselnden sechszähligen Flächensysteme ausgebildet sind, in ein Hexakistetraëder übergehen müsse, diess lässt sich sowohl durch Rechnung als auch

durch Construction sehr leicht beweisen.*) Daher wird denn $\frac{mOn}{2}$ das allgemeine Zeichen eines Hexakistetraëders. Da jedoch keine der beiden Flächenhälften ein Vorrecht vor der andern besitzt, da also die Natur bald die eine, bald die andere, bisweilen auch beide zugleich zur Ausbildung gebracht hat, so werden auch die beiden durch ihre Stellung verschiedenen hemiëdrischen Gegenkörper als $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{mO'n}{2}$, oder als $+\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{mOn}{2}$ zu unterscheiden sein, bei welcher letzteren Unterscheidungsweise jedoch das Vorzeichen + ohne Nachtheil weggelassen werden kann.

Lassen wir nun dasselbe Gesetz der Hemiëdrie auch für die übrigen sechs Arten von plenotesseralen Formen in Erfüllung gehen, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Die Triakisoktaëder mO, deren dreizählige Flächensysteme die Aequivalente der sechszähligen Flächensysteme der Hexakisoktaëder sind, verwandeln sich in Deltoiddodekaëder, welche daher das allgemeine Zeichen $\frac{mO}{2}$ erhalten müssen.

Die Ikositetraëder mOm, deren dreizählige Flächensysteme gleichfalls die Aequivalente der sechszähligen Flächensysteme von mOn darstellen, verwandeln sich in Trigondodekaëder, für welche also das Zeichen $\frac{mOm}{2}$ gefordert wird.

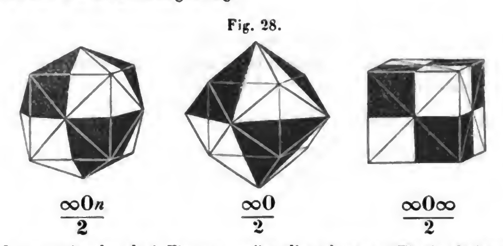
Das Oktaëder O, dessen einzelne Flächen die sechszähligen Flächensysteme von mOn repräsentiren, wird nur mit seinen abwechselnden Flächen ausgebildet erscheinen, und folglich als Tetraëder auftreten, dessen Zeichen daher $\frac{O}{2}$ ist.

Die drei noch übrigen plenotesseralen Formen, nämlich die Tetrakishexaëder, das Rhombendodekaëder und das Hexaëder sind zwar gleichfalls dieser Hemiëdrie unterworfen, ohne jedoch eine wirkliche Gestaltveränderung zu erleiden, weshalb sie gerade so erscheinen, als ob sie holoëdrisch geblieben wären. Desungeachtet sind auch sie als hemiëdrische Formen zu beurtheilen, sobald sie an einem Minerale vorkommen, welches Tetraëder, Trigondodekaëder u. a. tetraëdrisch-semitesserale Formen zeigt; sie sind nur noch scheinbar holoëdrische Formen, an denen gleichfalls die Hälfte der Flächen verschwunden ist, was jedoch die Gestalt unverändert lässt, weil die rückständigen Flächen mit den verschwundenen Flächen in dieselben Ebenen fallen. Diess wird besonders einleuchtend, wenn man sich eine jede der drei Formen durch angemessene Theilung ihrer Flächen in ein Quasi-Hexakisok-

*) Vergl. mein Lehrbuch der Krystallographie, I, S. 127 f.

taëder verwandelt, und dann auch für sie buchstäblich genau das Gesetz der Hemiëdrie zur Verwirklichung bringt.

Fig. 28.



In vorstehenden drei Figuren stellen die schwarzen Theile diejenigen Flächenfelder vor, welche eigentlich als verschwunden zu denken, während die weiss gelassenen Flächenfelder die wirklich rückständigen sind. Da nun aber jedes verschwindende Flächenfeld mit einem bleibenden Flächenfelde in eine Ebene fällt, so wird in der geometrischen Erscheinungsweise dieser Formen gar nichts geändert werden, obgleich die Bedeutung ihrer Flächen eine ganz andere ist. Im Hexaëder z. B. besteht jede Fläche streng genommen nur noch aus zweien, an einer Diagonale anliegenden quadratischen Feldern, welche sich aber, weil sie in eine Ebene fallen, zur vollständigen Hexaëderfläche ausdehnen; und auf ähnliche Weise verhält es sich im Rhombendodekaëder und Tetrakishexaëder. Diese drei Formen sind also da, wo sie zugleich mit Tetraëdern vorkommen, wenn auch nicht ihrer Erscheinung, so doch ihrem Wesen nach als hemiëdrische Formen zu deuten, was auch durch die Berechnung, und überdiess noch dadurch vollkommen bestätigt wird, dass in dem allgemeinen Schema des Tesseralsystems (S. 81) der gegenseitige Zusammenhang und die Uebergänge der Formen ganz ungestört erhalten bleiben, wenn man darin diejenigen vier Formen, welche durch die tetraëdrische Hemiëdrie eine wirkliche Gestaltveränderung erleiden, mit ihren hemiëdrischen Zeichen einschreibt.

§. 62. Berechnung der Hexakistetraëder.

Gleichwie $\frac{mOn}{2}$ das allgemeinste Zeichen einer tetraëdrisch-semitesseralen Form ist, so sind die Hexakistetraëder als die allgemeinen Repräsentanten dieser Formen zu betrachten, weshalb denn auch die Berechnung zunächst für sie auszuführen ist.

1. Berechnung der Zwischenaxen.

Was nun zuvörderst die Zwischenaxen der tetraëdrisch-semitesseralen Formen überhaupt betrifft, so gehen die rhombischen Zwischenaxen unverändert aus der holoëdrischen Stammform in die hemiëdrische Form über; sie bilden daher auch keinen neuen Gegenstand der Berechnung, haben aber überhaupt wenig Bedeutung, weil ihre Endpuncte in den wirklich hemiëdrisch umgestalteten Formen gar nicht mehr als Puncte von besonderer

Lage ausgezeichnet sind. Die trigonalen Zwischenaxen dagegen erleiden in den tetraëdrisch-semitesseralen Formen eine eigenthümliche Veränderung, welche man als das Eintreten eines polaren Gegensatzes ihrer beiden Halbaxen bezeichnen kann, wie ja überhaupt diese ganze Hemiëdrie als ein Gegensatz charakterisirt ist, der sich zwischen je zweien Gegenoctanten des Axensystems geltend macht.

Jede trigonale Zwischenaxe zerfällt nämlich in zwei ungleiche und daher ungleichwerthige Halbaxen, indem die eine Halbaxe ihre ursprüngliche Grösse behauptet, während die andere eine angemessene Verlängerung erleidet. In den tetraëdrisch-semitesseralen Formen haben wir daher für jede trigonale Zwischenaxe die holoëdrische und die hemiëdrische Halbaxe zu unterscheiden, und diese letztere noch besonders zu berechnen.

Im Hexakistetraëder werden die holoëdrischen Halbaxen von den stumpferen, die hemiëdrischen Halbaxen von den spitzeren sechsflächigen Eckpuncten begränzt. Vergleichen wir das in §. 57 (S. 85) stehende Bild des Hexakisoktaëders mit dem S. 90 stehenden ersten Bilde des Hexakistetraëders, so ergiebt sich, dass wir die Grösse der hemiëdrischen Halbaxe finden werden, wenn wir z. B. die Gleichung der Fläche F' mit den Gleichungen der, in dem links anliegenden Octanten fallenden trigonalen Zwischenaxe combiniren; denn der Durchschnittspunct jener Fläche mit dieser Zwischenaxe ist ja der Endpunct ihrer hemiëdrischen Halbaxe. Nun ist die Gleichung der Fläche F'

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1$$

und es sind die Gleichungen der erwähnten Zwischenaxe

$$x + y = 0 \text{ und } z - x = 0$$

Führt man die Bedingungen dieser letzteren Gleichungen in die Gleichung von F' ein, so erhält man

$$x = y = z = \frac{mn}{mn+m-n}$$

als die Coordinaten des gesuchten Endpunctes; seine Centrodistanz, oder die Grösse der hemiëdrischen Halbaxe wird daher

$$T' = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m-n}$$

Nennen wir die Zahl, mit welcher die halbe trigonale Zwischenaxe des Oktaëders multiplicirt werden muss, um auf den Werth von T' zu gelangen, den Coëfficienten der hemiëdrischen Halbaxe, und bezeichnen solche mit τ, so bestimmt sich endlich

$$\tau = \frac{3mn}{mn+m-n}$$

wogegen für die holoëdrische Halbaxe der oben in §. 57 gefundene Werth

$$t = \frac{3mn}{mn+m+n}$$

unverändert geltend bleibt.

2. Berechnung der Kanten.

Bei der Vergrösserung der abwechselnden sechszähligen Flächensysteme von mOn werden natürlich die beiden Kanten A und C ihrem Winkelmaasse nach unverändert aus der holoëdrischen Stammform auf die hemiëdrische Form übergehen, und nur ihrem Linearmaasse nach, durch die Verlängerung der Kanten C, in das entgegengesetzte Verhältniss treten, so dass jetzt die Kante C als die längste, die Kante A als die kürzeste Kante erscheint. Wir müssen daher auch beiden Kanten dieselbe Buchstaben-Signatur lassen, wollen sie aber mit einem Accente versehen, um anzudeuten, dass sie als Kanten der hemiëdrischen Form gedacht werden sollen.

Die Kanten B verschwinden durch die Hemiëdrie; an ihrer Stelle erscheinen aber neue Kanten, als die mittleren Kanten des Hexakistetraëders, für welche wir nun füglich den Buchstaben B mit einem Accente benutzen können. Demnach werden A', B' und C' die Signaturbuchstaben der kürzesten, der mittleren und der längsten Kanten eines jeden Hexakistetraëders.

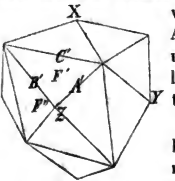


Fig. 29.

Da nun die Winkel A' und C' dieselben Werthe haben, wie A und C im Hexakisoktaëder, so ist auch nur noch die Kante B' zu berechnen. Eine solche Kante ist z. B. diejenige, welche in beistehender Figur die Fläche F' mit der Fläche F'' bildet, welche erstere die obige Gleichung hat*), während die andere durch die Gleichung

$$-\frac{x}{m}-\frac{y}{n}+z=1$$

gegeben ist. Setzt man also in dem allgemeinen Ausdrucke für $\cos W$ (§. 32)

$$a=n,\quad b=m,\quad c=1$$
$$a'=-m,\ b'=-n,\ c'=1$$

so erhält man den Werth von $\cos B'$; überhaupt aber bestimmen sich für die drei Kanten A', B' und C', wenn wiederum $m^2(n^2+1)+n^2=K$ gesetzt wird

$$\cos A'=-\frac{mn(mn+2)}{K}$$
$$\cos B'=-\frac{mn(mn-2)}{K}$$
$$\cos C'=-\frac{n(2m^2+n)}{K}$$

Will man den Cosinus der halben Kante B' haben, so beachte man nur, dass die so eben berechnete Kante B' durch diejenige Fläche halbirt wird,

*) Jede Fläche eines Hexakistetraëders hat ihren kleinsten Parameter 1 in derjenigen Halbaxe, an welcher ihr rhombischer Eckpunct liegt; von diesem Puncte aus verweist uns eine, rechtwinkelig gegen die längste Kante gezogene Linie auf die Halbaxe, in welcher der mittlere Parameter n liegt; die längste Kante selbst aber verweist uns auf die Halbaxe, in welcher der grösste Parameter m enthalten ist.

deren Gleichung $x+y=0$ ist. Behält man also für a, b und c ihre vorigen Werthe, und nimmt $a'=1$, $b'=1$ und $c'=\infty$, so folgt aus dem Ausdrucke von $\cos W$:

$$\cos\tfrac{1}{2}B' = \frac{m+n}{\sqrt{2K}}$$

und es gilt daher die Proportion:

$$\cos\tfrac{1}{2}A' : \cos\tfrac{1}{2}B' : \cos\tfrac{1}{2}C' = m-n : m+n : m(n-1)$$

Anm. Vergleicht man diese Werthe unter einander, so ergiebt sich

dass $A'=C'$, wenn $n=\dfrac{2m}{m+1}$, wie oben in §. 57 Anm.

und dass $B'=C'$, wenn $n=\dfrac{2m}{m-1}$.

Es giebt daher zweierlei **isogonale** Hexakistetraëder; in den einen sind die **stumpfen**, in den anderen sind die **spitzen** sechsflächigen Ecke hexagonal.

§. 63. Berechnung der übrigen tetraëdrisch-semitesseralen Formen.

Führen wir in den Resultaten des §. 62 für m und n die den übrigen tetraëdrisch-semitesseralen Formen entsprechenden Werthe ein, so gelangen wir auf die zur Berechnung dieser Formen dienenden Ausdrücke.

a. Berechnung der Trigondodekaëder $\frac{mOm}{2}$.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen.

$$t=\frac{3m}{m+2},\quad \tau=3$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A' = -1,\ \text{also}\ A'=180^0$$

$$\cos B' = -\frac{m^2-2}{m^2+2}$$

$$\cos C' = -\frac{2m+1}{m^2+2} = \cos C\ (\text{§. 58 a})$$

Setzt man $\cos B'=\cos C'$, so ergiebt sich für m der Werth 3; folglich ist $\frac{3O3}{2}$ diejenige Varietät, deren Kanten gleiches Winkelmaass haben, und deren sechsflächige Ecke hexagonale sind.

b. Berechnung der Deltoiddodekaëder $\frac{mO}{2}$.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen.

$$t=\frac{3m}{2m+1},\quad \tau=\frac{3m}{2m-1}$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A' = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1} = \cos A\ (\text{§. 58 b})$$

$$\cos B' = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}$$
$$\cos C' = -1, \text{ also } C' = 180^\circ.$$

Eine Gleichheit der Kanten A' und B' kann nicht vorkommen.

c. Berechnung des Tetraëders $\frac{O}{2}$.

1. Coëfficienten der trigonalen Zwischenaxen.

$$t = 1, \quad \tau = 3$$

2. Kantenwinkel.

$$\cos A' = -1, \text{ also } A' = 180^\circ$$
$$\cos B' = \tfrac{1}{3}, \text{ also } B' = 70^\circ 31' 44''$$
$$\cos C' = -1, \text{ also } C' = 180^\circ.$$

Setzen wir ferner in denen für das Hexakistetraëder gefundenen Resultaten $m = \infty$, so gelangen wir genau auf die in §. 58, bei c für das Tetrakishexaëder erhaltenen Resultate, was offenbar beweist, dass auch diese Formen als hemiëdrische Formen oder als Quasi-Hexakistetraëder zu interpretiren sind, sobald sie mit Tetraëdern und anderen geneigtflächig-semitesseralen Formen auftreten. Dasselbe gilt für das Rhombendodekaëder und Hexaëder, wenn man in denen für das Hexakistetraëder geltenden Ausdrücken $m = \infty$, und $n = 1$ oder auch $= \infty$ setzt. Diese Ergebnisse liefern also einen mathematischen Beweis für die Richtigkeit der zu Ende von §. 61 gegebenen Deutung der Tetrakishexaëder, des Rhombendodekaëders und des Hexaëders in den tetraëdrisch-semitesseralen Krystallreihen, und bestätigen zugleich die Behauptung, dass eigentlich das ganze Krystallsystem mit allen seinen Formen dieser Hemiëdrie unterworfen ist.

§. 64. Dodekaëdrische oder parallelflächige Hemiëdrie.

Der Beweis dafür, dass sich ein jedes Hexakisoktaëder wirklich in ein Dyakisdodekaëder verwandeln müsse, sobald nur die an seinen abwechselnden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare ausgebildet sind, ist sehr leicht zu geben.*) Die Dyakisdodekaëder, als hemiëdrische Formen des Hexakisoktaëder, fordern daher gleichfalls das Zeichen $\frac{mOn}{2}$; um sie jedoch von den Hexakistetraëdern in der Bezeichnung zu unterscheiden, wollen wir ihr Zeichen in ein paar parallele Klammern schliessen, und also $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ schreiben.

Kenngott bedient sich des Zeichens $\frac{mOn}{\overline{\overline{2}}}$, in welchem uns die beiden parallelen Trennungsstriche gleichfalls darauf verweisen, dass die parallelflächig-hemiëdrische Form des Hexakisoktaëders gemeint ist.

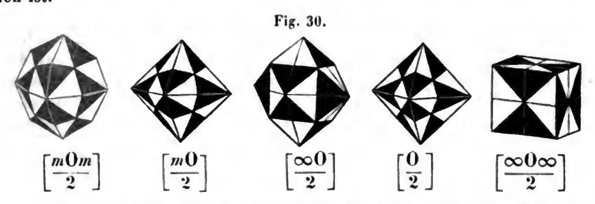
*) Vergl. mein Lehrbuch der Krystallographie, I, S. 131 f.

Untersuchen wir nun, welchen Einfluss dieselbe Art der Hemiëdrie auf die übrigen sechs Arten von plenotesseralen Formen ausübt, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Da die einzelnen Flächen des Tetrakishexaëders als die vollgiltigen Aequivalente der an den mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare des Hexakisoktaëders zu betrachten sind, so werden die Tetrakishexaëder genau demselben Gesetze der Hemiëdrie unterliegen, wenn wir sie uns nur mit ihren abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet denken; sie verwandeln sich dadurch in Pentagondodekaëder, deren allgemeines Zeichen daher $\frac{\infty On}{2}$ geschrieben werden muss.

Alle noch übrigen plenotesseralen Formen, also die Ikositetraëder, die Triakisoktaëder, das Rhombendodekaëder, das Oktaëder und das Hexaëder werden zwar gleichfalls derselben Hemiëdrie unterliegen, ohne jedoch irgend eine wesentliche Gestaltveränderung zu erleiden. Von der Richtigkeit dieser Behauptung wird man sich am leichtesten überzeugen, wenn man diese fünf Formen durch eine angemessene Theilung ihrer Flächen in Quasi-Hexakisoktaëder verwandelt, und dann auch für sie buchstäblich genau dasselbe Gesetz in Erfüllung bringt, nach welchem die Dyakisdodekaëder aus dem Hexakisoktaëder abgeleitet werden; das Gesetz nämlich, dass nur die an den abwechselnden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare allein ausgebildet sein sollen. Man erkennt dann, dass die bleibenden und die verschwindenden Flächenfelder immer zu je zwei oder mehren in eine Ebene fallen, weshalb denn die Hemiëdrie scheinbar gar keinen Erfolg hat, obgleich streng genommen die Bedeutung der Flächen eine wesentlich andere geworden ist.

Fig. 30.



In vorstehenden Figuren entsprechen die weiss gelassenen Flächenfelder den bleibenden, die schwarzen Flächenfelder dagegen denjenigen Flächenpaaren, welche eigentlich als verschwunden zu denken sind. Da nun aber auf jeder Fläche diese beiderlei Flächenfelder in einer Ebene liegen, so bleiben scheinbar die ganzen Flächen, und die Hemiëdrie lässt die Formen unverändert in ihrer Erscheinungsweise, während doch das Wesen derselben nun anders zu beurtheilen ist. Im Hexaëder z. B. sind eigentlich von jeder Fläche nur zwei gegenüberliegende von den vier Dreiecken geblieben, in welche diese Fläche durch ihre beiden Diagonalen getheilt wird, welche Dreiecke sich jedoch zu den beiden Rectangeln ausgedehnt haben, aus denen die Hexaëderfläche besteht; und ähnliche Verhältnisse gelten für die übrigen Formen. Daher werden denn

auch alle diese Formen an solchen Mineralien, welche Pentagondodekaëder und Dyakisdodekaëder zeigen, als parallelflächig-hemiëdrische Formen zu deuten sein; ja, sie sind hemiëdrisch, wenn auch nicht quoad phänomenon, so doch quoad nooumenon. Durch die Berechnung wird diess eben so bestätigt, wie durch das allgemeine Schema des Tesseralsystems in §. 55, in welchem alle Uebergänge und Verwandtschaften der Formen völlig ungestört bleiben, wenn man diejenigen beiden Formen, welche eine wirkliche Gestaltveränderung erleiden, mit ihren hemiëdrischen Zeichen einschreibt.

§. 65. Berechnung der Dyakisdodekaëder.

1. Berechnung der Zwischenaxen.

Die Zwischenaxen gehen unverändert aus den Hexakisoktaëdern in die Dyakisdodekaëder über, und bedürfen daher keiner abermaligen Berechnung; auch gilt für die Dyakisdodekaëder die schon bei den Hexakistetraëdern gemachte Bemerkung, dass die rhombischen Zwischenaxen durch keine singulären Puncte bezeichnet und daher gewissermaassen bedeutungslos sind. Für jedes Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ ist also:

$$t = \frac{3mn}{mn+m+n}, \text{ und } r = \frac{2n}{n+1}$$

2. Bestimmung der unregelmässigen Eckpuncte.

Statt der Endpuncte der rhombischen Zwischenaxen gewinnen dagegen die unregelmässigen Eckpuncte eine grosse Wichtigkeit, welche zwar noch innerhalb der Coordinat-Ebenen, aber ausserhalb jener Zwischenaxen gelegen sind, daher sie für jedes Dyakisdodekaëder unmittelbar durch ihre Coordinaten bestimmt werden müssen. Diese Bestimmung ist sehr leicht zu geben. Da nämlich ein jeder solcher Eckpunct in eine der Coordinat-Ebenen fällt, so ist allemal eine seiner Coordinaten $=0$; die beiden anderen Coordinaten aber finden sich, indem man die gleichnamigen Intersectionen (§. 22) zweier in demselben Octanten und an derselben Coordinat-Ebene liegender Flächen, z. B. der beiden Flächen F und F'' in nachfolgender Figur, mit einander verbindet. Die Gleichungen der Intersectionen (xz) für diese beiden Flächen sind folgende: *)

$$\text{für } F \quad y=0 \text{ und } \frac{x}{m}+z=1$$

$$\text{für } F'' \; y=0 \text{ und } x+\frac{z}{n}=1$$

*) Jede Fläche eines Dyakisdodekaëders hat allemal ihren kleinsten Parameter 1 in derjenigen Halbaxe, mit welcher sie unmittelbar zum Durchschnitte kommt, oder in dem rhombischen Eckpuncte, den sie mit bilden hilft; von diesem Eckpuncte aus verweist uns ihre kürzeste Kante auf diejenige Halbaxe, in welcher der grösste Parameter m, und ihre längste Kante auf diejenige Halbaxe, in welcher der mittlere Parameter n zu finden ist.

Combinirt man diese Gleichungen, so erhält man zunächst die Coordinaten des in dem Axenquadranten (xz) gelegenen unregelmässigen Eckpunctes, deren Werthe jedoch ganz allgemein auch für jeden andern solchen Eckpunct gelten; setzen wir also überhaupt die grössere Coordinate dieser Eckpuncte $=s$, und die kleinere Coordinate $=s'$, so werden

$$s=\frac{mn-n}{mn-1} \text{ und } s'=\frac{mn-m}{mn-1}$$

die Coordinaten der unregelmässigen Eckpuncte.

3. Kantenwinkel.

Was die Kantenwinkel der Dyakisdodekaëder betrifft, so ist zuvörderst einleuchtend, dass die Kante B ihrem Winkelmaasse nach unverändert aus der holoëdrischen Stammform in die hemiëdrische Form übergeht, obwohl solche ihrem Linearmaasse nach eine Verlängerung erfährt; daher werden wir auch dieser Kante, welche die längste Kante des Dyakisdodekaëders geworden ist, den Signaturbuchstaben B lassen müssen, wollen ihn jedoch mit zwei Accenten versehen. Dagegen verschwinden die Kanten A und C der holoëdrischen Stammform, und statt ihrer bilden sich zwei neue Kanten aus, welche die kürzesten und die mittleren Kanten des Dyakisdodekaëders sind. Wir wollen die kürzeste Kante mit A'', und die mittlere oder unregelmässige Kante mit C'' bezeichnen, so dass also A'', B'' und C'' die Signaturbuchstaben der dreierlei Kanten eines jeden Dyakisdodekaëders werden.

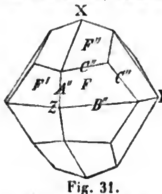


Fig. 31.

Um die Cosinus dieser Kanten zu finden, brauchen wir nur für eine jede derselben auf die Lage derjenigen Flächen zu achten, von welchen sie gebildet wird. Nehmen wir z. B. die Fläche F, so bildet mit ihr die Fläche F' eine Kante A'', und die Fläche F'' eine Kante C''; die Kante B'' bedarf keiner Berechnung, weil sie identisch mit der Kante B in §. 57 ist. Setzen wir also in dem allgemeinen Ausdrucke für $\cos W$ (§. 32)

$$a=m,\ b=n,\ c=1$$

und successiv

$$\text{erst } a'=m,\ b'=-n,\ c'=1$$
$$\text{dann } a'=1,\ b'=m,\ c'=n$$

so folgen die Werthe von $\cos A''$ und $\cos C''$, und so erhalten wir, mit Hinzufügung des Werthes von $\cos B''$, wenn wiederum $m^2(n^2+1)+n^2=K$ geschrieben wird:

$$\cos A''=-\frac{m^2(n^2-1)+n^2}{K}$$

$$\cos B''=-\frac{m^2(n^2+1)-n^2}{K}$$

$$\cos C''=-\frac{mn(m+n+1)}{K}$$

4. Parallelkantige Dyakisdodekaëder.

Noch haben wir die Bedingung aufzusuchen, unter welcher ein Dyakisdodekaëder ein parallelkantiges, oder ein solches sein wird, welches nicht von Trapezoiden, sondern von Trapezen begränzt ist (§. 59). Dann müssen in jeder Fläche die Kantenlinie B'' und die ihr gegenüberliegende Kantenlinie C'' einander parallel, und folglich die Centroparallelen beider Linien identisch sein. Nun sind z. B. für die Fläche F die Gleichungen der Centroparallele der Kantenlinie B''

$$x=0 \text{ und } \frac{y}{n}+z=0;$$

die Gleichungen der Centroparallele der ihr gegenüberliegenden Kantenlinie C'' aber finden sich durch Combination der Gleichung von F mit der Gleichung von F'', wie folgt:

$$\frac{x}{n^2-m}+\frac{y}{(mn-1)n}=0 \text{ und } \frac{y}{(mn-1)m}+\frac{z}{m^2-n}=0$$

Sollen nun beide diese Linien coincidiren, so muss offenbar

$$n^2-m=0$$

$$\text{und } (mn-1)m : m^2-n = n:1$$

sein, welche Bedingungen beide für m den Werth n^2 ergeben. Folglich werden alle diejenigen Dyakisdodekaëder parallelkantig sein, für welche die grössere Ableitungszahl gleich ist dem Quadrate der kleineren Ableitungszahl; eine Bedingung, welche unter den bekannten Varietäten für $\left[\frac{402}{2}\right]$ erfüllt ist.

§. 66. Berechnung der übrigen dodekaëdrisch-semitesseralen Formen.

Setzt man in denen für die Dyakisdodekaëder gefundenen Ausdrücken $m=\infty$, so erhält man die zur Berechnung der Pentagondodekaëder geeigneten Werthe.

1. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t=\frac{3n}{n+1},\quad r=\frac{2n}{n+1}$$

2. Coordinaten der unregelmässigen Eckpuncte:

$$s=1,\quad s'=\frac{n-1}{n}$$

3. Kantenwinkel:

$$\cos A''=-\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$\cos B''=-1, \text{ also } B''=180^0$$

$$\cos C''=-\frac{n}{n^2+1}$$

Der Werth von $\cos B''$ lehrt, dass die Kanten B'' im Pentagondodekaëder nicht mehr als solche vorhanden sind; sie werden nur noch ihrer Lage nach durch die Höhenlinien der pentagonalen Flächen repräsentirt.

In dem regulären Pentagondodekaëder der Geometrie würde $A'' = C''$ sein müssen, woraus sich für die betreffende Ableitungszahl der Werth

$$n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ergiebt. Da nun dieser Werth irrational ist, so kann auch das reguläre Pentagondodekaëder als Krystallform nicht vorkommen.

Setzen wir in denen für $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ gefundenen Ausdrücken $n = m$, oder $n = 1$, so gelangen wir genau auf dieselben Formeln, welche oben in §. 58 für mOm und mO gefunden worden sind, woraus denn folgt, dass diese Formen, eben so wie die Pentagondodekaëder, wirklich als Gränzformen der Dyakisdodekaëder betrachtet und in den Bereich der parallelflächig semitesseralen Formen gezogen werden müssen. Dasselbe gilt aber auch für $\infty O \infty$, ∞O und O, auf deren Formeln uns die für die hemiëdrische Form berechneten Ausdrücke gelangen lassen, wenn wir in ihnen die entsprechenden Werthe von m und n einsetzen. Und hiermit wäre denn die zu Ende von §. 64 aufgestellte Ansicht über die Bedeutung aller dieser Formen vollkommen gerechtfertigt.

§. 67. Tetartoëdrische Ausbildung des Tesseralsystems.

Die Möglichkeit einer tetartoëdrischen, d. h. einer nur mit dem vierten Theile der Flächen vollbrachten Ausbildung der tesseralen Formen wurde schon lange anerkannt; die Wirklichkeit der Erscheinung ist aber erst kürzlich durch *Rammelsberg's* Beobachtungen über die Krystallformen des chlorsauren Natrons dargethan worden, welche in der That als tetartoëdrische Combinationen des Tesseralsystems zu betrachten sind.

Wir gewinnen die einfachste Vorstellung von dieser Tetartoëdrie, wenn wir sie als eine wiederholte Hemiëdrie, und zwar als eine geneigtflächige Hemiëdrie der parallelflächig-semitesseralen Formen auffassen; das heisst, wenn wir uns die Dyakisdodekaëder nur mit ihren in den abwechselnden Octanten liegenden Flächen ausgebildet denken. Sie verwandeln sich dadurch in ganz eigenthümliche, von 12 unregelmässigen Pentagonen begränzte Formen, welche wir mit *Mohs* tetraëdrische Pentagondodekaëder nennen können. Da nun die Dyakisdodekaëder bereits hemiëdrische oder semitesserale Formen sind, so müssen diese Pentagondodekaëder viertelflächige, tetartoëdrische oder quadrantotesserale Formen sein, und folglich das Zeichen $\frac{mOn}{4}$ erhalten.

Anm. In Bezug auf seine eigentliche holoëdrische Stammform mOn lässt sich das tetraëdrische Pentagondodekaëder auch als diejenige Form erklären, welche durch Vergrösserung der abwechselnden einzelnen Flächen innerhalb der abwechselnden sechszähligen Flächensysteme entsteht. Dass

übrigens dieselbe Form auch aus dem Hexakistetraëder, durch Vergrösserung der abwechselnden einzelnen Flächen, und aus dem in §. 60 erwähnten Pentagon-Ikositetraëder, durch Vergrösserung der abwechselnden dreizähligen Flächensysteme erhalten werden kann, diess ist bereits von *Mohs* gezeigt worden. Sonach liefern denn alle drei hemiëdrische Formen des Hexakisoktaëders eine und dieselbe tetartoëdrische Form.

Diese tetraëdrischen Pentagondodekaëder stellen recht unsymmetrische Körper dar. Ihre Flächen sind Pentagone mit zwei Paaren von gleichen Seiten, aber mit lauter verschiedenen Winkeln. Sie haben dreierlei Kanten, welche insgesammt den Charakter von unregelmässigen Kanten besitzen, und von denen sechs (𝔄) durch die Endpuncte der Hauptaxen gehen, während die übrigen, einestheils als 12 schärfere (𝔅), anderntheils als 12 stumpfere (ℭ) zu je drei von den Endpuncten der trigonalen Zwischenaxen auslaufen. So entstehen denn dreierlei Ecke, nämlich 4 spitzere und 4 stumpfere trigonale Ecke, welche respective in die Ecke und über die Flächen, so wie 12 unregelmässig dreiflächige Ecke, welche paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Tetraëders fallen. Die merkwürdigste Eigenschaft je zweier correlater, d. h. aus einer und derselben hemiëdrischen Form abgeleiteter solcher Pentagondodekaëder ist, dass sie sich zu einander als ein rechts und als ein links gebildeter Körper verhalten, oder dass sie in der Lage und Verknüpfung ihrer (übrigens völlig gleichen) Begränzungs-Elemente dieselbe Verschiedenheit darbieten, wie z. B. der rechte und der linke Handschuh eines und desselben Paares.

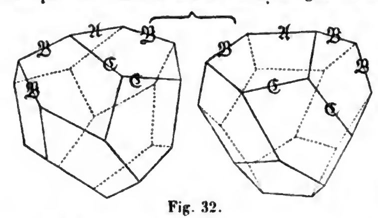


Fig. 32.

Anm. Diese Verschiedenheit des rechts und links Gebildetseins, welche schon *Mohs* an den tetraëdrischen Pentagondodekaëdern hervorhob, ist eine Erscheinung, der wir auch in anderen Krystallsystemen begegnen, weshalb es nicht unzweckmässig sein dürfte, solche mit einem bestimmten Namen zu belegen. Wir bringen dafür das Wort Enantiomorphie in Vorschlag, welches den absoluten, durch keine Stellungsänderung auszugleichenden Gegensatz der übrigens ganz identischen Formbildung ausdrücken soll. Je zwei correlate tetraëdrische Pentagondodekaëder sind also enantiomorph. Da nun jedes Hexakisoktaëder, als holoëdrische Stammform, vier dergleichen Pentagondodekaëder liefert, so wird es darunter zwei rechts, und zwei links gebildete geben, von denen zwar je zwei gleichnamige durch blose Stellungsänderung zur Congruenz gebracht werden können, während solches für je zwei ungleichnamige ganz unmöglich ist. Fig. 32 giebt das Bild eines rechten und eines linken Exemplars.

Es entsteht uns nun die wichtige Frage, welche Wirkung die Tetartoëdrie auf die übrigen plenotesseralen Formen ausüben wird, weil sich doch a priori voraussetzen lässt, dass auch dieses Bildungsgesetz, gerade so wie die eine oder die andere Hemiëdrie, das ganze Tesseralsystem beherrschen,

und daher alle seine Formen ergreifen und zu quadrantotesseralen Formen umgestalten muss. Mögen wir nun diese Tetartoëdrie unmittelbar als eine solche, oder mögen wir sie als eine wiederholte Hemiëdrie semitesseraler Formen betrachten, jedenfalls erhalten wir für die übrigen holoëdrischen Formen folgende Resultate.

Wie sich die Hexakisoktaëder in tetraëdrische Pentagondodekaëder, so verwandeln sich

die Ikositetraëder in Trigondodekaëder,
die Triakisoktaëder in Deltoiddodekaëder,
die Tetrakishexaëder in Pentagondodekaëder und
das Oktaëder in Tetraëder,

während das Rhombendodekaëder und das Hexaëder scheinbar unverändert bleiben.

Also liefert diese Ausbildungsweise des Tesseralsystems das sehr merkwürdige Ergebniss, dass das Tetraëder und das Pentagondodekaëder abermals, und zwar beide zugleich zum Vorscheine kommen, dass beide als tetartoëdrische Formen eben so nothwendig coëxistiren und zusammengehören, wie sie als hemiëdrische Formen sich gegenseitig ausschliessen und unmöglich machen. Der Gegensatz der beiden Arten von Hemiëdrie findet sonach in der Tetartoëdrie seine Ausgleichung.

Obgleich übrigens diese tetartoëdrischen Tetraëder und Pentagondodekaëder in ihrer Erscheinungsweise mit den gleichnamigen hemiëdrischen Formen übereinstimmen, so ist doch die Bedeutung ihrer Flächen eine wesentlich verschiedene geworden. Denn, streng genommen, wird nun jede Tetraëderfläche nicht mehr von einer ganzen Fläche des Oktaëders, sondern nur von drei abwechselnden Feldern einer solchen Fläche gebildet; und eben so ist jede Fläche des Pentagondodekaëders eigentlich nur noch mit ihrer einen Hälfte vorhanden; auf ähnliche Weise verhalten sich auch die tetartoëdrischen Trigondodekaëder und Deltoiddodekaëder*). Für alle diese Formen aber, sowie für das Hexaëder und das Rhombendodekaëder, als die zwei scheinbar unveränderten Formen, macht sich die Enantiomorphie geltend, indem der Gegensatz von rechts und links ein durchgreifendes Verhältniss ist, welchem sich keine Form entziehen kann, wenn er auch in der geometrischen Erscheinungsweise derselben nicht hervortritt.

Anm. Diess bestätigen die interessanten Beobachtungen von *Marbach*, welchen zufolge sich diese Enantiomorphie an allen Krystallen des chlorsauren Natrons durch die Erscheinung der circularen Polarisation des Lichtes zu erkennen giebt.**) Die optischen Eigenschaften entsprechen also vollkommen den morphologischen Eigenschaften und den allgemeinen Resultaten, auf welche uns die consequente Verfolgung der Tetartoëdrie in ihren Wirkungen auf die verschiedenen plenotesseralen Formen gelangen lässt.

---

*) Zur Erläuterung dienen die Bilder in Fig. 30, S. 99.

**) Mit Recht hebt *Biot* diese Entdeckung *Marbach's* als eine sehr wichtige hervor; auch ist es wohl sehr wahrscheinlich, dass das bromsaure Natron und das essigsaure Uranoxyd-Natron gleichfalls tetartoëdrisch krystallisiren.

§. 68. Berechnung der quadrantotesseralen Formen.

Da die tetraëdrischen Pentagondodekaëder die allgemeinsten Formen darstellen und in ihrem Zeichen $\frac{mOn}{4}$ die Zeichen aller übrigen tetartoëdrischen Formen begreifen, so brauchen wir auch nur sie zu berechnen.

Was nun zuvörderst die Zwischenaxen betrifft, so gilt für sie dasselbe, was oben in §. 62 von den Zwischenaxen des Hexakistetraëders gesagt wurde, d. h. die rhombischen Zwischenaxen sind gar nicht indicirt, während die trigonalen Zwischenaxen in zwei ungleichwerthige Hälften zerfallen, deren Längen genau dieselben sind, wie im Hexakistetraëder.

Ausnahmsweise wollen wir für diese Formen auch die Kantenlinien berechnen, weil sich aus den Werthen derselben mit der grössten Evidenz diejenigen Folgerungen ableiten lassen, welche zu Ende des §. 67 über die anderweiten Effecte dieser Tetartoëdrie ausgesprochen worden sind. Wir unterscheiden die dreierlei Kanten als Hauptaxenkanten, als schärfere und als stumpfere Zwischenaxenkanten, weil sie an den Endpuncten der Hauptaxen, der hemiëdrischen und der holoëdrischen trigonalen Halbaxen liegen; wir bezeichnen aber

die 6 Hauptaxenkanten mit $\mathfrak{A}$,
die 12 schärferen Zwischenaxenkanten mit $\mathfrak{B}$,
die 12 stumpferen Zwischenaxenkanten mit $\mathfrak{C}$.

In beistehender Figur ist also z. B. RR' eine Hauptaxenkante, $R'T'$ eine schärfere, und RT eine stumpfere Zwischenaxenkante. Da nun diese drei Kanten von den Puncten T, T', R und R' begränzt werden, so bedürfen wir zur Berechnung derselben nach §. 29 die Coordinaten dieser Puncte. Nun haben der stumpfere trigonale Eckpunct T, und der spitzere trigonale Eckpunct T' dieselbe Lage, wie im Hexakistetraëder; folglich werden, wenn X, Y und Z die Endpuncte der drei positiven Halbaxen sind, die Coordinaten

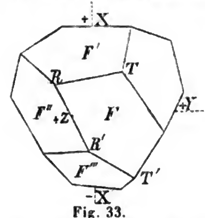


Fig. 33.

$$\text{für } T,\quad x = y = z = \frac{mn}{mn+m+n}$$

$$\text{für } T',\quad x = y = z = \frac{mn}{mn+m-n}$$

und zwar die drei ersteren alle positiv, von den drei letzteren dagegen x negativ. Wir haben nun noch die Coordinaten der Puncte R und R' zu bestimmen. Es ist aber R der Durchschnittspunct der Kantenlinie RR' mit der Fläche F', und es ist R' der Durchschnittspunct derselben Linie mit der Fläche F''', während diese Kantenlinie von den beiden Flächen F und F'' gebildet wird. Eine aufmerksame Betrachtung lehrt, dass die Gleichungen der vier Flächen F, F', F'' und F''' folgende sind:

$$\text{für } F,\quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F', \quad x + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F'', -\frac{x}{m} - \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F''', -x - \frac{y}{m} - \frac{z}{n} = 1$$

Combiniren wir die Gleichungen von F und F'', so erhalten wir als die Gleichungen der Kantenlinien RR'

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 0, \text{ und } z = 1;$$

woraus sich ergiebt, dass die Hauptaxenkanten den Coordinat-Ebenen parallel sind. Combiniren wir nun ferner diese Gleichungen der Linie RR' mit der Gleichung der Fläche F', so ergeben sich die Coordinaten des Punctes R mit folgenden Werthen:

$$x = \frac{m^2(n-1)}{n(m^2-n)}, \quad y = -\frac{m(n-1)}{m^2-n}, \quad z = 1$$

Da nun die beiden Puncte R und R' zu der Axe der z und zu der Coordinat-Ebene (zx) eine ganz symmetrische Lage haben, so gelten für den Punct R' dieselben Coordinaten, nur erhalten x und y die entgegengesetzten Vorzeichen.

Aus den so bestimmten Coordinaten der Puncte R und R', so wie aus den oben stehenden Coordinaten der Puncte T und T' berechnen sich nun nach §. 29 die Längen der dreierlei Kanten wie folgt: es ist

$$\text{Kante } \mathfrak{A} = \frac{2m(n-1)\sqrt{m^2+n^2}}{n(m^2-n)}$$

$$\text{Kante } \mathfrak{B} = \frac{(m-n)\sqrt{m^2(m+n^2)^2+m^2n^2(mn+1)^2+n^2(m^2-n)^2}}{n(mn+m+n)(m^2-n)}$$

$$\text{Kante } \mathfrak{C} = \frac{(m+n)\sqrt{m^2(m-n^2)^2+m^2n^2(mn-1)^2+n^2(m^2-n)^2}}{n(mn+m-n)(m^2-n)}$$

Aus diesen Werthen ersieht man sogleich, dass für $n = 1$ die Kanten $\mathfrak{A}$ verschwinden, und folglich die Flächen Deltoide werden; dass für $n = m$ die Kanten $\mathfrak{B}$ verschwinden, und folglich die Flächen gleichschenkelige Dreiecke werden, und dass für $m = \infty$ die Kanten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ einander gleich, und folglich die Flächen symmetrische Pentagone werden.

Wir haben nun noch die Winkel dieser Kanten zu berechnen. Es sind aber die Kanten $\mathfrak{C}$ offenbar identisch mit den Kanten C″ der Dyakisdodekaëder, und folglich aus §. 65 bekannt. Die Kanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dagegen (z. B. die Kanten RR' und $R'T'$ in Fig. 33) bilden einen neuen Gegenstand der Berechnung, und finden sich aus dem allgemeinen Ausdrucke von $\cos W$ in §. 32, wenn man in solchem statt a, b und c die Parameter der Fläche F, für a', b' und c' aber successiv die Parameter der Flächen F'' und F''' einsetzt; man erhält so

$$\cos\mathfrak{A} = -\frac{m^2n^2 - m^2 - n^2}{K}$$

$$\cos\mathfrak{B} = -\frac{mn(m-n-1)}{K}$$

$$\cos\mathfrak{C} = -\frac{mn(m+n+1)}{K} = \cos C'' \text{ in §. 65.}$$

wobei wiederum $K = m^2(n^2+1)+n^2$ ist. Setzt man in diesen Ausdrücken statt m und n die den übrigen Formen zukommenden Werthe, so gelangt man

für $n = m$ auf die Kanten der Trigondodekaëder,
für $n = 1$ auf die Kanten der Deltoiddodekaëder,
für $m = \infty$ auf die Kanten der Pentagondodekaëder,
für $m = \infty$ und $n = 1$ auf die Kanten des Rhombendodekaëders,
für $m = n = 1$ auf die Kanten des Tetraëders, und
für $m = n = \infty$ auf die Kanten des Hexaëders,

wodurch denn die, zu Ende von §. 67, über die Wirkungen dieser Tetartoëdrie mitgetheilten Ergebnisse abermals ihre vollkommene Bestätigung erhalten.

Drittes Capitel.

Combinationen der tesseralen Formen.

§. 69. Eintheilung derselben.

Bekanntlich können die Formen des Tesseralsystems zu zweien, dreien und mehren an einem und demselben Krystalle zugleich ausgebildet vorkommen, oder mit einander zu Combinationen verbunden sein. Dabei findet jedoch das Gesetz Statt, dass die combinirten Formen entweder holoëdrische, oder hemiëdrische, oder tetartoëdrische, und im zweiten Falle entweder tetraëdrisch- oder dodekaëdrisch-semitesserale Formen sind, weil niemals die eine und die andere Ausbildungsweise des Systems zugleich angetroffen wird. Daher sind denn die Combinationen des Tesseralsystems, eben so wie seine einfachen Formen, als plenotesserale, semitesserale und quadrantotesserale, die semitesseralen aber als tetraëdrisch- und als dodekaëdrisch-semitesserale Combinationen zu unterscheiden. Dass sie übrigens nach der Zahl der combinirten Formen als binäre, ternäre, quaternäre, oder als zweizählige, dreizählige, vierzählige Combinationen u. s. w. unterschieden werden, ist bekannt.

Indem wir die gewöhnlichen Combinationen des Tesseralsystems als bekannt voraussetzen, oder wegen ihrer auf die Anfangsgründe der Krystallographie (S. 73 ff.) verweisen, wollen wir gegenwärtig nur in aller Kürze die allgemeine Theorie der binären Combinationen mittheilen, weil solche die Grundlage für die Beurtheilung und Entwickelung aller Combinationen gewährt. Denn jede ternäre oder mehrzählige Combination lässt sich auf binäre Combinationen zurückführen, indem man immer nur das Verhältniss je zweier

ihrer Formen in das Auge fasst. Wer also die binären Combinationen entwickeln kann, der wird sich auch in den mehrzähligen Combinationen zurecht finden, für deren Entwickelung wir noch überdiess im vierten Capitel ein äusserst wichtiges Hilfsmittel kennen und benutzen lernen werden.

Anm. Da die quadrantotesseralen Formen und Combinationen bis jetzt nur am chlorsauren Natron nachgewiesen worden sind, und zu den sehr seltenen Erscheinungen gehören, so werden wir uns auch nur mit den plenotesseralen und semitesseealen Combinationen beschäftigen. Die in den §§. 67 und 68 mitgetheilten Betrachtungen werden den Leser hinreichend in den Stand setzen, die Eigenthümlichkeit der quadrantotesseralen Combinationen zu beurtheilen.

§. 70. Theorie der plenotesseralen Combinationen.

Da die Hexakisoktaëder die Repräsentanten aller plenotesseralen Formen sind, so werden wir die allgemeine Theorie der binären plenotesseralen Combinationen nur dadurch erhalten, dass wir die Verhältnisse aufsuchen, unter denen irgend zwei Hexakisoktaëder mit einander combinirt sein können, und dass wir die diesen Verhältnissen entsprechenden Bedingungen ermitteln. Dabei wollen wir der leichteren Vorstellung wegen voraussetzen, dass das eine Hexakisoktaëder mOn als vorherrschende, und das andere $m'On'$ als untergeordnete Form ausgebildet ist; zur Vereinfachung der Rechnung aber denken wir uns desungeachtet beide Formen auf gleich grosse Hauptaxen reducirt, so dass die Halbaxen einer jeden den Werth 1 haben. Es fragt sich also, welcherlei Veränderungen wird die vorherrschende Form durch die untergeordnete erleiden können? Die Antwort auf diese Frage lautet dahin, dass es überhaupt sechs verschiedene Modificationen sind, welche in der Erscheinungsweise eines vorherrschenden Hexakisoktaëders durch die Flächen eines untergeordneten Hexakisoktaëders verursacht werden können; und zwar sind diese Modificationen folgende:

1. eine Zuschärfung der längsten Kanten A,
2. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B,
3. eine Zuschärfung der kürzesten Kanten C,
4. eine achtflächige Zuspitzung der ditetragonalen Ecke,
5. eine sechsflächige Zuspitzung der sechsflächigen Ecke, und
6. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke.

Die Bedingungen, welche diese sechs verschiedenen Modificationen bestimmen, beruhen wesentlich auf den Verhältnissen der Coëfficienten t und r, t' und r' der Zwischenaxen beider Formen, wie aus Folgendem erhellt.

1. Zuschärfung der längsten Kanten A. Sie erfordert die Erfüllung der beiden Bedingungen, dass die Kanten A beider Hexakisoktaëder einander parallel sind, und dass dieselbe Kante in der untergeordneten Form stumpfer ist, als in der vorherrschenden Form. Denken wir uns also beide Formen auf gleiche Hauptaxen reducirt, so wird die erste Bedingung durch Coincidenz der beiderseitigen Kantenlinien A, und folglich durch Gleichheit der trigonalen Zwischenaxen beider Formen erfüllt sein, während der

zweiten Bedingung dadurch Genüge geleistet wird, dass die rhombische Zwischenaxe von $m'On'$ grösser ist, als jene von mOn. Eine Zuschärfung der längsten Kanten von mOn wird daher jedenfalls Statt finden, wenn $t' = t$ und $r' > r$ ist.

2. Zuschärfung der mittleren Kanten B. Sie erfordert zuvörderst einen Parallelismus der beiderseitigen Kanten B, und folglich, bei gleichen Hauptaxen, eine Coincidenz derselben, also Gleichheit der beiderseitigen rhombischen Zwischenaxen. Ausserdem aber muss dieselbe Kante in $m'On'$ stumpfer sein, als in mOn, was nur dann der Fall sein wird, wenn die trigonale Zwischenaxe von $m'On'$ grösser ist, als jene von mOn. Eine Zuschärfung der mittleren Kanten von mOn wird daher jedenfalls Statt finden, wenn $r' = r$ und $t' > t$ ist.

3. Zuschärfung der kürzesten Kanten C. Sie erfordert erstens einen Parallelismus der beiden Kanten C, und folglich, weil die Lage dieser Kanten durch die Endpuncte der trigonalen und rhombischen Zwischenaxen bestimmt wird, eine Gleichheit der Verhältnisse $t' : r'$ und $t : r$; nennen wir also diese Quotienten q' und q, so ist $q' = q$ die erste Bedingung, welche erfüllt sein muss. Zugleich muss aber die Kante C in $m'On'$ stumpfer sein, als in mOn, was bei gleichen Hauptaxen durch die Bedingung $r' < r$ erreicht wird. Eine Zuschärfung der kürzesten Kanten von mOn muss demnach Statt finden, wenn $q' = q$ und $r' < r$ ist.

4. Achtflächige Zuspitzung der ditetragonalen Ecke. Sie wird jedenfalls eintreten müssen, wenn zugleich $t' > t$ und $r' > r$ ist; dabei werden die Combinationskanten den kürzesten Kanten von mOn parallel, wenn $q' = q$ ist.

5. Sechsflächige Zuspitzung der sechsflächigen Ecke. Eine einfache Betrachtung lehrt, dass die ihr entsprechenden Bedingungen durch die Grössenverhältnisse $t' < t$ und $q' < q$ ausgedrückt werden; dabei werden die Combinationskanten für $r' = r$ den mittleren Kanten von mOn parallel.

6. Vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke. Man erkennt leicht, dass eine solche jedenfalls Statt finden muss, wenn $r' < r$ und $q' > q$ ist; sind die Combinationskanten den längsten Kanten von mOn parallel, so muss $t' = t$ sein.

Aus vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich also, dass es lediglich auf die Verhältnisse der Coëfficienten t und r, t' und r' ankommt, ob diese oder jene von den überhaupt möglichen Combinations-Erscheinungen eintreten soll. Benutzen wir nun bei diesen Gleichungen und Vergleichungen die oben in §. 57 stehenden Werthe von t und r, indem wir die entsprechenden Werthe von t' und r' mit accentuirten Buchstaben schreiben, so ergiebt sich nach einigen Reductionen, dass

$$t' >=< t, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \frac{mn}{m+n}$$

$$r' >=< r, \text{ wenn } n' >=< n$$

$$q' >=< q, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< \frac{m(n+1)}{n}$$

Substituirt man in die obigen sechs Sätze diese Werthe, so erhält man die Bedingungen, welche die Combinationen zweier Hexakisoktaëder mOn und $m'On'$ beherrschen, unmittelbar als Functionen der Ableitungszahlen ausgedrückt. Es erleidet daher mOn, als vorherrschende Form, durch ein zweites untergeordnetes Hexakisoktaëder $m'On'$

1. eine Zuschärfung der längsten Kanten A,
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{mn}{m+n}$, und $n' > n$;
2. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B,
   wenn $n' = n$, und $m' > m$;
3. eine Zuschärfung der kürzesten Kanten C,
   wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$;
4. eine achtflächige Zuspitzung der ditetragonalen Ecke,
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} > \frac{mn}{m+n}$, und $n' > n$;
5. eine sechsflächige Zuspitzung der sechsflächigen Ecke,
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} < \frac{mn}{m+n}$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$;
6. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke,
   wenn $n' < n$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$.

In diesen sechs Sätzen ist die Theorie aller binären plenotesseralen Combinationen enthalten. Denn, welche andere zwei Formen auch gegeben sein mögen, man wird durch Anwendung dieser Sätze allemal bestimmen können, welche von jenen sechs Combinations-Verhältnissen für sie möglich sind, und welche Bedingungen das eine oder das andere Verhältniss erfordern. Nur wird natürlich die Beschreibung der Combinationen angemessene Veränderungen erleiden, wie solche durch die besondere Beschaffenheit der jedesmal gegebenen Formen nöthig gemacht werden.

Ein Beispiel wird diess hinreichend erläutern. Man will wissen, welche Veränderungen ein vorherrschendes Ikositetraëder mOm durch ein untergeordnetes Tetrakishexaëder $\infty On'$ erleidet.

An dem Ikositetraëder existiren nur noch die Kanten B und C; die ditetragonalen Ecke sind nur tetragonale, die sechsflächigen Ecke nur trigonale Ecke; die untergeordnete Form hat nur 24 Flächen, die Zuschärfungen der Kanten gehen daher in Abstumpfungen, die achtflächigen Zuspitzungen der Ecke in vierflächige, die vierflächigen Zuspitzungen in Zuschärfungen der Ecke über. Da nun $n = m$, und $m' = \infty$ ist, so folgt aus einer Vergleichung der entsprechenden Bedingungen, dass die drei Fälle 1, 3 und 5 unmöglich sind, und dass also ein Ikositetraëder durch die Flächen eines Tetrakishexaëders nur folgende Veränderungen erleiden kann:

a) eine Abstumpfung der Kanten B, wenn $n' = m$;
b) eine vierflächige Zuspitzung der tetragonalen Ecke, bei welcher die Zuspitzungsflächen auf die Kanten aufgesetzt sind, wenn $n' > m$;

c) eine Zuschärfung der rhombischen Ecke, bei welcher die Zuschärfungsflächen auf die Kanten B aufgesetzt sind, wenn $n' < m$.

Durch ähnliche Betrachtungen wird man für je zwei andere Formen aus ihren krystallographischen Zeichen, unter Berücksichtigung ihrer besonderen Gestaltung, die für sie möglichen Combinations-Verhältnisse erschliessen können.

§. 71. Theorie der geneigtflächig-semitesseralen Combinationen.

Da uns die Hexakistetraëder gewissermassen das ganze Tesseralsystem in seiner tetraëdrischen Hemiëdrie repräsentiren, so werden wir auch in der Combination irgend zweier Hexakistetraëder die sämmtlichen tetraëdrisch-semitesseralen Combinationen erfassen. Die Theorie dieser Combinationen beruht also auf der Untersuchung der Verhältnisse, unter denen sich zwei verschiedene Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{m'On'}{2}$ mit einander verbinden können. Dabei ist jedoch der bei allen hemiëdrischen Combinationen sehr wesentliche Unterschied zu berücksichtigen, ob sich die beiden combinirten Formen in gleicher oder in verwendeter Stellung befinden, weshalb wir jeden dieser Fälle besonders in Betrachtung ziehen müssen.

I. *Combination zweier Hexakistetraëder von gleicher Stellung.*

Indem wir abermals die eine Form als vorherrschend, die andere als untergeordnet, übrigens beide auf gleiche Hauptaxen reducirt denken, lässt uns eine Betrachtung der möglichen Verschiedenheiten der Flächenlage auf das allgemeine Resultat gelangen, dass ein vorherrschendes Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ durch die Flächen eines anderen, untergeordneten, aber in gleicher Stellung befindlichen Hexakistetraëders $\frac{m'On'}{2}$ folgende sechs verschiedene Modificationen erleiden kann:

1. eine Zuschärfung der kürzesten Kanten A',
2. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B',
3. eine Zuschärfung der längsten Kanten C',
4. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke
5. eine sechsflächige Zuspitzung der stumpferen sechsflächigen Ecke, und
6. eine sechsflächige Zuspitzung der spitzeren sechsflächigen Ecke.

Die Bedingungen, denen diese sechs Combinationen unterworfen sind, beruhen wesentlich auf den Grössenverhältnissen der holoëdrischen und der hemiëdrischen trigonalen Halbaxen (§. 62) beider Formen, mithin auf den Verhältnissen der Coëfficienten t und τ, t' und τ', wie aus folgenden Betrachtungen erhellt.

1. Zuschärfung der kürzesten Kanten A'. Eine solche erfordert erstens einen Parallelismus oder, bei gleichen Hauptaxen, eine Coincidenz der beiderseitigen Kanten A', und zweitens einen stumpferen Winkel für diese Kanten in der untergeordneten Form; die erste Bedingung

wird durch die Gleichheit der beiderseitigen holoëdrischen Halbaxen, die zweite Bedingung durch das Ueberwiegen der hemiëdrischen Halbaxe der untergeordneten Form in Erfüllung gebracht. Eine Zuschärfung der kürzesten Kanten findet also jedenfalls Statt, wenn $t' = t$ und $\tau' > \tau$ ist, woraus zugleich folgt, dass $q' < q$ sein müsse, wenn wir $\frac{t}{\tau} = q$ und $\frac{t'}{\tau'} = q'$ setzen.

2. Zuschärfung der mittleren Kanten B'. Sie setzt voraus Parallelismus oder Coincidenz der beiderseitigen Kanten B', und eine grössere Amplitude oder eine stumpfere Beschaffenheit derselben Kanten in der untergeordneten Form; Bedingungen, von denen die erstere durch die Gleichheit der beiden hemiëdrischen Halbaxen, die andere durch das Ueberwiegen der holoëdrischen Halbaxe der untergeordneten Form erfüllt wird. Demnach findet eine Zuschärfung der mittleren Kanten allemal Statt, wenn $\tau' = \tau$ und $t' > t$ ist, woraus zugleich $q' > q$ folgt.

3. Zuschärfung der längsten Kanten C'. Sie erfordert ausser dem Parallelismus der beiderseitigen Kanten C', welcher durch die Bedingung $q' = q$ erfüllt wird, auch noch ein grösseres Winkelmaass derselben Kanten in der untergeordneten Form, welches durch die Bedingung $t' < t$ gewährleistet wird. Folglich muss die vorherrschende Form jedenfalls eine Zuschärfung ihrer längsten Kanten erleiden, wenn zugleich $q' = q$ und $t' < t$ ist, woraus sich zugleich ergiebt, dass auch $\tau' < \tau$ sein wird.

4. Vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke. Eine solche wird jedenfalls eintreten müssen, wenn zugleich $t' > t$ und $\tau' > \tau$ ist, wobei übrigens das Verhältniss von q' und q ein sehr verschiedenes sein kann, und für $q' = q$ ein Parallelismus der Combinationskanten mit den längsten Kanten der vorherrschenden Form Statt findet.

5. Sechsflächige Zuspitzung der stumpferen sechsflächigen Ecke. Sie wird allemal Statt finden, wenn zugleich $t' < t$ und $q' < q$ ist, wobei das Verhältniss von τ' und τ ein verschiedenes sein kann, für $\tau' = \tau$ aber die Combinationskanten den mittleren Kanten der vorherrschenden Form parallel werden.

6. Sechsflächige Zuspitzung der spitzeren sechsflächigen Ecke. Sie wird sich nothwendig herausstellen, wenn zugleich $\tau' < \tau$ und $q' > q$ ist, wobei das Verhältniss von t' und t sehr verschieden sein kann, und für $t' = t$ ein Parallelismus der Combinationskanten mit den kürzesten Kanten der vorherrschenden Form eintritt.

Wir haben nun noch die, zwischen den Coëfficienten der beiderseitigen trigonalen Halbaxen obwaltenden Bedingungen als Functionen der Ableitungszahlen m und n, m' und n' auszudrücken, um es sogleich aus den krystallographischen Zeichen je zweier Formen erkennen zu können, welche von den verschiedenen Combinations-Erscheinungen für sie Statt finden wird. Setzen wir für t und t', für τ und τ' ihre in §. 62 stehenden Werthe, so erhalten wir für jene Bedingungen folgende aequivalente Ausdrücke: es ist

$$t' >=< t, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \frac{mn}{m+n}$$

$$\tau' >=< \tau, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'-n'} >=< \frac{mn}{m-n}$$

$$q' >=< q, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< \frac{m(n+1)}{n}$$

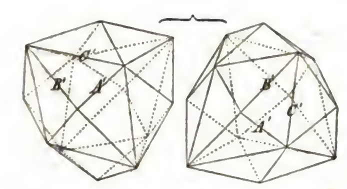
Substituiren wir diese Werthe in die obigen sechs Sätze, so gelangen wir nach einigen Reductionen endlich auf folgende Resultate. Ein vorherrschendes Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ erfährt durch ein zweites, untergeordnetes Hexakistetraëder $\frac{m'On'}{2}$, bei gleicher Stellung beider Formen:

1. eine Zuschärfung der kürzesten Kanten A',
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{mn}{m+n}$, und $n' > n$;
2. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B',
   wenn $\frac{m'n'}{m'-n'} = \frac{mn}{m-n}$, und $n' > n$;
3. eine Zuschärfung der längsten Kanten C',
   wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$;
4. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke,
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} > \frac{mn}{m+n}$, und $n' > n$;
5. eine sechsflächige Zuspitzung der stumpferen sechsflächigen Ecke,
   wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} < \frac{mn}{m+n}$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$;
6. eine sechsflächige Zuspitzung der spitzeren sechsflächigen Ecke,
   wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$, und $\frac{m'n'}{m'-n'} < \frac{mn}{m-n}$;

mit welchen Resultaten die Theorie der binären, tetraëdrisch-semitesseralen Combinationen für den ersten Fall, der gleichen Stellung beider Formen erledigt ist.

II. *Combination zweier Hexakistetraëder von verwendeter Stellung.*

Wenn sich die beiden Hexakistetraëder in verwendeter Stellung befinden, wenn also ein $\frac{mOn}{2}$ mit einem $-\frac{m'On'}{2}$ combinirt ist, dann wird allerdings die Zahl der möglichen Combinations-Verhältnisse geringer. Da nämlich in diesem Falle die hemiëdrischen Halbaxen der einen Form in die holoëdrischen Halbaxen der andern fallen, und vice versa, so sind die Verhält-



nisse von τ' und t, von t' und τ zu vergleichen, welche natürlich nicht so manchfaltige sein können, weil immer $\tau > t$ und $\tau' > t'$ sein muss. Diese beschränkenden Bedingungen gestatten überhaupt nur folgende Combinationen; es erleidet $\frac{mOn}{2}$ durch $-\frac{m'On'}{2}$

7. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B', wenn $t' = \tau$ und $\tau' > t$;
8. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke, wenn $t' > \tau$;
9. eine sechsflächige Zuspitzung der spitzeren sechsflächigen Ecke, wenn $t' < \tau$, wobei die Combinationskanten den kürzesten Kanten parallel werden, wenn $\tau' = t$ ist.

Drücken wir diese Bedingungen als Functionen der Ableitungszahlen aus, so erhalten wir

$$t' >=< \tau, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \frac{mn}{m-n}$$

$$\tau' >=< t, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'-n'} >=< \frac{mn}{m+n}$$

und folglich findet Statt:

7. eine Zuschärfung der mittleren Kanten B',
$$\text{wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{mn}{m-n};$$
8. eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke,
$$\text{wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} > \frac{mn}{m-n};$$
9. eine sechsflächige Zuspitzung der stumpferen sechsflächigen Ecke,
$$\text{wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} < \frac{mn}{m-n};$$

womit denn auch der zweite Fall erledigt ist, da sich die beiden combinirten Formen zu einander in verwendeter Stellung befinden.

Dass nun aber in diesen neun Sätzen wirklich die Theorie aller semitesseralen Combinationen gegeben ist, davon überzeugt man sich leicht, wenn man irgend zwei andere Formen herausgreift, um deren Combinations-Erscheinung zu bestimmen.

Es sei z. B. die vorherrschende Form ein Trigondodekaëder $\frac{mOm}{2}$, und die untergeordnete Form ein Deltoiddodekaëder $\frac{m'O}{2}$; man ersieht sogleich, dass in diesem Falle τ' immer $< \tau$ sein wird, woraus sich denn ergiebt, dass die Fälle 3, 5 und 6 die einzigen noch möglichen sind. Da nun aber beide Formen jetzt Zwölfflächner sind, so erfahren natürlich die Beschreibungsformeln der Combinationen eine angemessene Veränderung, und man findet endlich, dass ein Trigondodekaëder durch ein Deltoiddodekaëder von gleicher Stellung nur folgende Veränderungen erleiden kann:

a. eine Abstumpfung der (jetzt) kürzesten Kanten C', wenn $m'=\frac{1}{2}(m+1)$;
b. eine dreiflächige Zuspitzung der trigonalen Ecke, wenn $m' < \frac{1}{2}(m+1)$;
c. eine dreiflächige Zuspitzung der sechsflächigen Ecke, wenn $m' > \frac{1}{2}(m+1)$.
Das in beiden letzteren Fällen die Zuspitzungsflächen auf die Kanten C' aufgesetzt sein müssen, diess lehrt schon eine Vergleichung beider Formen in der angegebenen Stellung.

Oder es sei die untergeordnete Form ein Tetrakishexaëder $\infty On'$, so ist ebenfalls $r' < r$, zugleich aber auch $q' > q$, folglich kann nur noch der Fall 6 vorkommen, d. h. ein Trigondodekaëder erleidet durch ein Tetrakishexaëder jedenfalls eine sechsflächige Zuspitzung seiner sechsflächigen Ecke.

§. 72. Theorie der dodekaëdrisch-semitesseralen Combinationen.

Die Theorie der parallelflächig-semitesseralen Combinationen beruht auf der Untersuchung der Verhältnisse, unter welchen sich irgend zwei Dyakisdodekaëder combiniren können, weil ja eine jede andere Form gewissermaassen als ein Dyakisdodekaëder zu betrachten ist. Da aber zwei Dyakisdodekaëder sowohl in gleicher, als auch in verwendeter Stellung combinationsfähig sind, so haben wir abermals zwei verschiedene Fälle in Betrachtung zu ziehen.

I. *Combination zweier Dyakisdodekaëder von gleicher Stellung.*

Wir denken uns wiederum die eine Form als die vorherrschende, die andere als die untergeordnete, beide aber von gleicher Länge der Hauptaxen. Die Zahl der möglichen Combinations-Erscheinungen ist etwas grösser, als bei zwei Hexakisoktaëdern oder zwei Hexakistetraëdern, weil die Dyakisdodekaëder vierseitige Flächen besitzen, deren jede von dreierlei Kanten und von dreierlei Ecken begränzt wird. Um daher unsere Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir uns nur auf die wichtigeren Combinationen beschränken, als welche sich folgende Veränderungen herausstellen, die ein vorherrschendes Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ durch die Flächen eines untergeordneten Dyakisdodekaëders $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$ erleiden kann.

1. Eine Zuschärfung der kürzesten Kanten A'', wenn $m'=m$, und $n'>n$.
2. Eine Zuschärfung der längsten Kanten B'', wenn $n'=n$, und $m'>m$.
3. Eine Abstumpfung der unregelmässigen oder mittleren Kanten C''. Sie erfordert erstens, dass $m'<m$, und zweitens, dass die Flächen der untergeordneten Form in die Zonen dieser Kanten fallen; nun ist in der beistehenden Figur

Fig. 34.

die Gleichung der Fläche F: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$

- - - - F': $x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$

daher erhalten in der allgemeinen Zonengleichung (§. 36)

$$\frac{M}{a}+\frac{N}{b}+\frac{R}{c}=0$$

die Coëfficienten M, N und R folgende Werthe:

$$M=a'a''(b'c''-b''c')=-\ m(m-n^2)$$
$$N=b'b''(c'a''-c''a')=-mn(mn-1)$$
$$R=c'c''(a'b''-a''b')=\ \ n(m^2-n)$$

und die Zonengleichung selbst wird in vorliegendem Falle:

$$\frac{m(m-n^2)}{a}+\frac{mn(mn-1)}{b}-\frac{n(m^2-n)}{c}=0$$

Nun kann aber die Fläche, welche die Kante C'' abstumpft, entweder eine der F, oder eine der F' analoge Lage haben; hiernach ergeben sich also für die Abstumpfung der unregelmässigen oder mittleren Kanten zwei Fälle, welche wir dadurch unterscheiden können, dass wir sagen, die Abstumpfungsflächen seien entweder auf die Kanten A'', oder auf die Kanten B'' aufgesetzt, oder auch, die Abstumpfung erfolge entweder von den Kanten B'' her, oder von den Kanten A'' her;

im ersten Falle ist $a=m'$, $b=n'$, $c=1$,
im zweiten Falle ist $a=1$, $b=m'$, $c=n'$,

welche Werthe man, nach Maassgabe der Aufsetzung der Abstumpfungsflächen, in die vorstehende Zonengleichung einzusetzen hat.

4. Eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke, wenn $m'>m$ und $n'>n$.
5. Eine dreiflächige Zuspitzung der trigonalen Ecke; die eine Bedingung, welche sie fordert, ist die, dass $m'<m$ sein muss. Unter den mancherlei Arten, wie diese Zuspitzung Statt finden kann, sind nun besonders die zwei durch besondere Regelmässigkeit ausgezeichnet, da die Aufsetzungskanten entweder den Kanten B'', oder auch den gleichschenkeligen Diagonalen der Flächen der vorherrschenden Form parallel werden.

a. Sind die Aufsetzungskanten den Kanten B'' parallel, so ist $n'=n$.

b. Sind die Aufsetzungskanten parallel den gleichschenkeligen Diagonalen, oder denen durch die beiden unregelmässigen Eckpuncte jeder Fläche gehenden Linien, so müssen die Zuspitzungsflächen in die Zonen dieser Linien fallen. Die auf die Fläche F aufgesetzte Zuspitzungsfläche würde also in die Zone der Linie ab fallen, welche die beiden Puncte a und b verbindet. Nun lässt sich leicht zeigen, dass die Centroparallele einer Linie, welche durch zwei Puncte geht, deren Coordinaten p, q, r und p', q', r' sind, die Gleichungen

$$\frac{x}{p-p'}-\frac{y}{q-q'}=0,\ \text{und}\ \frac{z}{r-r'}-\frac{x}{p-p'}=0$$

haben muss. Es sind aber die Coordinaten des Punctes a (§. 65)

$$p=\frac{mn-m}{mn-1},\ q=0,\ r=\frac{mn-n}{mn-1},$$

und die Coordinaten des Punctes b

$$p'=0,\ q'=\frac{mn-n}{mn-1},\ r'=\frac{mn-m}{mn-1},$$

folglich werden die Gleichungen der gesuchten Zonenlinie:

$$\frac{x}{mn-m}+\frac{y}{mn-n}=0 \text{ und } \frac{z}{m-n}-\frac{x}{mn-m}=0$$

woraus sich denn die Zonengleichung

$$\frac{mn-m}{m'}-\frac{mn-n}{n'}+m-n=0$$

ergiebt, welche zwar zunächst für die auf die Fläche F aufgesetzte Zuspitzungsfläche erhalten worden ist, uns aber doch im Allgemeinen lehrt, dass die in Rede stehende Zuspitzung nur von solchen Dyakisdodekaëdern hervorgebracht werden kann, deren beide Ableitungszahlen m' und n' dieser Bedingungsgleichung Genüge leisten.

6. Eine Zuschärfung der unregelmässigen Ecke. Auch bei dieser Modification, für welche im Allgemeinen $m' \lesseqgtr m$ sein kann, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Zuschärfungsflächen auf die Kante A'' und deren anliegende Kante C'', oder auf die Kante B'' und deren anliegende Kante C'' aufgesetzt sind.

a. Findet die Aufsetzung der Zuspitzungsflächen auf B'' und C'' Statt, so muss jedenfalls $n'<n$ sein, und dann sind besonders die beiden Fälle zu merken, da die Aufsetzungskante der ungleichschenkeligen Diagonale, oder auch der Kante A'' parallel ist; im ersten Falle ist $\frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{mn}{m+n}$, im andern Falle $m'=m$.

b. Findet die Aufsetzung der Zuspitzungsflächen auf A'' und C'' Statt, so muss $n'>n$ und $m'<m$ sein, und dann wird besonders der Fall interessant, da die Aufsetzungskante der ungleichschenkeligen Diagonale parallel ist, welchem abermals dieselbe Bedingung entspricht, wie vorher.

II. *Combination zweier Dyakisdodekaëder von verwendeter Stellung.*

Wenn sich die beiden Formen in verwendeter Stellung befinden, wenn also ein $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ mit einem $-\left[\frac{m'On'}{2}\right]$ verbunden ist, so können nur noch folgende Combinations-Erscheinungen vorkommen.

7. Eine Zuschärfung der kürzesten Kanten A'', wenn $n'=m$.

8. Eine Abstumpfung der unregelmässigen oder mittleren Kanten C''. Für diesen Fall, bei welchem die Abstumpfungsflächen stets von der Kante B'' her aufgesetzt sind, gilt zuvörderst die Bedingung $n'<m$, dann aber die unter Nr. 3 entwickelte Zonengleichung, in welcher $a=n'$, $b'=m'$ und $c=1$ zu setzen ist, also

$$m(m-n^2)m'+mn(mn-1)n'-n(m^2-n)m'n'=0$$

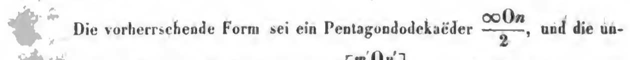
$$\text{oder } m'=\frac{mn(mn-1)n'}{n(m^2-n)n'-m(m-n^2)}=P'$$

9. **Eine vierflächige Zuspitzung der rhombischen Ecke, wenn $n' > m$.**

10. **Eine unregelmässige dreiflächige Zuspitzung der trigonalen Ecke, wenn $n' < m$, und $m' < P'$; sind die Aufsetzungskanten den Kanten B'' parallel, so ist $m' = n$.**

11. **Eine Zuschärfung der unregelmässigen Ecke, wenn $n' < m$ und $m' > P'$.**

Dass die vorstehenden 11 Sätze das Wichtigste enthalten, was zur Beurtheilung der Combinationen auch je zwei anderer Formen erforderlich ist, sobald nur dabei auf die besonderen Verhältnisse dieser Formen Rücksicht genommen wird, diess ist einleuchtend, und mag nur noch durch ein Beispiel erläutert werden.



Die vorherrschende Form sei ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty On}{2}$, und die untergeordnete Form ein Dyakisdodekaëder $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$ so ist offenbar $m' < m$, und $n' < m$, folglich können, bei gleicher Stellung beider Formen, nur noch die Fälle 3, 5 und 6 vorkommen. In der vorherrschenden Form existiren die Kanten B'' nicht mehr als solche, sondern nur als die Höhenlinien der Flächen, auch bilden je zwei Kanten A'' nur noch eine einzige Kante. Daher erleidet ein vorherrschendes Pentagondodekaëder durch ein in gleicher Stellung befindliches Dyakisdodekaëder

a. eine Abstumpfung der unregelmässigen Kanten, und zwar sind die Abstumpfungsflächen

  α. von den Höhenlinien der Pentagone her aufgesetzt, wenn $n' = \frac{m'n^2}{m'n-1}$,

  β. von den regelmässigen Kanten der Pentagone her aufgesetzt, wenn $n' = \frac{m'n}{m'+n^2}$;

b. eine dreiflächige Zuspitzung der trigonalen Ecke, und zwar sind die Aufsetzungskanten der Zuspitzungsflächen

  α. parallel den Höhenlinien der Pentagone, wenn $n' = n$,

  β. parallel den gleichschenkeligen Diagonalen, oder den Verbindungslinien zweier unregelmässiger Eckpuncte, wenn $n' = \frac{m'n}{m'+n-1}$;

c. eine Zuschärfung der unregelmässigen Ecke, und zwar ist jede Zuschärfungsfläche

  α. auf eine regelmässige und die anliegende unregelmässige Kante gesetzt, wenn $n' > n$ und $m' > \frac{n'}{(n'-n)n}$,

  β. auf eine Höhenlinie und die anliegende unregelmässige Kante gesetzt, wenn $n' < n$ und $m' > \frac{n'n^2}{n-n'}$ ist.

Viertes Capitel.

Zonenlehre des Tesseralsystems.

§. 73. Bestimmung der Flächen aus den Zonen.

Es wurde schon in §. 37 bemerkt, dass die Bestimmung unbekannter Flächen, und also auch unbekannter Formen, mittels der Zonen eine sehr wichtige und häufig vorkommende Aufgabe der Krystallographie bildet. Auch in den Combinationen des Tesseralsystems findet sie oftmals ihre Anwendung, weshalb wir an einem Beispiele diese zonale Bestimmung der Flächen erläutern wollen.

Der allgemeinste denkbare Fall für eine Fläche F, welche in eine bekannte Zone fällt, ist offenbar derjenige, da diese Zone durch irgend zwei andere Flächen F' und F'' bestimmt wird, deren Parameter a', b' und c', a'', b'' und c'' sind, von denen wir immer voraussetzen, dass solche respective in den Axen der x, y und z liegen. Für diesen Fall gilt nach §. 36 die Zonengleichung in ihrer allgemeinsten Form

$$\frac{M}{a}+\frac{N}{b}+\frac{R}{c}=0$$

worin $M=a'a''(b'c''-b''c')$, $N=b'b''(c'a''-c''a')$, $R=c'c''(a'b''-a''b')$.

In jedem besonderen Falle hat man nun für a', b' und c', für a'', b'' und c'' die ihnen, nach Maassgabe der Lage beider gegebenen Flächen, zukommenden besonderen Werthe einzusetzen, um die für die drei Parameter a, b und c giltige Bedingungsgleichung zu erhalten, welche für jede andere, in die Zonen der Flächen F' und F'' fallende Fläche F erfüllt sein muss.

In beistehender Figur, welche eine fünfzählige plenotesserale Combination darstellt, sind nur zwei Formen unmittelbar bestimmt, nämlich das Oktaëder, dessen Flächen mit o, und das Rhombendodekaëder, dessen Flächen mit r bezeichnet sind. Von den übrigen drei Formen lehrt uns die unmittelbare Anschauung nur so viel, dass sie ein Ikositetraëder (β), ein Tetrakishexaëder (γ) und ein Hexakisoktaëder (ε) sein müssen. Die vollständige Bestimmung dieser drei untergeordneten Formen wird uns nun aber durch die Zonen gewährleistet, in welchen ihre Flächen mit einander und mit den Flächen der beiden bekannten Formen verbunden sind. So

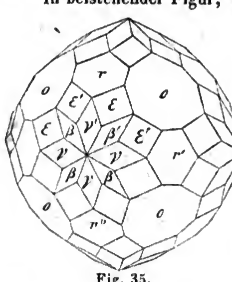


Fig. 35.

fallen z. B. die Flächen o', ε', γ', β', ε' und r' in eine Zone, welche bekannt ist, weil die zwei mit o' und r' bezeichneten Flächen ohne weiteres als die des Oktaëders und Rhombendodekaëders erkannt werden. Nehmen wir die erstere als die Fläche F', die andere als die Fläche F'', und setzen wir, wie immer, den oberen, rechten, vorderen Raum-Octanten als den der positiven Halbaxen, so gelten für die Fläche o' die Parameterwerthe:

$$a' = 1,\ b' = -1,\ c' = 1$$

und für die Fläche r' die Werthe:

$$a'' = \infty,\ b'' = 1,\ c'' = 1$$

Führen wir diese Werthe in die Ausdrücke für M, N und R ein, so wird die Zonengleichung

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

in welcher Form sie für alle Flächen der Zone $o'r'$ Giltigkeit hat. Da nun allemal eine der drei Grössen a, b und c den Werth 1 erhält, so sind in dieser Gleichung überhaupt nur noch zwei unbekannte Grössen enthalten. Befinden sich also in der Zone die Flächen von solchen Formen, welche die Kenntniss nur einer Ableitungszahl erfordern, so reicht die Gleichung vollständig zu deren Bestimmung aus. Diess ist in vorstehender Figur der Fall mit den Flächen γ' und β', welche durch die unmittelbare Beobachtung als die Fläche eines Tetrakishexaëders $\infty O n$ und eines Ikositetraëders $m O m$ erkannt werden. Die Fläche γ' erfordert aber nach ihrer besonderen Lage die Parameter

$$a = n,\ b = \infty,\ c = 1$$

folglich wird $n = 2$; eben so fordert die Fläche β' die Parameter

$$a = m,\ b = m,\ c = 1$$

folglich wird $m = 3$. Die beiden gesuchten Formen sind daher $\infty O2$ und $3O3$.

Von derjenigen Form, deren Flächen mit ε bezeichnet sind, und welche nothwendig ein Hexakisoktaëder $m O n$ sein muss, fallen nun aber zwei Flächen ε' in die betrachtete Zone; die links liegende Fläche ε' fordert nach ihrer besondern Lage die Parameter

$$a = n,\ b = -m,\ c = 1$$

woraus sich die Zonengleichung $2m = mn + n$ ergiebt; die rechts liegende Fläche ε' dagegen fordert nach ihrer Lage die Parameter

$$a = m,\ b = n,\ c = 1$$

wonach die Zonengleichung die Form $2m = mn - m$ erhält. Wir haben also zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen, aus welchen sich die Werthe $m = 5$ und $n = \frac{5}{3}$ bestimmen. Die drei unbekannten Formen sind daher lediglich aus dieser einen Zone als $\infty O2$, $3O3$ und $5O\frac{5}{3}$ bestimmt worden.

Auf ähnliche Weise wird man in jedem anderen Falle verfahren.

Fällt die Fläche einer unbekannten Form in zwei verschiedene Zonen, so wird man die Zonengleichung successiv für beide der gegebenen Zonen einrichten, und dadurch zur Bestimmung der unbekannten Fläche gelangen. So können wir z. B. in obiger Figur die rechts liegende Fläche ε' auch dadurch bestimmen, dass sie zugleich in die Zone $o'r'$, und in die Zone or'' fällt. Vermöge der ersten Zone gilt für sie, wie vorher, die Gleichung

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

Vermöge der zweiten Zone aber ergiebt sich für sie die Gleichung

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

Setzen wir in beiden Gleichungen abermals $a = m$, $b = n$ und $c = 1$, so erhalten wir wiederum die Werthe $m = 5$ und $n = \frac{5}{3}$, durch welche das Hexakisoktaëder als $5O\frac{5}{3}$ bestimmt wird.

§. 74. Wichtigste Zonen des Tesseralsystems; Kantenzonen des Hexaëders.

Obgleich sich in den Combinationen der tesseralen Formen viele und sehr verschiedene Zonen ausbilden können, welche theils unmittelbar, durch ihre parallelen Combinationskanten, theils mittelbar, durch eine der graphischen Methoden (§. 39 und 40) zu erkennen sind, so giebt es doch einige Zonen, denen eine so häufige Ausbildung zukommt, dass sie gewöhnlich besonders in Betrachtung gezogen werden. Es sind diess die Kantenzonen des Hexaëders, des Oktaëders und des Rhombendodekaëders, so wie die Diagonalzonen des Oktaëders.

Die Kantenzonen des Hexaëders sind diejenigen, deren Flächen den Kanten des Hexaëders, oder den Hauptaxen parallel sind, weshalb man sie auch füglich die Zonen der Hauptaxen nennen kann. Es giebt nur drei dergleichen Zonen, welche jedoch als gleichartige Zonen völlig dieselben Eigenschaften besitzen, so dass die Betrachtung einer derselben hinreichend ist. Wählen wir dazu diejenige, welche der aufrechten Axe, oder der Axe der x entspricht, so ist die Zonenlinie identisch mit dieser Hauptaxe; folglich werden ihre Gleichungen (§. 16)

$$y = 0, \text{ und } z = 0.$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (§. 36),

$$\frac{x}{\mu} - \frac{y}{\nu} = 0 \text{ und } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{\mu} = 0,$$

so erkennen wir, dass $\mu = \infty$ sein muss; daraus folgt die Zonengleichung

$$\frac{1}{a} = 0, \text{ oder } a = \infty.$$

Folglich können zu der Zone nur solche Flächen gehören, deren in die Axe der x fallender Parameter den Werth ∞ hat, wie sich diess ja aus dem Begriffe der Zone von selbst ergiebt.

Die Entwickelung der Zone ist hiermit von selbst gegeben; denn offenbar muss für alle tautozonale Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty : b : c$ gelten, statt dessen wir $\infty : n : 1$ setzen können, mit den Gränzwerthen ∞ und 1 für n; folglich werden die Tetrakishexaëder ∞On, das Rhombendodekaëder ∞O und das Hexaëder $\infty O \infty$ diejenigen Formen sein, welche Flächen zu diesen Zonen liefern.

Die Tangente des Neigungswinkels je zweier Flächen dieser Zone findet sich, wenn wir in dem allgemeinen, für orthoëdrische Axensysteme giltigen Ausdrucke (§. 41)

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2 + \nu^2 + \varrho^2}}{aa'bb' + cc'aa' + bb'cc'}$$

für k den Werth $\frac{M}{\mu}$ benutzen, in welchem $M = aa'(bc'-b'c)$ ist, und darauf für μ, a und a' den Werth ∞ einführen; dann wird

$$\tang W = \frac{bc'-b'c}{bb'+cc'}$$

ein Ausdruck, mittels dessen man für irgend zwei tautozonale Flächen ihren Neigungswinkel berechnen kann, indem man für b und c, für b' und c' diejenigen Ableitungszahlen einführt, welche ihnen zukommen; wobei natürlich die Vorzeichen zu berücksichtigen sind.

§. 75. Fortsetzung; Kantenzonen des Oktaëders.

Die Kantenzonen des Oktaëders sind diejenigen, deren Flächen je zweien Gegenkanten des Oktaëders, oder je einer rhombischen Zwischenaxe parallel sind, weshalb man sie auch die Zonen der rhombischen Zwischenaxen nennen kann. Es giebt sechs dergleichen Zonen, und es ist gleichgiltig, welche derselben wir betrachten wollen. Wählen wir als Zonenlinie diejenige rhombische Zwischenaxe, welche im Octanten der positiven Halbaxen zwischen den Axen der y und z liegt, so werden die Gleichungen derselben:

$$x = 0, \text{ und } y - z = 0.$$

Vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie in §. 36, so ergiebt sich, dass $\mu = 0$, und $\nu = \varrho$ sein muss, woraus denn die Zonengleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

folgt. Diese Gleichung ist nur dann möglich, wenn b und c gleiche Werthe und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da nun die Gleichheit zweier Parameter allgemein nur entweder für die beiden grössten, oder für die beiden kleinsten Parameter vorkommen kann, so werden sowohl b als auch c entweder den Werth m, oder den Werth 1 haben; im ersten Falle wird $a=1$, im zweiten Falle $a = m$ sein. Daher können nur Formen von den Parameter-Verhältnissen $m:m:1$, oder $m:1:1$, folglich allgemein nur Ikositetraëder mOm, oder Triakisoktaëder mO Flächen in die Kantenzonen des Oktaëders liefern; weil jedoch $\infty O \infty$, O und ∞O die Gränzformen dieser Gestalten sind, so werden sie gleichfalls denselben Zonen tributär.

Die Tangente des Neigungswinkels je zweier Flächen dieser Zone findet sich, wenn man zuvörderst in dem allgemeinen Ausdrucke für $\tang W$ (§. 41) $\mu = 0$ und $\varrho = \nu$ setzt, darauf den Werth $k = \frac{N}{\nu}$ einführt, in welchem $N = bb'(ca'-c'a)$ ist; man erhält so zunächst

$$\tang W = \frac{bb'(ca'-c'a)\sqrt{2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

Berücksichtigt man nun noch, dass für jede Fläche der Zone die Bedingungen $b = -c$, und $b' = -c'$ erfüllt sein müssen, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\tang W = \frac{(ca' - c'a)\sqrt{2}}{2aa' + cc'}$$

mittels dessen man den Neigungswinkel irgend zweier tautozonaler Flächen berechnen kann, indem man für a und c, für a' und c' die ihnen entsprechenden Ableitungszahlen, unter gehöriger Beachtung der Vorzeichen, einsetzt.

§. 76. Fortsetzung; Kantenzonen des Rhombendodekaëders.

Die Kantenzonen des Rhombendodekaëders sind diejenigen Zonen, deren Flächen den Kanten des Rhombendodekaëders parallel sind; da nun diese Kanten zu je sechs einer der trigonalen Zwischenaxen parallel laufen, so kann man diese Zonen auch die Zonen der trigonalen Zwischenaxen nennen. Es giebt demnach vier solcher Zonen, welche nicht selten ausgebildet sind.

Wählen wir als Zonenlinie diejenige trigonale Zwischenaxe, welche im Octanten der positiven Halbaxen liegt, so erhalten wir als Gleichungen derselben:

$$x - y = 0, \text{ und } z - x = 0.$$

Vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie, so folgt, dass $\mu = \nu = \varrho$ sein muss, woraus sich denn die Zonengleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

ergiebt. Wenden wir uns nun zu der Entwickelung der Zone (§. 38), so lehrt uns diese Gleichung zuvörderst, dass es keine Flächen in denjenigen beiden Octanten geben kann, innerhalb welcher die Zonenlinie selbst enthalten ist. Die Gleichung ist nur möglich innerhalb der übrigen sechs Octanten, und fordert, dass von den Parametern a, b und c stets zwei mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten, wie der dritte. Folglich werden von den Gliedern der Gleichung stets zwei zusammen so gross sein, wie das dritte Glied allein. Derjenige Parameter, welcher als Divisor dieses einzelnen Gliedes auftritt, muss also den kleinsten Werth 1 haben, und sämmtliche Flächen der Zone stehen daher unter der Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

woraus sich denn weiter ergiebt, dass nur solche Formen, welche unter dem allgemeinen Zeichen $mO\frac{m}{m-1}$ begriffen sind, oder dass nur parallelkantige Hexakisoktaëder (§. 57) Flächen zu diesen Zonen liefern können; da nun aber das Ikositetraëder 2O2 und das Rhombendodekaëder ∞O demselben Zeichen entsprechen, so werden auch diese beiden Formen der Zone tributär.

Die Tangente des Neigungswinkels je zweier Flächen dieser Zone finden wir aus dem allgemeinen Ausdrucke für $\tang W$ (§. 41) indem wir $\varrho = \nu = \mu$ setzen, und dann für k den Werth $\frac{M}{\mu}$ substituiren, in welchem $M = aa'(bc' - b'c)$ ist; dadurch wird

$$\tang W = \frac{aa'(bc'-b'c)\sqrt{3}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

Man kann diesen Werth auch etwas anders ausdrücken, wenn man die Bedingungen berücksichtigt, dass $bc = -a(b+c)$, und $b'c' = -a'(b'+c')$ sein muss, und demgemäss im Nenner statt des Productes $bb'cc'$ das Product $aa'(b+c)(b'+c')$ einsetzt, wodurch aa' im Zähler und Nenner eliminirt, und

$$\tang W = \frac{(bc'-b'c)\sqrt{3}}{bb'+cc'+(b+c)(b'+c')}$$

gefunden wird.

§. 77. Fortsetzung; Diagonalzonen des Oktaëders.

Zu den wichtigsten Zonen des Tesseralsystems gehören diejenigen, welche durch die Höhenlinien der Oktaëderflächen bestimmt werden und von *Weiss* die Diagonalzonen des Oktaëders genannt worden sind. Da sie in der Zahl zwölf vorhanden sind, so bedingen sie viele sehr regelmässige Combinationen.

Wählen wir zur Zonenlinie diejenige, auf der positiven Oktaëderfläche gelegene Höhenlinie (oder Diagonale), welche von der Axe der x ausläuft, so bestimmt sich solche zunächst als die Durchschnittslinie der Fläche $x+y+z=1$ mit der Fläche $y-z=0$; und führt man die Bedingung der letztern Gleichung in die erstere ein, so ergeben sich

$$\frac{x}{2}+y=0, \text{ und } y-z=0$$

als die Gleichungen der auf den Mittelpunct transportirten Zonenlinie; vergleichen wir solche mit den allgemeinen Gleichungen dieser Linie (§. 36), so gelangen wir auf die Folgerungen, dass

$$\mu = 2\nu, \text{ und } \varrho = \nu$$

sein muss, woraus denn die Zonengleichung

$$-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

folgt, welcher alle tautozonale Flächen Genüge leisten müssen.

Was nun die allgemeine Entwickelung der Zone betrifft, so ist zuvörderst einleuchtend, dass die Zonengleichung für alle in den beiden Octanten der $+x$, $-y$ und $-z$, der $-x$, $+y$ und $+z$ liegende Flächen unmöglich ist. Dagegen sind in den übrigen sechs Octanten Flächen möglich, und zwar wird die Zonengleichung

im Octanten der $+x$, $+y$ und $+z$, und im Gegen-Octanten:

$$-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

im Octanten der $+x$, $+y$ und $-z$, und im Gegen-Octanten:

$$-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$$

im Octanten der $+x$, $-y$ und $+z$, und im Gegen-Octanten:

$$-\frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

Man erkennt leicht, dass diese Gleichungen nur unter folgenden Bedingungen realisirt werden können:

die erste, wenn a den mittleren Werth n hat,
die zweite, wenn b den kleinsten Werth 1 hat,
die dritte, wenn c den kleinsten Werth 1 hat.

Giebt man nun den anderen Parametern respective die Werthe m und 1, oder m und n, so erhält man endlich die Resultate, dass im Octanten der positiven Halbaxen

zwei Flächen der Formen $mO\frac{2m}{m+1}$,

in jedem der beiden anderen Octanten aber

zwei Flächen der Formen $mO\frac{m}{m-2}$ und

zwei Flächen der Formen $mO\frac{2m}{m-1}$,

überhaupt aber, dass in der Diagonalzone des Oktaëders nur Flächen solcher Formen vorkommen können, welche unter einem der vorstehenden drei Zeichen begriffen sind. Diese Zeichen bestimmen uns also ganz allgemein diejenigen Hexakisoktaëder, welche Flächen in jene Zone liefern; da nun aber in dem ersten Zeichen auch das Oktaëder und das Tetrakishexaëder $\infty O2$, in dem zweiten Zeichen auch das Rhombendodekaëder und das Ikositetraëder $3O3$, so wie in dem dritten Zeichen abermals $\infty O2$ und $3O3$ enthalten sind, so werden diese Formen gleichfalls zu der Zone beitragen. Dagegen ist es unmöglich, dass noch Flächen anderer Formen vorkommen.

Um die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier Flächen dieser Zone zu finden, dazu haben wir in dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ (§. 41) $\mu=2\nu$, und $\varrho=\nu$, hierauf $k=\frac{N}{\nu}$ zu setzen, wodurch

$$\text{tang}W=\frac{bb'(ca'-c'a)\sqrt{6}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

gefunden wird, welcher Ausdruck noch in einer etwas anderen Form geschrieben werden kann, wenn man die Bedingungen geltend macht, dass $ab+ca-2bc=0$, und eben so $a'b'+c'a'-2b'c'=0$ sein muss.

§. 78. Allgemeine Betrachtung der Zonen des Tesseralsystems.

Die in den vorhergehenden Paragraphen erläuterten Zonen sind nur die einfachsten Fälle einiger allgemeineren Zonen, welche sich überhaupt als die Kantenzonen des Tesseralsystems bezeichnen lassen, weil sie jedenfalls den eigenthümlichen Kanten der verschiedenen tesseralen Formen entsprechen, welchen Kanten die Zonenlinien parallel sind. Da nun die Kanten der-

jenigen Form, welche sich bei der jedesmaligen Ausbildungsweise des Tesseralsystems als die allgemeinste Form herausstellt, die Kanten aller übrigen Formen repräsentiren, so sind es auch die Kantenzonen dieser allgemeinsten Form, welche zunächst in Rücksicht kommen.

Bei holoëdrischer Ausbildung sind es also die Kantenzonen des Hexakisoktaëders, in welchen uns die wichtigsten Zonen aller plenotesseralen Formen gegeben sind. Das Hexakisoktaëder hat aber dreierlei Kanten; folglich werden auch drei Arten von Kantenzonen, nämlich

die Zonen der längsten Kanten A,
die Zonen der mittleren Kanten B, und
die Zonen der kürzesten Kanten C

zu unterscheiden sein.

1. Zonen der längsten Kanten A.

Fassen wir im Octanten der positiven Halbaxen irgend eine Kante A, z. B. diejenige ins Auge, welche an der Axe der z anliegt, und also von der Fläche F (Fig. 21, S. 85) gebildet wird, so können wir solche als die Durchschnittslinie dieser Fläche, deren Gleichung

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$$

ist, mit derjenigen Fläche bestimmen, welche die Gleichung $x-y=0$ hat. Um nach §. 36 die Zonengleichung zu finden, ist also

$$a'=m,\quad b'=n,\quad c'=1,$$
$$a''=1,\quad b''=-1,\quad c''=\infty$$

zu setzen, wodurch sich

$$M=mn,\quad N=mn,\quad R=-(m+n)$$

und folglich die Zonengleichung

$$\frac{mn}{a}+\frac{mn}{b}-\frac{m+n}{c}=0$$

ergiebt. Man erkennt sofort, dass diese Gleichung für jede Fläche unmöglich ist, welche in den Octanten der $+x$, $+y$ und $-z$, so wie in den Gegen-Octanten fällt; folglich wird es für jede Zone einer Kante A in denjenigen beiden Octanten keine Flächen geben, auf welche diese Kante in ihrem Verlaufe zunächst gerichtet ist.

In dieser Kantenzone des Hexakisoktaëders sind nun aber zugleich noch folgende Zonen mit begriffen:

a. Die Diagonalzone der Ikositetraëder mOm, deren Zonengleichung

$$\frac{m}{a}+\frac{m}{b}-\frac{2}{c}=0;$$

b. die Kantenzone der Triakisoktaëder mO, deren Zonengleichung

$$\frac{m}{a}+\frac{m}{b}-\frac{m+1}{c}=0;$$

c. die Kantenzone der Tetrakishexaëder ∞On, deren Zonengleichung

$$\frac{n}{a}+\frac{n}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

d. die Kantenzone des Rhombendodekaëders ∞O, deren Zonengleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

e. die Diagonalzone des Oktaëders O, deren Zonengleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}=0;$$

f. die Diagonalzone des Hexaëders $\infty O \infty$, welche mit der Kantenzone des Oktaëders identisch ist, und deren Zonengleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$$

wird.

2. Zonen der mittleren Kanten *B*.

Die in Fig. 21 von der Fläche *F* gebildete Kante *B* lässt sich als die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Coordinat-Ebene (yz) betrachten; daraus folgt die Zonengleichung

$$\frac{n}{b}-\frac{1}{c}=0$$

deren Bedeutung sehr einfach ist. In derselben Zone sind aber zugleich noch folgende mit begriffen:

a. Die Zone der längeren Kanten der Ikositetraëder mOm, mit der Zonengleichung

$$\frac{m}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

b. die Diagonalzone der Tetrakishexaëder ∞On, deren Zonengleichung die obige bleibt;

c. die Kantenzone des Oktaëders O, mit der Zonengleichung

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$$

3. Zonen der kürzesten Kanten *C*.

Die von der Fläche *F* (Fig. 21, S. 85) gebildete Kante *C* können wir als die Durchschnittslinie dieser Fläche mit derjenigen Fläche vorstellen, deren Gleichung $y-z=0$ ist; demgemäss haben wir

$$a'=m,\quad b'=n,\quad c'=1$$
$$a''=\infty,\quad b''=1,\quad c''=-1$$

zu setzen, um die Coëfficienten *M*, *N* und *R* zu finden, und gelangen so auf die Zonengleichung:

$$\frac{m(n+1)}{a}-\frac{n}{b}-\frac{n}{c}=0$$

deren Discussion uns die Entwickelung der Zone verschafft. Mit derselben Zone sind aber auch noch folgende Zonen erfasst worden:

a. Die Zone der kürzeren Kanten der Ikositetraëder mOm, deren Zonengleichung

$$\frac{m+1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

b. die Diagonalzone der Triakisoktaëder mO, deren Zonengleichung

$$\frac{2m}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

c. die Diagonalzone des Oktaëders O, deren Zonengleichung

$$\frac{2}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0;$$

d. die Kantenzone des Hexaëders $\infty O \infty$, mit der Zonengleichung $\frac{1}{a}=0$.

Auf ähnliche Weise wird sich der Leser leicht auch die Kantenzonen der semitesseralen Formen bestimmen können, von welchen bei den Hexakistetraëdern nur noch die Zone der Kanten B', bei den Dyakisdodekaëdern nur noch die Zonen der Kanten A'' und C'' zu berücksichtigen sind, welche letztere bereits oben in §. 72, I, 3 behandelt worden ist.

Fünftes Capitel.

Transformation der Axen und Zwillingskrystalle.

§. 79. Beziehung des Tesseralsystems auf ein hexagonales Axensystem.

Zwar wird man im Tesseralsysteme, wie überhaupt in denjenigen Krystallsystemen, wo die Axen eine absolut bestimmte Lage haben, nur selten Veranlassung finden, dem in der Erscheinung so entschieden angezeigten Axensysteme irgend ein anderes zu substituiren, und für das gewöhnliche Bedürfniss der praktischen Krystallographie dürfte eine solche Veranlassung kaum jemals eintreten. In theoretischer Hinsicht aber kann es bisweilen von Interesse sein, die tesseralen Formen auf ein anderes, als das von der Natur zunächst gebotene Axensystem zu beziehen. Namentlich lässt es das herrschende Gesetz der Zwillingsbildung und die damit oft verknüpfte abnorme Formen-Ausbildung als eine interessante Aufgabe erscheinen, die tesseralen Formen auf ein hexagonales Axensystem zu beziehen, oder das Tesseralsystem in seiner holoëdrischen Ausbildungsweise als eine rhomboëdrische Krystallreihe darzustellen.

Bei dieser Darstellung haben wir das Hexaëder als ein Rhomboëder zu betrachten, und so aufrecht zu stellen, dass eine seiner trigonalen Zwischenaxen die verticale Hauptaxe repräsentirt, während die drei auf ihr normalen rhombischen Zwischenaxen die drei horizontalen und sich unter 60° schneidenden Nebenaxen bilden (§. 51). Von diesen Nebenaxen brauchen wir jedoch für unsern gegenwärtigen Zweck nur zwei zu berücksichtigen. Um uns nun aber die Lage dieser Axen leichter vorstellen zu können, wollen wir solche am Oktaëder, als der eigentlichen Grundform des Tesseralsystems, bestimmen, indem wir auch diese Form nach einer trigonalen Zwischenaxe aufrecht stellen. Wählen wir dazu die in den Octanten

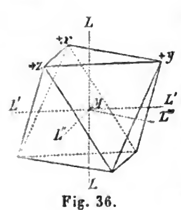


Fig. 36.

der positiven Halbaxen fallende Zwischenaxe L, so erscheint das Oktaëder wie in beistehender Figur, als die Combination eines Rhomboëders mit der Basis, und so bildet die Linie L die Hauptaxe des neuen Axensystems, während die drei Linien L', L'' und L''' die Nebenaxen desselben vorstellen, von welchen wir aber nur die beiden ersteren zu berücksichtigen haben.

Die ursprünglichen, d. h. die auf das tesserale Axensystem bezogenen Gleichungen dieser neuen Axen sind nun aber folgende:

für die Axe L, $x - y = 0$, und $z - x = 0$,
für die Axe L', $x = 0$, und $y + z = 0$,
für die Axe L'', $y = 0$, und $x + z = 0$.

Vergleichen wir diese Gleichungen mit denen in §. 44 stehenden allgemeinen Gleichungen der Linien L, L' und L'', so ergiebt sich, dass in gegenwärtigem Falle

für L die Bedingungen $M = N = R$,
für L' die Bedingungen $M' = 0$, und $N' = -R'$,
für L'' die Bedingungen $N'' = 0$, und $M'' = -R''$

erfüllt sein müssen. Daraus ergeben sich denn sofort für irgend eine, im tesseralen Axensysteme durch die Parameter a, b und c bestimmte Fläche F, ihre in dem neuen Axensysteme giltigen und respective in den Axen L, L' und L'' gelegenen Parameter a_1, b_1 und c_1 mit folgenden Werthen:

$$a_1 = \frac{abc\sqrt{3}}{ab+ca+bc}$$

$$b_1 = \frac{bc\sqrt{2}}{b-c}$$

$$c_1 = \frac{ca\sqrt{2}}{a-c}$$

Die Grundparameter des neuen Axensystems haben also die Werthe $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$, welches ja auch die Grössen der trigonalen und der rhombischen Zwischenaxe des Hexaëders sind. Die Aufgabe ist zwar hiermit wesentlich gelöst, jedoch in einer so allgemeinen Weise, welche uns die eigentlichen Verhältnisse zwischen den tesseralen und rhomboëdrischen Formen noch nicht hinreichend klar erkennen lässt. Dazu werden uns die Betrachtungen des folgenden Paragraphen verhelfen.

§. 80. Deutung der tesseralen Formen als Glieder einer rhomboëdrischen Krystallreihe.

Um von den gefundenen Werthen der neuen Parameter a_1, b_1 und c_1 einen angemessenen Gebrauch zu machen, müssen wir untersuchen, wie sich irgend ein Hexakisoktaëder mOn in der dem hexagonalen Axensysteme entsprechenden Stellung verhält. Dasselbe erscheint ganz allgemein als eine Combination von vier Skalenoëdern, wie die nachstehende Figur lehrt.

Berücksichtigen wir nur die **oberen** Flächen dieser vier Skalenoëder, so bestimmen sich dieselben, wie folgt: es wird gebildet

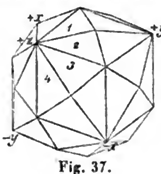


Fig. 37.

Nr. I von den sechs **obersten** Flächen, deren eine mit 1 bezeichnet ist;
Nr. II von den **ersten** Nebenflächen der vorigen, deren eine mit 2 bezeichnet ist;
Nr. III von den **zweiten** Nebenflächen der obersten, deren eine mit 3 bezeichnet ist;
Nr. IV von den **dritten** Nebenflächen der obersten, deren eine mit 4 bezeichnet ist.

1. Setzen wir zuvörderst, die Fläche F sei die Fläche 1, so ist

$$a = m, \quad b = n, \quad c = 1;$$

folglich wird das Verhältniss der neuen Parameter

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{mn\sqrt{\frac{3}{4}}}{mn+m+n} : \frac{n}{n-1} : \frac{m}{m-1}$$

Da nun aber, nach der im Hexagonalsysteme gebräuchlichen Ableitung und Bezeichnung, von den beiden Parametern b_1 und c_1 der kleinste $= 1$ genommen werden muss, so sind alle Glieder dieses Verhältnisses mit $\frac{m-1}{m}$ zu multipliciren, und es werden also

$$\frac{n(m-1)}{mn+m+n} \text{ und } \frac{n(m-1)}{m(n-1)}$$

die Ableitungszahlen des Skalenoëders Nr. I.

2. Die dem Skalenoëder II angehörige Fläche 2 hat die Parameter

$$a = -m, \quad b = n, \quad c = 1;$$

folglich wird für sie das Verhältniss

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{mn\sqrt{\frac{3}{4}}}{mn+m-n} : \frac{n}{n-1} : \frac{m}{m+1}$$

oder es werden, weil der kleinste in die Nebenaxen fallende Parameter $= 1$ sein muss,

$$\frac{n(m+1)}{mn+m-n} \text{ und } \frac{n(m+1)}{m(n-1)}$$

die Ableitungszahlen des Skalenoëders Nr. II.

3. Die dem Skalenoëder III angehörige Fläche 3 hat die Parameter

$$a = -n, \quad b = m, \quad c = 1;$$

folglich wird für diese Fläche

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{mn\sqrt{\frac{3}{4}}}{mn-m+n} : \frac{m}{m-1} : \frac{n}{n+1}$$

weil nun das letzte Glied den kleinsten Werth hat, so werden

$$\frac{m(n+1)}{mn-m+n} \text{ und } \frac{m(n+1)}{n(m-1)}$$

die Ableitungszahlen des Skalenoëders Nr. III.

4. Die dem Skalenoëder IV angehörige Fläche 4 endlich hat die ursprünglichen Parameter

$$a = -n,\ b = -m,\ c = 1$$

erhält daher die neuen Parameter

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{mn\sqrt{\frac{3}{2}}}{mn-m-n} : \frac{m}{m+1} : \frac{n}{n+1}$$

aus welchen sich denn für das Skalenoëder IV die Ableitungszahlen

$$\frac{m(n+1)}{mn-m-n} \text{ und } \frac{m(n+1)}{n(m+1)}$$

ergeben. In welchen Fällen das eine oder das andere der Skalenoëder I, II und III eine hexagonale Pyramide, oder das Skalenoëder IV ein dihexagonales Prisma werden wird, diess, so wie die Stellung der Skalenoëder ist leicht aus einer näheren Betrachtung der gefundenen Ableitungszahlen zu beurtheilen.

Diese Ableitungszahlen beziehen sich nämlich auf die ursprüngliche Ableitung und Bezeichnung der Skalenoëder, welcher zufolge sie als hemiëdrische Formen dihexagonaler Pyramiden dargestellt werden; (Anfangsgr. S. 164). Setzen wir nun diese Pyramiden allgemein $= m'Pn'$, so muss n' eigentlich stets < 2 sein, (Anfangsgr. S. 160) und in allen Fällen, da es grösser als 2 erhalten würde, mit dem Werthe $\frac{n'}{n'-1}$ vertauscht werden, womit zugleich die Bedingung verbunden ist, dass sich dann das Skalenoëder gegen das Grundrhomboëder R in verwendeter Stellung befindet. Ist dagegen $n' = 2$, so verwandelt sich das Skalenoëder in eine hexagonale Pyramide der zweiten Art, während dasselbe nur für $n' < 2$ ein Skalenoëder von gleicher Stellung mit der Grundform R (oder dem Hexaëder) bleiben wird. Berücksichtigen wir diese, aus dem geometrischen Grundcharakter des Hexagonalsystems folgende Verhältnisse, so erhalten wir für die vier Formen, als deren Combination sich das Hexakisoktaëder mOn herausstellt, folgende Resultate.

1. Für die Form Nr. I. Ihr entsprechen allgemein die Ableitungszahlen

$$m' = \frac{n(m-1)}{mn+m+n},\ n' = \frac{n(m-1)}{m(n-1)}$$

Nun wird die Zahl $n' <=> 2$, je nachdem $n >=< \frac{2m}{m+1}$ ist; im ersten Falle ist sie unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl, und die Form I ein Skalenoëder von gleicher Stellung mit R; im zweiten Falle wird die Form die hexagonale Pyramide $m'P2$; im dritten Falle aber wird sie ein Skalenoëder von verwendeter Stellung, für welches statt n' die Grösse $\frac{n'}{n'-1}$ als Ableitungszahl einzuführen ist; überhaupt also wird die Form Nr. I:

das Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$, wenn $n > \frac{2m}{m+1}$

die hex. Pyramide $m'P2$, . . . = . . .

das Skalenoëder $-\frac{m'P\frac{n'}{n'-1}}{2}$, wenn $n < \frac{2m}{m+1}$

2. **Für die Form Nr. II.** Ihre Ableitungszahlen fanden wir:

$$m' = \frac{n(m+1)}{mn+m-n},\ n' = \frac{n(m+1)}{m(n-1)}$$

Es wird aber die Zahl $n' <=> 2$, je nachdem $n >=< \frac{2m}{m-1}$, und sie ist im letzteren Falle mit $\frac{n'}{n'-1}$ zu vertauschen; folglich wird die Form Nr. II:

das Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$, wenn $n > \frac{2m}{m-1}$
die hex. Pyramide $m'P2$, ... = . . .
das Skalenoëder $-\frac{m'P\frac{n'}{n'-1}}{2}$, . < . . .

3. **Für die Form Nr. III.** Als ihre Ableitungszahlen bestimmten sich

$$m' = \frac{m(n+1)}{mn-m+n},\ n' = \frac{m(n+1)}{n(m-1)}$$

da nun die Zahl $n' <=> 2$ wird, je nachdem $n >=< \frac{m}{m-2}$ ist, und da sie im letzteren Falle mit $\frac{n'}{n'-1}$ vertauscht werden muss, so wird die Form Nr. III:

das Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$, wenn $n' > \frac{m}{m-2}$
die hex. Pyramide $m'P2$, ... = . . .
das Skalenoëder $-\frac{m'P\frac{n'}{n'-1}}{2}$ . . < . . .

4. **Für die Form Nr. IV.** Ihre Ableitungszahlen sind allgemein:

$$m' = \frac{m(n+1)}{mn-m-n},\ n' = \frac{m(n+1)}{n(m+1)}$$

In diesem Falle ist die Zahl n' immer < 2, und daher unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl; allein die Zahl m' wird $+$, ∞ oder $-$, je nachdem $mn >=< m+n$ ist; folglich wird die Form Nr. IV:

das Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$, wenn $n > \frac{m}{m-1}$
das dihex. Prisma $\infty Pn'$, ... = . . .
das Skalenoëder $-\frac{m'Pn'}{2}$, . . . < . . .

Hiermit hätten wir denn die Zurückführung **aller** tesseralen Formen auf eine rhomboëdrische Krystallreihe gewonnen, weil unter dem Zeichen mOn jede beliebige plenotesserale Form enthalten ist.

§. 81. Fortsetzung.

Die Resultate des vorhergehenden Paragraphen beziehen sich auf die ursprüngliche oder primitive Bezeichnung der Skalenoëder; gewöhnlich aber ist es vortheilhafter, statt der primitiven die secundären Zeichen zu gebrauchen. Die Verwandlung jener in diese ist leicht zu bewerkstelligen, weil bekanntlich mit dem primitiven Zeichen $\frac{m'\text{P}n'}{2}$ das secundäre Zeichen $\frac{m'(2-n')}{n'}\text{R}\frac{n'}{2-n'}$, aequivalent ist; (Anfangsgr. S. 166). Führen wir diese Umwandlung der Zeichen aus, so erhalten wir endlich folgende definitive Resultate.

Ein jedes Hexakisoktaëder $m\text{O}n$ wird sich, aufrecht gedacht nach einer trigonalen Zwischenaxe und auf das Hexaëder als Grundform R bezogen, als eine Combination von vier rhomboëdrischen Formen darstellen, welche sich, nach Maassgabe der Werthe von m und n, bestimmen wie folgt:

Die Form Nr. I (Fläche 1 und correlate Flächen in Fig. 37) wird

das Skalenoëder $\frac{n(m+1)-2m}{n(m+1)+m}\text{R}\frac{n(m-1)}{n(m+1)-2m}$ wenn $n > \frac{2m}{m+1}$

die hex. Pyramide $\frac{n(m-1)}{n(m+1)+m}\text{P}2$ oder $\frac{2(m-1)}{3(m+1)}\text{P}2$ . . . = . . .

das Skalenoëder $-\frac{2m-n(m+1)}{n(m+1)+m}\text{R}\frac{n(m-1)}{2m-n(m+1)}$ . . . . < . . .

Die Form Nr. II (Fläche 2 und correlate Flächen in Fig. 37) wird

das Skalenoëder $\frac{n(m-1)-2m}{n(m-1)+m}\text{R}\frac{n(m+1)}{n(m-1)-2m}$ wenn $n > \frac{2m}{m-1}$

die hex. Pyramide $\frac{n(m+1)}{n(m-1)+m}\text{P}2$ oder $\frac{2(m+1)}{3(m-1)}\text{P}2$. . . = . . .

das Skalenoëder $-\frac{2m-n(m-1)}{n(m-1)+m}\text{R}\frac{n(m+1)}{2m-n(m-1)}$ . . . . < . . .

Die Form Nr. III (Fläche 3 und correlate Flächen in Fig. 37) wird

das Skalenoëder $\frac{n(m-2)-m}{n(m+1)-m}\text{R}\frac{m(n+1)}{n(m-2)-m}$ wenn $n > \frac{m}{m-2}$

die hex. Pyramide $\frac{m(n+1)}{n(m+1)-m}\text{P}2$ oder $\frac{2(m-1)}{3}\text{P}2$ . . = . . .

das Skalenoëder $-\frac{m-n(m-2)}{n(m+1)-m}\text{R}\frac{m(n+1)}{m-n(m-2)}$ . . . . < . . .

Die Form Nr. IV (Fläche 4 und correlate Flächen in Fig. 37) wird

das Skalenoëder $\frac{m(n-1)+2n}{n(m-1)-m}\text{R}\frac{m(n+1)}{m(n-1)+2n}$, wenn $> \frac{m}{m-1}$

das dihex. Prisma $\infty\text{P}\frac{m(n+1)}{n(m+1)}$ . . . . = . . .

das Skalenoëder $-\frac{m(n-1)+2n}{m-n(m-1)}\text{R}\frac{m(n+1)}{m(n-1)+2n}$, ... < . . .

Für die übrigen Formen ergeben sich hieraus folgende Resultate.

Ein jedes Ikositetraëder mOm stellt sich als die Combination von drei rhomboëdrischen Formen dar; denn es wird

die Form Nr. I stets das Rhomboëder $\frac{m-1}{m+2}R$;

die beiden Formen Nr. II und Nr. III fallen in eine einzige zusammen, welche sich bestimmt als

das Skalenoëder $\frac{m-3}{m}R\frac{m+1}{m-3}$ wenn $m > 3$

die hex. Pyramide $\frac{4}{3}P2$, ... $=$ . .

das Skalenoëder $-\frac{3-m}{m}R\frac{m+1}{3-m}$, ... $<$ . .

die Form IV endlich stellt sich heraus als

das Rhomboëder $\frac{m+1}{m-2}R$, wenn $m > 2$

das hex. Prisma ∞R, ... $=$ . .

das Rhomboëder $-\frac{m+1}{2-m}R$ . . . . $<$ . .

Ein jedes Triakisoktaëder mO stellt sich als die Combination dreier rhomboëdrischer Formen dar; es wird nämlich

die Form Nr. I stets das Rhomboëder $-\frac{m-1}{2m+1}R$,

die Form Nr. II stets das Rhomboëder $-\frac{m+1}{2m-1}R$, während

die Formen Nr. III und IV das Skalenoëder $-2Rm$ bilden.

Ein jedes Tetrakishexaëder ∞On stellt die Combination zweier rhomboëdrischer Formen dar, indem einerseits die Formen Nr. I und Nr. II, anderseits die Formen Nr. III und Nr. IV in eine einzige Form zusammenfallen; es liefern nämlich Nr. I und II

das Skalenoëder $\frac{n-2}{n+1}R\frac{n}{n-2}$ wenn $n > 2$

die hex. Pyramide $\frac{2}{3}P2$ . . . . $=$ . .

das Skalenoëder $-\frac{2-n}{n+1}R\frac{n}{2-n}$ . . . . $<$ . .

und es liefern die beiden Formen Nr. III und IV in allen Fällen

das Skalenoëder $R\frac{n+1}{n-1}$.

Das Rhombendodekaëder stellt die Combination $-\frac{1}{2}R.\infty P2$, und endlich das Oktaëder die Combination $0R.-2R$ dar.

§. 82. Gewöhnliche Zwillingskrystalle des Tesseralsystems.

Ausser jenen Zwillingen hemiëdrischer Krystalle, in denen eine Coincidenz oder doch wenigstens ein Parallelismus der Axensysteme beider

Individuen Statt findet (Anfangsgr. S. 112), und deren ganze Theorie in dem Satze erschöpft ist, dass sich beide Individuen in einer solchen Stellung befinden, bei welcher die hemiëdrischen Formen des einen Individuums die Gegenkörper des andern sind; ausser diesen Zwillingen begegnen wir im Tesseralsysteme besonders häufig solchen Zwillingsbildungen, in welchen eine trigonale Zwischenaxe als Zwillingsaxe auftritt, so dass beide Individuen in Bezug auf eine Oktaëderfläche zu einander symmetrisch gestellt sind. Dieses Gesetz beherrscht fast ausschliesslich die tesseralen Zwillingskrystalle, weshalb es einer näheren Betrachtung unterworfen zu werden verdient.

Die erste Folgerung, auf welche es uns in Betreff der Verhältnisse beider Individuen verweist, ist offenbar die, dass die beiderseitigen Zonen der Zwillingsaxe coincidiren müssen; daher fallen nach §. 76 von beiden Individuen diejenigen 6 Flächen des Rhombendodekaëders ∞O und des Ikositetraëders $2O2$, sowie diejenigen 12 Flächen jedes Hexakisoktaëders $mO\frac{m}{m-1}$, welche der Zwillingsaxe parallel sind, zu zwei und zwei in eine Ebene.

Diese Folgerung, welche sich unmittelbar aus dem Begriffe der genannten Zone ergiebt, lässt sich auch aus den Resultaten ableiten, welche uns die Transposition der Flächen gewährt. Die allgemeine Transposition einer Fläche des einen Individuums auf das Axensystem des andern ist nämlich nach §. 49 folgendermaassen zu bewerkstelligen. Wählen wir als Zwillingsaxe die Centronormale derjenigen Oktaëderfläche, deren Gleichung $x+y+z=1$, so ist im vorliegenden Falle $a=b=c=1$, woraus sich denn für irgend eine durch die Parameter a, b und c bestimmte Fläche des Individuums II in dem Axensysteme des Individuums I folgende neue Parameter ergeben:

$$a_1 = \frac{3abc}{2(b+c)a-bc}$$
$$b_1 = \frac{3abc}{2(c+a)b-ca}$$
$$c_1 = \frac{3abc}{2(a+b)c-ab}$$

Anm. Dann für alle in die Zone der Zwillingsaxe fallende Flächen des Individuums II nach §. 74 die Zonengleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, oder $ab+ca+bc=0$ gilt, aus welcher folgt, dass

$$2(b+c)a = -2bc$$
$$2(c+a)b = -2ca$$
$$2(a+b)c = -2ab$$

ist, so wird für eine jede solche Fläche auch im Axensysteme I wiederum

$$a_1 = -a,\ b_1 = -b \text{ und } c_1 = -c$$

sein müssen, womit denn ganz allgemein bewiesen ist, dass jede der Zwillingsaxen-Zone angehörige Fläche des einen Individuums mit einer gleichnamigen Fläche des anderen Individuums coincidirt.

§. 83. Parallelflächen von mOn.

Um nun aber die vorstehenden Resultate auf eine, unserer Ableitung und Bezeichnung entsprechende Weise darstellen zu können, dazu bedarf es nur der Voraussetzung, dass die transponirte Fläche F irgend einem Hexakisoktaëder mOn angehört, oder, mit anderen Worten, dass der Zwillingskrystall von zwei Hexakisoktaëdern mOn gebildet werde.

Denken wir uns beide in der Zwillingsstellung befindliche Hexakisoktaëder nach der Zwillingsaxe über einander aufrecht gestellt, so lässt offenbar jedes derselben, und also auch das Hexakisoktaëder II, seine 48 Flächen in vier zwölfzählige Flächen-Inbegriffe gruppirt erscheinen, welche mit denen in den §§. 80 und 81 betrachteten vier Formen identisch sind. Es handelt sich nun darum, diese vier Flächen-Inbegriffe des Individuums II auf das Axensystem des Individuums I zu transponiren, um den Zusammenhang zu erkennen, durch welchen die Flächen beider Individuen mit einander verkettet sind. Da aber die Flächen eines jeden Inbegriffes eine ganz analoge Lage besitzen, so brauchen wir diesen Zusammenhang auch nur für irgend eine Fläche jedes Flächensystems aufzusuchen. Denken wir uns also, die Figur 37 (S. 131) stelle das Individuum II dar, so haben wir nur successiv für die mit 1, 2, 3 und 4 bezeichneten Flächen die Werthe der in dem Axensysteme I ihnen zukommenden Parameter a_1, b_1 und c_1 zu bestimmen. Da nun diese vier Flächen mit der positiven Halbaxe der z unmittelbar zum Durchschnitte kommen, so gilt für sie alle $c=1$; folglich wird für jede derselben:

$$a_1 = \frac{3ab}{2ab+2a-b}$$

$$b_1 = \frac{3ab}{2ab+2b-a}$$

$$c_1 = \frac{3ab}{2a+2b-ab}$$

Die beiden Parameter a und b aber bestimmen sich:

für die Fläche 1, $a=m$, $b=n$,
- - - 2, $a=-m$, $b=n$,
- - - 3, $a=-n$, $b=m$,
- - - 4, $a=-n$, $b=-m$.

Substituiren wir diese Werthe in vorstehenden Ausdrücken, so erhalten wir zuvörderst für die Fläche 1 und folglich für die Form Nr. I,

$$a_1 = \frac{3mn}{2mn+2m-n}$$

$$b_1 = \frac{3mn}{2mn+2n-m}$$

$$c_1 = \frac{3mn}{2m+2n-mn}$$

Nun fordert unsere Ableitung und Bezeichnung, dass der kleinste dieser Parameter mit dem Werthe 1 eingeführt wird; es ist aber offenbar a_1 der kleinste

Parameter, weil ja $m > n$ sein muss, so lange das Zeichen $m\mathrm{O}n$ ein Hexakisoktaëder bedeutet; folglich wird das, unserer krystallographischen Bezeichnung entsprechende Parameter-Verhältniss:

$$a_1 : b_1 : c_1 = 1 : \frac{2mn+2m-n}{2mn+2n-m} : \frac{2mn+2m-n}{2m+2n-mn}$$

Da nun $c_1 > b_1$ ist, so erhalten wir endlich das Resultat:

1. Der erste Flächen-Inbegriff des Individuums II entspricht am Individuo I jedenfalls dem analog liegenden Flächen-Inbegriffe des Hexakisoktaëders

$$\frac{n(2m-1)+2m}{n(2-m)+2m}\mathrm{O}\frac{n(2m-1)+2m}{2n(m+1)-m}$$

und vice versa.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen gelangen wir für die übrigen drei Flächen-Inbegriffe auf folgende Resultate:

2. Der zweite Flächen-Inbegriff des Individuums II entspricht am Individuo I einem ähnlich liegenden Flächen-Inbegriffe

des Hexakisoktaëders $\frac{n(2m+1)+2m}{2n(m-1)-m}\mathrm{O}\frac{n(2m+1)+2m}{n(m+2)-2m}$, wenn $n > \frac{m}{4-m}$

des Ikositetraëders $\frac{m+6}{3m-6}\mathrm{O}\frac{m+6}{3m-6}$, ... = . . .

des Hexakisoktaëders $\frac{n(2m+1)+2m}{n(m+2)-2m}\mathrm{O}\frac{n(2m+1)+2m}{2n(m-1)-m}$, ... < . . .

und vice versa.

3. Der dritte Flächen-Inbegriff des Individuums II entspricht am Individuo I einem ähnlich liegenden Flächen-Inbegriffe

des Hexakisoktaëders $\frac{2n(m+1)+m}{n(2m-1)-2m}\mathrm{O}\frac{2n(m+1)+m}{n(m-2)+2m}$, wenn $n < \frac{4m}{m+1}$

des Ikositetraëders $\frac{3(m+1)}{2(m-1)}\mathrm{O}\frac{3(m+1)}{2(m-1)}$, ... = . . .

des Hexakisoktaëders $\frac{2n(m+1)+m}{n(m-2)+2m}\mathrm{O}\frac{2n(m+1)+m}{n(2m-1)-2m}$, ... > . . .

und vice versa.

4. Der vierte Flächen-Inbegriff des Individuums II entspricht am Individuo I einem ähnlich liegenden Flächen-Inbegriffe

des Hexakisoktaëders $\frac{n(m+2)+2m}{n(2m+1)-2m}\mathrm{O}\frac{n(m+2)+2m}{2n(m-1)+m}$, wenn $n < \frac{m}{m-4}$

des Triakisoktaëders $\frac{m-2}{3}\mathrm{O}$, ... = . . .

des Hexakisoktaëders $\frac{2n(m-1)+m}{n(2m+1)-2m}\mathrm{O}\frac{2n(m-1)+m}{n(m+2)+2m}$ . . . . > . . .

und vice versa*). Es sind diess dieselben, nur etwas weiter ausgeführten Re-

*) In dem letzteren Falle sind noch die drei untergeordneten Fälle zu berücksichtigen, je nachdem $m <=> \frac{4m}{m-1}$ ist; für die erste Bedingung gilt das Zeichen des He-

sultate, welche in meinem Lehrbuche der Krystallographie, II, S. 221 mitgetheilt wurden.

§. 84. Parallelflächen von mOm, mO und ∞On.

Setzen wir in den Resultaten des vorhergehenden Paragraphen $n = m$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Ikositetraëder mOm, und wir erhalten für diese Form, wenn wir sie auf das Axensystem des anderen Individuums transponiren, folgende Bestimmungen:

1. Der erste Flächen-Inbegriff entspricht dem analog liegenden Flächen-Inbegriffe

des Triakisoktaëders $\frac{2m+1}{4-m}O$, wenn $m < 4$

des Rhombendodekaëders ∞O, ... $= 4$, dagegen dem zweiten Flächen-Inbegriffe

des Triakisoktaëders $\frac{2m+1}{m-4}O$, ... > 4.

2. Der zweite und der dritte Flächen-Inbegriff coincidiren mit einander, und entsprechen den analog liegenden Flächen-Inbegriffen

des Hexakisoktaëders $\frac{2m+3}{2m-3}O\frac{2m+3}{m}$, wenn $m < 3$

des Ikositetraëders $3O3$, ... $= 3$

des Hexakisoktaëders $\frac{2m+3}{m}O\frac{2m+3}{2m-3}$, ... > 3

3. Der vierte Flächen-Inbegriff endlich entspricht den sechs analog liegenden Flächen

des Ikositetraëders $\frac{m+4}{2m-1}O\frac{m+4}{2m-1}$, wenn $m < 5$

des Oktaëders O, ... $= 5$

des Triakisoktaëders $\frac{2m-1}{m+4}O$, ... > 5.

Setzen wir in den Resultaten des §. 83 $n=1$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Triakisoktaëder mO, für welche Form sich am Individuo I folgende Parallelflächen bestimmen.

1) Der erste Flächen-Inbegriff entspricht jedenfalls sechs Flächen

des Ikositetraëders $\frac{4m-1}{m+2}O\frac{4m-1}{m+2}$.

2) Der zweite Flächen-Inbegriff entspricht sechs Flächen

des Ikositetraëders $\frac{4m+1}{2-m}O\frac{4m+1}{2-m}$, wenn $m < 2$

---

xakisoktaëders wie oben; für die zweite Bedingung, da nämlich $n = \frac{4m}{m-1}$, wird das Hexakisoktaëder zu dem Ikositetraëder $\frac{2(m+1)}{3(m-1)}O\frac{2(m+1)}{3(m-1)}$; und für die letzte Bedingung sind die obigen Ableitungszahlen des Hexakisoktaëders zu vertauschen.

des Hexaëders $\infty O \infty$, wenn $m = 2$

des Ikositetraëders $\frac{4m+1}{m-2} O \frac{4m+1}{m-2}$, ... > 2.

3. Der dritte und vierte Flächen-Inbegriff entsprechen jedenfalls zwölf Flächen

des Hexakisoktaëders $(3m+2) O \frac{3m+2}{3m-2}$

Setzen wir endlich in den Resultaten des §. 83 $m = \infty$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Tetrakishexaëder $\infty O n$, für welches sich am Individuo I die folgenden Parallelflächen herausstellen.

1. Der erste und der zweite Flächen-Inbegriff fallen zusammen, und entsprechen den zwölf analog liegenden Flächen

des Hexakisoktaëders $\frac{2(n+1)}{2-n} O \frac{2(n+1)}{2n-1}$, wenn $n < 2$

des Tetrakishexaëders $\infty O 2$ . . . . $= 2$

des Hexakisoktaëders $\frac{2(n+1)}{n-2} O \frac{2(n+1)}{2n-1}$, ... > 2.

2. Der dritte und vierte Flächen-Inbegriff coincidiren gleichfalls, und entsprechen zwölf Flächen

des Hexakisoktaëders $\frac{2n+1}{2(n-1)} O \frac{2n+1}{n+2}$, wenn $n < 4$

des Ikositetraëders $\frac{3}{2} O \frac{3}{2}$, ... $= 4$

des Hexakisoktaëders $\frac{2n+1}{n+2} O \frac{2n+1}{2(n-1)}$, ... > 4.

Endlich ergiebt sich aus vorstehenden Resultaten, dass in diesen Zwillingskrystallen den Flächen des Rhombendodekaëders sechs Flächen von $4O4$, und sechs Flächen von ∞O, den Flächen des Oktaëders zwei Flächen von O und sechs Flächen von $5O5$, sowie den Flächen des Hexaëders sechs Flächen von $2O$ in dem anderen Individuo parallel sind.

Zweiter Abschnitt.

Tetragonales System.

Erstes Capitel.

Holoëdrische Formen des Tetragonalsystems.

§. 85. Axensystem, Zwischenaxen.

Das tetragonale Krystallsystem unterscheidet sich vom tesseralen Systeme wesentlich dadurch, dass eine der drei Axen den beiden anderen un-

gleich geworden ist, und demzufolge eine eminente Bedeutung gewinnt, kraft welcher sie die Symmetrie-Verhältnisse sämmtlicher Formen beherrscht. Sie erscheint daher als eine absolute, als eine von der Natur selbst gebotene Hauptaxe, während die beiden anderen Axen nur noch als Nebenaxen gelten.

Wir bestimmen die Hauptaxe als Axe der x, die Nebenaxen als Axen der y und z, und nennen die horizontale Coordinat-Ebene oder die Ebene (yz) die Basis, die beiden verticalen Coordinat-Ebenen die primären Hauptschnitte des Systems. Ausser den drei Grundaxen sind noch zwei Zwischenaxen zu berücksichtigen; sie liegen in der Ebene der Basis mitten zwischen den Nebenaxen, und bestimmen, zugleich mit der Hauptaxe, ebenfalls zwei verticale Ebenen, welche wir die secundären Hauptschnitte des Systems nennen. Jeder Schnitt, welcher durch eine tetragonale Form rechtwinkelig auf die Hauptaxe gelegt wird, heisst ein Querschnitt derselben.

Anm. Da die Querschnitte aller holoëdrischen Formen dieses Systems Quadrate oder Tetragone, oder doch wenigstens solche Figuren sind, in oder um welche sich Tetragone beschreiben lassen, so schlug *Breithaupt* den Namen tetragonales System vor, dessen wir uns gleichfalls bedienen, weil sich das Beiwort tetragonal auf ein sehr augenfälliges Verhältniss aller hierher gehörigen Formen bezieht und zu gewissen Zusammensetzungen besser eignet, als andere Benennungen. Dem Worte quadratisch aber ziehen wir es deshalb vor, weil auch die Namen aller übrigen einaxigen Systeme aus der griechischen Sprache entlehnt worden sind.

§. 86. Verschiedene Parameter-Verhältnisse.

Der Umstand, dass sich im Tetragonalsysteme die Hauptaxe als eine ungleichwerthige und eminente Axe den beiden anderen Axen überordnet, lässt das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit aller Parameter als ein unmögliches, das Verhältniss der Gleichheit zweier Parameter gegen einen ungleichen aber nur in der Weise möglich erscheinen, dass die beiden gleichen Parameter in die beiden gleichwerthigen Nebenaxen fallen. Uebrigens macht es die eminente Rolle, welche die Hauptaxe in der ganzen Entwickelung des Systems spielt, rathsam, dieses Verhältniss der Gleichheit zweier Parameter stets auf die einfachste Form 1 : 1 zurückzuführen, und alle Verschiedenheiten auf den in die Hauptaxe fallenden Parameter überzutragen.

Das einfachste endliche Parameter-Verhältniss, welches in einer tetragonalen Krystallreihe vorkommen kann, ist daher a : 1 : 1, wobei a den in der Hauptaxe liegenden Grundparameter bedeutet, welcher entweder grösser oder kleiner als 1 ist. *) Die verschiedenen tetragonalen Krystallreihen sind

*) Um die Grundparameter von den allgemeinen Symbolen a, b und c zu unterscheiden, lassen wir sie mit Antiqua-Schrift drucken; demnach bedeutet im Folgenden a stets den Grundparameter in der Hauptaxe.

aber durch verschiedene Werthe von a charakterisirt, und können nur dann als völlig unvereinbare und incommensurabele Formencomplexe erscheinen, wenn a für jede derselben einen irrationalen Werth hat.

Das Grundverhältniss a : 1 : 1 ist also die einfachste endliche Form, deren das Verhältniss der Gleichheit zweier Parameter gegen einen ungleichen fähig ist; weil aber dasselbe Verhältniss in sehr verschiedener Weise vorkommen kann, so wird

$$m\text{a} : 1 : 1$$

die allgemeinste endliche Form desselben. Dabei kann jedoch die Ableitungszahl m einerseits wachsen bis ∞, anderseits abnehmen bis 0, wodurch sich noch die beiden Gränzverhältnisse

$$\infty\text{a} : 1 : 1$$
$$\text{und } 0\text{a} : 1 : 1$$

herausstellen. Diese drei Parameter-Verhältnisse sind es, welche drei Arten von Formen bedingen, denen allen das Verhältniss zweier gleicher gegen einen ungleichen Parameter zu Grunde liegt.

Das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit der Parameter wird in seiner endlichen Form durch

$$m\text{a} : n : 1$$

dargestellt und liefert eine besondere Gruppe von Formen. Dasselbe verweist uns aber zunächst auf die beiden Gränzverhältnisse

$$\infty\text{a} : n : 1$$
$$\text{und } m\text{a} : \infty : 1$$

so wie endlich auf das Gränzverhältniss

$$\infty\text{a} : \infty : 1$$

welche abermals drei verschiedene Arten von Formen bedingen. Sonach erhalten wir, wie im Tesseralsysteme, sieben verschiedene Parameter-Verhältnisse, denen eben so viele verschiedene Arten von holoëdrischen Formen entsprechen.

Anm. Das allgemeinste dieser Verhältnisse ist offenbar ma : n : 1, weil aus ihm alle übrigen abgeleitet werden können, indem man für m und n gewisse Werthe einführt. Wenn der in die Hauptaxe fallende Parameter den Werth 0 hat, so sind wir immer auf dieselbe Form, nämlich auf die Fläche der Basis, verwiesen, welche Werthe auch die beiden anderen Parameter haben mögen; diess ist der Grund, warum die Gränzverhältnisse 0a : n : 1 und 0a : ∞ : 1 gar keine besondere Berücksichtigung erfordern, weil sie beide auf das Verhältniss 0a : 1 : 1 zurückgeführt werden können.

§. 87. Holoëdrische Formen des Tetragonalsystems.

Den so eben nachgewiesenen Parameter-Verhältnissen entsprechen nun folgende sieben Arten von holoëdrischen tetragonalen Formen.

1. Die tetragonalen Pyramiden der ersten Art, oder die Protopyramiden sind von 8 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Polkanten in die primären Hauptschnitte fallen, weshalb denn

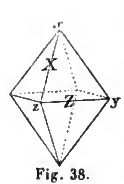


Fig. 38.

die Nebenaxen in den Mitteleckpuncten austreten. Diese Pyramiden fordern für ihre Flächen das Verhältniss *m*a : 1 : 1, und können, nach Maassgabe der verschiedenen Werthe von a und *m*, in unzähligen Varietäten auftreten, welche als spitze und als stumpfe Pyramiden unterschieden werden, je nachdem die Mittelkanten stumpfer oder schärfer als die Polkanten sind. Das Oktaëder des Tesseralsystems bildet die ideale Gränzform zwischen den spitzen und stumpfen Protopyramiden, ist aber vom Tetragonalsystem ausgeschlossen.

2. Tetragonale Pyramiden der zweiten Art, oder Deuteropyramiden; sie sind gleichfalls von 8 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Polkanten jedoch in die secundären Hauptschnitte fallen, weshalb die Nebenaxen in den Mittelpuncten der Mittelkanten austreten. Sie erfordern das Parameter-Verhältniss *m*a : ∞ : 1, können ebenfalls in zahllosen Varietäten vorkommen, und werden als spitze und als stumpfe Deuteropyramiden unterschieden, je nachdem ihre Mittelkanten grösser oder kleiner als 90° sind.

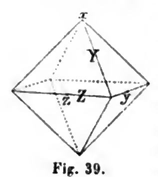


Fig. 39.

3. Ditetragonale Pyramiden; sie sind von 16 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren Querschnitte stets ditetragonale Figuren darstellen, da regelmässig achtseitige oder oktogonale Pyramiden unmöglich sind. In ihrer allgemeinen Gestalt nähern sie sich bald den Protopyramiden, bald den Deuteropyramiden; ihre zweierlei Polkanten fallen in die beiderlei verticalen Hauptschnitte des Axensystems, und lassen sich daher als primäre und als secundäre Polkanten, so wie die zweierlei Mittelecke als primäre und secundäre Mittelecke unterscheiden. Ihre Flächen erfordern das Parameter-Verhältniss *m*a : *n* : 1, woraus denn folgt, dass sie die allgemeinsten Formen und die Repräsentanten aller holoëdrischen Formen des Tetragonalsystems sind. Es giebt möglicherweise unendlich viele ditetragonale Pyramiden, welche gleichfalls als spitze und als stumpfe unterschieden werden, je nachdem *m*a grösser oder kleiner als 1 ist.

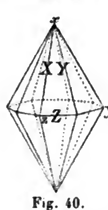


Fig. 40.

Diese drei Arten von Formen bilden den Inbegriff der geschlossenen, der den Raum allseitig umschliessenden holoëdrischen Formen des Systems; ausser ihnen erscheinen aber auch noch sehr häufig folgende offene, den Raum nicht allseitig umschliessende Formen.

4. Das tetragonale Prisma der ersten Art, oder das Protoprisma; eine von 4 Parallelflächen der secundären Hauptschnitte gebildete Form, deren Flächen das Parameter-Verhältniss ∞a : 1 : 1 haben, weshalb denn ihre Seitenkanten in die primären Hauptschnitte fallen. Diese Form ist in der Richtung der Hauptaxe von indefiniter Ausdehnung zu denken, indem sie bald säulenartig langgestreckt,

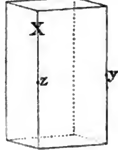


Fig. 41.

bald sehr kurz ausgebildet vorkommt; auch hat sie nach oben und nach unten gar keine bestimmte Begränzung, dergleichen ihr erst durch die Flächen anderer Formen ertheilt wird, woraus denn folgt, dass sie für sich allein gar nicht vorkommen kann. In der Figur sind die Flächen des Pinakoides als Begränzungsflächen beigefügt.

5. Das tetragonale Prisma der zweiten Art, oder das Deuteroprisma; diese Form stimmt in allen ihren geometrischen Eigenschaften mit dem Protoprisma überein, unterscheidet sich aber von selbigem wesentlich dadurch, dass ihre Flächen den primären Hauptschnitten parallel sind, und das Parameter-Verhältniss $\infty a : \infty : 1$ haben, weshalb denn ihre Seitenkanten in die secundären Hauptschnitte fallen. Ausserdem gilt von ihr dasselbe, was von dem Prisma der ersten Art gesagt wurde.

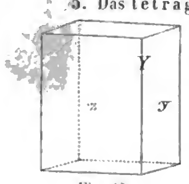


Fig. 42.

6. Die ditetragonalen Prismen sind von 8, der Hauptaxe parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Ditetragon ist, und deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty a : n : 1$ haben. Sie besitzen zweierlei Seitenkanten, welche, nach ihrer Lage in den beiderlei Hauptschnitten, als primäre und secundäre Seitenkanten unterschieden werden können. In Bezug auf ihre Ausdehnung und Begränzung nach oben und unten gilt dasselbe, was von den tetragonalen Prismen bemerkt worden ist. Regelmässig achtseitige oder oktogonale Prismen kommen in der Natur nicht vor.



Fig. 43.

7. Das Pinakoid ist eine von zwei, der Basis parallelen Flächen gebildete Form von dem Parameter-Verhältnisse $a : \infty : \infty$ oder $0a : 1 : 1$; da sie den Raum in lateraler Richtung offen lässt, so kann sie nur in Combination mit anderen Formen erscheinen, wie ihr denn in der Figur die Flächen des Deuteroprisma beigefügt sind.

Fig. 44.

Anm. Die Prismen und das Pinakoid sind also Formen, welche für sich allein gar nicht bestehen können, so dass ihre Ausbildung nothwendig die Coëxistenz anderer Formen erfordert. Wie die Prismen die säulenförmigen Krystalle des Systems bedingen, so bedingt das Pinakoid die tafelförmigen Krystalle desselben.

§. 88. Grundform; Ableitung und Bezeichnung der holoëdrischen Formen.

Es folgt aus dem Begriffe der Grundform (Anfangsgr. S. 20), dass in jeder tetragonalen Krystallreihe irgend eine Protopyramide zur Grundform gewählt, oder, mit anderen Worten, dass die dazu auserwählte Pyramide als eine Protopyramide eingeführt, und die Stellung des Axensystems demgemäss fixirt werden muss. Das Parameter-Verhältniss dieser Pyramide be-

stimmt uns den Grundwerth a der halben Hauptaxe, für 1 als den Grundwerth der halben Nebenaxe. Wir bezeichnen diese Grundform mit P.

Bei der Ungleichwerthigkeit der Hauptaxe und der Nebenaxen werden solche, als veränderliche Grössen gedacht, von einander unabhängige veränderliche Grössen sein müssen. Denken wir zuvörderst die Hauptaxe a allein veränderlich, indem wir sie mit einer rationalen Zahl m multipliciren, welche theils grösser, theils kleiner als 1 sein, und einerseits bis ∞ wachsen, anderseits bis 0 abnehmen kann, so erhalten wir für jeden endlichen Werth von m eine neue tetragonale Pyramide der ersten Art, welche spitzer oder stumpfer als die Grundform sein wird, je nachdem $m >$ oder < 1 ist, jedenfalls aber durch das Zeichen mP dargestellt werden kann, welches das allgemeine Zeichen sämmtlicher Protopyramiden ist.

Für $m = \infty$ geht die Pyramide in das Protoprisma, und für $m = 0$ in die Basis über, welche letztere jedoch immer in ihren beiden Parallelflächen, als Pinakoid ausgebildet ist. Das Protoprisma ∞P und das Pinakoid 0P sind also die beiden Gränzformen der Protopyramiden, und lassen sich mit ihnen in eine Reihe

$$\begin{array}{ccccc} & m<1 & & m>1 & \\ 0P \;....\; & mP & \;....\; P \;....\; & mP & \;....\; \infty P \end{array}$$

zusammenstellen, welche man die Grundreihe des Tetragonalsystems nennen kann.

Nehmen wir irgend ein Glied mP dieser Grundreihe, multipliciren wir seine Nebenaxen mit einer Zahl n, welche $>$ 1 ist, und legen wir dann in jede seiner Polkanten zwei Flächen, welche die nicht zu derselben Polkante gehörige Nebenaxe beiderseits in der Entfernung n schneiden, so erhalten wir jedenfalls eine ditetragonale Pyramide, deren Basis für verschiedene Werthe von n eine verschiedene ditetragonale Figur sein wird. Für $n = \infty$ geht diese Figur in das um die Basis von mP regelmässig umschriebene Quadrat, und damit die Pyramide selbst in eine Deuteropyramide über. Das allgemeine Zeichen der ditetragonalen Pyramiden wird mPn, und dasjenige der Deuteropyramiden mP∞ zu schreiben sein.

Wird dieselbe Ableitung auch aus dem Protoprisma ∞P vorgenommen, so gelangen wir auf ditetragonale Prismen ∞Pn, und endlich auf das Deuteroprisma ∞P∞. Denken wir uns aber diese Ableitungen um sämmtliche Glieder der Grundreihe vollzogen, so erhalten wir verschiedene Reihen von ditetragonalen Pyramiden, deren jede durch einen besonderen Zahlwerth von n charakterisirt ist, und schliesslich die Reihe aller Deuteropyramiden nebst dem zugehörigen Prisma, nämlich

$$\begin{array}{ccccc} & m<1 & & m>1 & \\ 0P \;....\; & mP\infty & \;....\; P\infty \;....\; & mP\infty & \;....\; \infty P\infty \end{array}$$

welche Reihe wir die Gränzreihe des Tetragonalsystems nennen können, weil sie die letzten Resultate aller Ableitungen begreift.

Anm. Hiermit sind denn alle Parameter-Verhältnisse erschöpft, und daher auch alle Ableitungen erledigt; denn es lässt sich keine holoëdrische Form des Tetragonalsystems denken, welche nicht unter dem Zeichen mPn enthalten wäre,

sobald für m auch die Gränzwerthe 0 und ∞, für n die Gränzwerthe 1 und ∞ zugelassen werden. Daher sind denn auch die ditetragonalen Pyramiden mit vollem Rechte als die allgemeinen Repräsentanten der holoëdrischen Formen des Systems zu betrachten, in welchem sie genau dieselbe Bedeutung haben, wie die Hexakisoktaëder im Tesseralsysteme. Uebrigens lassen sich die Resultate dieser Ableitungen gleichfalls in der Form eines triangulären Schemas darstellen, wie solches in meinen Elementen der Mineralogie (4. Aufl. S. 31) mitgetheilt worden ist.

§. 89. Berechnung der ditetragonalen Pyramiden.

Da die ditetragonalen Pyramiden mPn als die allgemeinsten holoëdrischen Formen des Systems charakterisirt sind, so haben wir auch die Berechnung zunächst für sie auszuführen, wobei wir uns jedoch auf die Zwischenaxen, die Kantenlinien und die Kantenwinkel beschränken wollen. Allen diesen Rechnungen liegt die Länge der halben Nebenaxe als Einheit zu Grunde.

1. Zwischenaxen.

Es sei beistehende Figur das Bild irgend einer ditetragonalen Pyramide mPn, so haben die beiden Nebenaxen der y und z ihre Austrittspuncte in den primären Mittelecken, die Zwischenaxen dagegen ihre Austrittspunkte in den secundären Mittelecken. Betrachten wir die im Octanten der positiven Halbaxen gelegene Fläche F, deren Gleichung

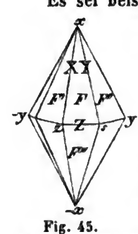


Fig. 45.

$$\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$$

ist, so schneidet solche die Zwischenaxe dieses Octanten in dem Puncte s; nun sind die Gleichungen dieser Zwischenaxe

$$x=0, \text{ und } y-z=0$$

folglich werden die Coordinaten ihres Endpunctes s:

$$x=0, \text{ und } y=z=\frac{n}{n+1},$$

mithin die Länge der halben Zwischenaxe

$$R=\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

und endlich der Coëfficient der Zwischenaxen, oder diejenige Zahl, mit welcher die halbe Zwischenaxe der Grundform $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden muss, um auf die Zwischenaxe der Form mPn zu gelangen:

$$r=\frac{2n}{n+1}$$

Anm. In den regelmässig achtseitigen oder oktogonalen Pyramiden würde $R=1$ sein, woraus sich der Bedingungswerth $n=1+\sqrt{2}$ ergiebt; da nun dieser Werth irrational ist, während die Ableitungszahlen stets rational sein müssen, so folgt hieraus die Unmöglichkeit oktogonaler Pyramiden in der Krystallwelt.

2. Kantenlinien.

Wir bezeichnen in jeder ditetragonalen Pyramide mPn
die primären Polkanten mit X,
die secundären Polkanten mit Y,
die Mittelkanten mit Z.

Diejenigen von diesen dreierlei Kanten, welche in Fig. 45 von der Fläche F gebildet werden, haben nun folgende Endpuncte:

den Poleckpunct x, dessen Coordinaten $x = m$a, $y = 0$, $z = 0$,
den prim. Mitteleckp. z, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$,
den sec. Mitteleckp. s, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = z = \frac{n}{n+1}$;

und zwar wird begränzt
die Kante X von den Puncten x und z
die Kante Y - - - x und s
die Kante Z - - - s und z.

Hieraus bestimmen sich, nach der Formel für J, S. 36,

$$X = \sqrt{m^2\text{a}^2+1}$$

$$Y = \frac{\sqrt{m^2\text{a}^2(n+1)^2+2n^2}}{n+1}$$

$$Z = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

als die Längen der Kantenlinien.

3. Kantenwinkel.

In Fig. 45 bildet die Fläche F, deren Gleichung

$$\frac{x}{m\text{a}} + \frac{y}{n} + z = 1$$

ist, mit den drei Flächen F', F'' und F''' die Kanten X, Y und Z; die Gleichungen dieser drei Flächen sind aber

für F', $\quad \frac{x}{m\text{a}} - \frac{y}{n} + z = 1$

für F'', $\quad \frac{x}{m\text{a}} + y + \frac{z}{n} = 1$

für F''', $\quad -\frac{x}{m\text{a}} + \frac{y}{n} + z = 1$

Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke von cos$W$ (S. 41) statt a, b und c die Parameter der Fläche F, und statt a', b' und c' successiv die Parameter der Flächen F', F'' und F''', so folgt:

$$\cos X = -\frac{m^2\text{a}^2(n^2-1)+n^2}{K}$$

$$\cos Y = -\frac{n(2m^2\text{a}^2+n)}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2+1)-n^2}{K}$$

wobei $K = m^2a^2(n^2+1)+n^2$ ist.

Setzt man dagegen in demselben Ausdrucke von $\cos W$ statt a, b und c abermals die Parameter der Fläche F, statt a', b' und c' aber successiv die Parameter der drei Flächen $y=0$, $y-z=0$, und $x=0$, so erhält man die Cosinus der halben Winkel, nämlich

$$\cos\tfrac{1}{2}X = \frac{ma}{\sqrt{K}},\ \cos\tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)}{\sqrt{2K}},\ \cos\tfrac{1}{2}Z = \frac{n}{\sqrt{K}}.$$

Für oktogonale Pyramiden führt die Bedingung $\cos\frac{1}{2}X = \cos\frac{1}{2}Y$ abermals auf den Werth $n = 1+\sqrt{2}$.

§. 90. Berechnung der übrigen holoëdrischen Formen.

a. Berechnung der Protopyramiden mP.

Setzt man in den Resultaten des §. 89 $n=1$, so erhält man für die tetragonalen Pyramiden der ersten Art folgende Werthe.

1. Coëfficient der Zwischenaxen; $r=1$.
2. Kantenlinien; $X = \sqrt{m^2a^2+1}$
   $Z = \sqrt{2}$
   $Y = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2m^2a^2+1}$, keine Kante mehr.

Es ist nämlich die Linie Z in §. 89 die halbe, und daher $2Z$ die ganze Mittelkante von mP; die Kantenlinie Y aber verschwindet als solche, und erscheint nur noch als die Höhenlinie der Flächen von mP.

3. Kantenwinkel;

$$\cos X = -\frac{1}{2m^2a^2+1}$$

$$\cos Y = -1,\ \text{also}\ Y = 180^0,$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2-1}{2m^2a^2+1}$$

die halben Winkel berechnen sich leicht, denn es ist

$$\tan\tfrac{1}{2}Z = ma\sqrt{2},\ \text{und}\ \cos\tfrac{1}{2}X = ma\cos\tfrac{1}{2}Z.$$

b. Berechnung der Deuteropyramiden mP∞.

Setzt man in den Resultaten des §. 89 $n=\infty$, so erhält man für die tetragonalen Pyramiden der zweiten Art die folgenden Werthe.

1. Coëfficient der Zwischenaxen; $r=2$.
2. Kantenlinien; $Y = \sqrt{m^2a^2+2}$
   $Z = 2$
   $X = \sqrt{m^2a^2+1}$, keine Kante mehr.

Die Kantenlinie Z in §. 89 ist nämlich die halbe, und daher $2Z$ die ganze Mittelkante von mP∞; die Kantenlinie X aber verschwindet als solche, und stellt nur noch die Höhenlinie der Flächen dar.

3. Kantenwinkel; $\cos X = -1$, also $X = 180°$,

$$\cos Y = -\frac{1}{m^2 a^2 + 1}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2 a^2 - 1}{m^2 a^2 + 1}$$

die halben Winkel findet man leicht durch die Ausdrücke

$$\tang \tfrac{1}{2} Z = ma, \text{ und } \cos \tfrac{1}{2} Y = ma \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} Z.$$

c. Berechnung der ditetragonalen Prismen ∞Pn.

1. Coëfficient der Zwischenaxen; $r = \frac{2n}{n+1}$.

2. Kantenlinien; die Seitenkanten X und Y sind von indefiniter Länge.

3. Kantenwinkel; $\cos X = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

$$\cos Y = -\frac{2n}{n^2 + 1}$$

$$\cos Z = -1, \text{ also } Z = 180°.$$

Die beiden tetragonalen Prismen und das Pinakoid bedürfen keiner Berechnung.

Zweites Capitel.

Hemiëdrische Formen des Tetragonalsystems.

§. 91. Trapezoëdrische Hemiëdrie.

Wie wir im Tesseralsysteme die verschiedenen Gesetze der Hemiëdrie zunächst am Hexakisoktaëder bestimmt haben, so werden wir solche im Tetragonalsysteme an der ditetragonalen Pyramide aufsuchen müssen. Denn diese Pyramiden repräsentiren gewissermaassen alle holoëdrischen Formen, und da jede Meroëdrie ein durchgreifendes Verhältniss ist, welchem sich keine holoëdrische Form entziehen kann, so wird auch jede andere Form in ihrer Art denselben Gesetzen zu unterwerfen sein, wie die achtseitige Pyramide.

Die ditetragonalen Pyramiden mPn sind einer vierfachen hemiëdrischen Ausbildung fähig, sobald wir nämlich die Hemiëdrie überhaupt in der Weise auffassen, dass dabei die viergliedrige Symmetrie des Systems erhalten bleibt, folglich je vier, über den einzelnen Quadranten der Basis gelegene Flächen zu einem Gliede vereinigt, und in jedem Gliede zwei Flächen bleibend gedacht werden*). Da nun jede andere holoëdrische Form auf eine ditetragonale Pyra-

*) Es ist nicht wahrscheinlich, dass es solche Arten der Hemiëdrie oder Tetartoëdrie gebe, bei welchen die abwechselnden Glieder gänzlich ausfallen, und sich daher gar nicht an der Bildung der hemiëdrischen oder tetartoëdrischen Formen betheiligen. Diese Bemerkung dürfte eben so für das hexagonale wie für das tetragonale System Giltigkeit haben.

mide zurückgeführt werden kann, so stellen sich für das Tetragonalsystem überhaupt vier verschiedene Modalitäten der Hemiëdrie heraus.

Die erste Modalität ist diejenige, bei welcher nur die abwechselnden einzelnen Flächen der Pyramide mPn ausgebildet sind, während die übrigen Flächen verschwinden; in jedem Gliede der Pyramide bleibt also entweder gegen die obere rechte die untere linke Fläche, oder umgekehrt. Die ditetragonale Pyramide verwandelt sich dadurch in ein tetragonales Trapezoëder, d. h. in eine von 8 gleichschenkeligen Trapezoiden umschlossene Form mit 4 längeren stumpferen, und 4 kürzeren schärferen Mittelkanten. Nach diesem Resultate lässt sich diese erste Modalität der Hemiëdrie füglich die trapezoëdrische Hemiëdrie des Tetragonalsystems nennen.

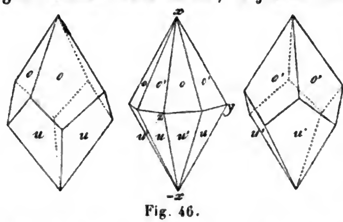


Fig. 46.

Je zwei correlate, also aus einer und derselben Pyramide abgeleitete Trapezoëder zeigen das Verhältniss der Enantiomorphie (S. 104), verhalten sich also zu einander wie ein rechts und ein links gebildeter Körper; was sich in ihren krystallographischen Zeichen dadurch ausdrücken lässt, dass ihnen ein d oder ein l vorgesetzt wird. Demnach werden $d\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ die Zeichen je zweier correlater oder complementärer Trapezoëder.

Alle übrigen Formen des Tetragonalsystems unterliegen zwar der trapezoëdrischen Hemiëdrie, ohne jedoch durch sie eine Aenderung ihrer geometrischen Configuration zu erleiden; sie bleiben scheinbar unverändert, weil ihre sämmtlichen Flächen erhalten bleiben. Eine genauere Untersuchung lässt jedoch erkennen, dass die Bedeutung dieser Flächen eine wesentlich andere geworden ist, indem eine jede derselben eigentlich nur mit einer Hälfte vorhanden ist, weshalb denn auch die Pyramiden mP, $mP\infty$ und alle übrigen Formen, wenn auch nicht ihrer Erscheinung, so doch ihrem Wesen nach als hemiëdrische und zugleich als enantiomorphe Formen charakterisirt sein werden. Obgleich also die trapezoëdrische Hemiëdrie lediglich für die ditetragonalen Pyramiden eine wirkliche Umgestaltung zur Folge hat, und obgleich solche geometrisch nur an der Ausbildungsweise dieser Formen zu erkennen ist, so wird doch die Enantiomorphie, als eine zugleich physikalisch wirksame Erscheinung, die sämmtlichen Formen einer Krystallreihe beherrschen, welche dieser Hemiëdrie unterworfen sein sollte.

Anm. Man kennt noch kein Mineral und auch keinen künstlich dargestellten Körper, an welchem diese Hemiëdrie mit Bestimmtheit erkannt worden wäre; da sie aber doch früher oder später entdeckt werden kann, so glaubten wir sie mit erwähnen zu müssen. Jedenfalls lässt sich voraussetzen, dass diejenigen Körper, deren Krystallformen mit dieser Hemiëdrie behaftet sind, auch

die circulare Polarisation des Lichtes zeigen werden, wie solche bisher bei allen enantiomorphen Substanzen nachgewiesen worden ist.

§. 92. Sphenoidische Hemiëdrie.

Die zweite Modalität der Hemiëdrie ist diejenige, bei welcher in den auf einander folgenden Gliedern der ditetragonalen Pyramide abwechselnd die oberen und unteren Flächenpaare (oder die in den abwechselnden Raumoctanten gelegenen Flächen) ausgebildet sind. Die Pyramide mPn verwandelt sich dadurch in ein tetragonales Skalenoëder, d. h. in eine von 8, meist ungleichseitigen *) Dreiecken umschlossene Form, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und ablaufen, und deren Polkanten zweierlei, nämlich 4 längere stumpfere, und 4 kürzere schärfere sind. Je zwei correlate Skalenoëder als hemiëdrische Gegenkörper befinden sich nur in verschiedener Stellung zu einander, können daher auch durch blose Stellungsänderung zur Congruenz gebracht werden, und lassen sich durch die Stellungszeichen + und — unterscheiden, von welchen das erstere in der Regel unnöthig ist, so dass $\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ die krystallographischen Zeichen dieser Skalenoëder sind.

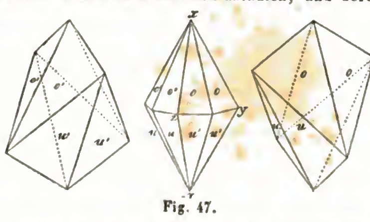


Fig. 47.

Untersuchen wir nun die Wirkungen dieser Hemiëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn bleiben scheinbar unverändert; doch macht sich für ihre abwechselnden Flächenpaare der Gegensatz von oberen und unteren Flächen geltend.

Die Protopyramiden mP verwandeln sich in tetragonale Sphenoide, d. h. in doppelt keilförmige, von 4 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und absteigen, während ihre End- oder Polkanten horizontal sind; man unterscheidet stumpfe und scharfe Sphenoide, je nachdem die Polkante > oder < 70° 32′ ist. Da übrigens für

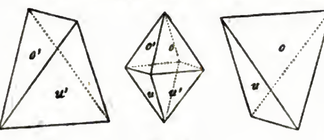


Fig. 48.

*) Allerdings können in gewissen Fällen auch gleichschenkelige Dreiecke als Begränzungsflächen dieser Formen auftreten, weshalb streng genommen der Name Skalenoëder nicht allgemein richtig ist.

je zwei correlate Sphenoide nur eine Verschiedenheit der Stellung besteht, so werden ihre krystallographischen Zeichen $\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$.

Die Deuteropyramiden $mP\infty$ bleiben scheinbar unverändert; doch ist eigentlich von jeder ihrer Flächen nur die rechte oder die linke Hälfte vorhanden, was freilich auf die geometrische Erscheinungsweise der ganzen Form ohne Einfluss bleibt.

Das Protoprisma ∞P bleibt scheinbar unverändert, obwohl sich für seine abwechselnden Flächen der Gegensatz von oben und unten geltend macht.

Das Deuteroprisma $\infty P\infty$ erleidet ebenfalls keine sichtbare Veränderung, obwohl eigentlich von jeder seiner Flächen abwechselnd nur das linke obere und rechte untere, oder das rechte obere und linke untere Viertel rückständig sind.

Das Pinakoid 0P bleibt bei dieser wie bei jeder anderen Hemiëdrie unverändert.

Ueberhaupt also stellt sich das Ergebniss heraus, dass durch diese sphenoidische Hemiëdrie, wie wir solche nach ihrem einfachsten und häufigsten Producte nennen, lediglich die ditetragonalen Pyramiden und die Protopyramiden eine wirkliche Gestaltveränderung erleiden.

Anm. Sollte eine tetragonale Krystallreihe zugleich dieser Hemiëdrie und dem Hemimorphismus*) unterworfen sein, so würden, kraft dieser letzteren Eigenschaft, die ditetragonalen Prismen nur noch mit ihren abwechselnden Flächenpaaren, folglich als rhombische Prismen, das Protoprisma aber nur mit zwei abwechselnden Flächen, als ein verticales Pinakoid ausgebildet vorkommen.

§. 93. Pyramidale und rhombotype Hemiëdrie.

Die dritte Modalität der Hemiëdrie ist diejenige, bei welcher in den auf einander folgenden Gliedern der ditetragonalen Pyramide entweder nur die rechten, oder nur die linken Flächenpaare ausgebildet sind. Die Pyramide mPn verwandelt sich dadurch in eine tetragonale Pyramide der dritten Art, oder in eine Tritopyramide, d. h. in eine solche Pyramide, welche sich durch ihre Flächenstellung sowohl von den Protopyramiden als auch von den Deuteropyramiden unterscheidet, von welchem Resultate auch der Name pyramidale Hemiëdrie entlehnt ist. Die hemiëdrische Form erscheint nämlich wie eine Protopyramide, welche um die verticale Hauptaxe mehr oder weniger entweder nach rechts, oder nach links verdreht ist, wodurch sich auch je zwei correlate Tritopyramiden von einan-

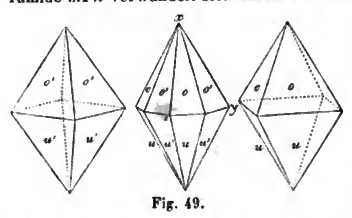


Fig. 49.

*) Vergleiche meine Elemente der Mineralogie, 4. Aufl. S. 56.

der unterscheiden. Doch ist dieser Unterschied nicht wesentlich, indem er lediglich davon abhängt, welcher Pol der Hauptaxe gerade nach oben oder nach unten gewendet ist, so dass sich z. B. die rechte Pyramide durch eine blose Umkehrung der Pole in die linke verwandelt und vice versa. Da also eine blose Stellungsänderung hinreicht, um beide hemiëdrische Gegenkörper congruent zu machen, so ist auch keine Enantiomorphie vorhanden, und wir können nach dem Vorgange von *Mohs* die Verschiedenheit beider Gegenkörper durch die Zeichen $\frac{d}{l}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{d}\frac{mPn}{2}$ ausdrücken. Die Nebenaxen haben in diesen Tritopyramiden ihre Austrittspuncte weder in den Mitteleckpuncten noch in den Mittelpuncten der Mittelkanten, sondern in irgend anderen Puncten derselben Kanten.

Untersuchen wir die Effecte dieser Hemiëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn verwandeln sich in tetragonale Prismen der dritten Art, oder in Tritoprismen, für welche sich gleichfalls der Unterschied des rechts und links Gewendetseins geltend macht, weshalb je zwei correlate dergleichen Prismen die Zeichen $\frac{d}{l}\frac{\infty Pn}{2}$ und $\frac{l}{d}\frac{\infty Pn}{2}$ erhalten.

Die Protopyramiden mP bleiben scheinbar unverändert, sind aber eigentlich nur entweder mit den rechten oder mit den linken Hälften ihrer Flächen ausgebildet.

Die Deuteropyramiden $mP\infty$ verhalten sich gerade so wie die Protopyramiden.

Das Protoprisma ∞P so wie das Deuteroprisma $\infty P\infty$ bleiben scheinbar unverändert, obgleich auch sie eigentlich nur mit den rechten oder mit den linken Hälften ihrer Flächen ausgebildet sind.

Das Pinakoid $0P$ bleibt unverändert.

Ueberhaupt also stellt sich als allgemeines Ergebniss heraus, dass bei dieser pyramidalen Hemiëdrie nur die ditetragonalen Pyramiden und die gleichnamigen Prismen einer wirklichen Gestaltveränderung unterliegen.

Möglich wäre noch eine vierte Modalität der Hemiëdrie, welche wir deshalb erwähnen wollen, weil sie vielleicht am Harmotom und an einigen anderen Mineralien vorkommt, und die fast immer vorhandene Zwillingsbildung eben so wie die eigenthümliche Formbildung des Harmotomes erklären würde. Die Zwillingskrystalle dieses Minerals sind nämlich so beschaffen, dass man in der That auf Zwillinge mit parallelen Axensystemen und auf tetragonale Formen schliessen möchte. Wenn auch die Messungen dieser Annahme widerstreiten, so ist doch zu bedenken, dass die Resultate derselben durch die Streifung der dabei mit berücksichtigten Flächen mehr oder weniger unsicher werden. Die trübe Beschaffenheit der Harmotomkrystalle verhindert eine optische Untersuchung derselben, welche allerdings zur Entscheidung führen würde, wenn es gelänge, aus einem solchen Krystalle eine rechtwinkelig auf die Hauptaxe geschliffene Lamelle im polarisirten Lichte zu prüfen.

Die vierte Modalität der Hemiëdrie würde wesentlich darin bestehen, dass von denen an den Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren der ditetragonalen Pyramide, in ihren abwechselnden Gliedern je ein rechts und ein links gelegenes Paar allein zur Ausbildung gelangt wäre, wodurch sich diese Pyramide in eine rhombische Pyramide verwandeln würde; (vergl. die Figur 54). Wird nun dasselbe Gesetz für die übrigen Formen verwirklicht, so ergiebt sich, dass die Protopyramiden unverändert bleiben, dass die Deuteropyramiden als horizontale Prismen oder Domen, die ditetragonalen Prismen als rhombische Prismen ausgebildet sind, und dass das Deuteroprisma auf ein verticales Flächenpaar oder Pinakoid reducirt wird. Die gewöhnliche Form der einfachen Harmotomkrystalle würde

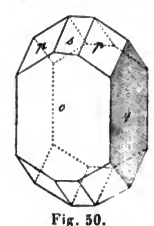


Fig. 50.

hiernach so zu deuten sein, dass $p = P$, $s = \frac{P\infty}{2}$, $o = \frac{\infty P\infty}{2}$, $q = -\frac{\infty P\infty}{2}$ wäre. In den Zwillingskrystallen aber würde sich gewissermaassen ein Streben der Natur zur Reproduction der holoëdrischen Formen zu erkennen geben. Wir theilen diese Ansicht als eine Hypothese mit, ohne freilich Messungen oder optische Untersuchungen zu ihrer Bestätigung bieten zu können. — Uebrigens könnte man diese Modalität der Hemiëdrie die rhombotype Hemiëdrie nennen, um es auszudrücken, dass durch sie für gewisse Formen des Tetragonalsystems ein dem rhombischen Systeme entsprechender Charakter herbeigeführt wird.

Anm. Noch haben wir einer eigenthümlichen Meroëdrie des Tetragonalsystems zu gedenken, welche von *G. Rose* an den Krystallen der Combination $0P.P.P\infty$ des wasserfreien schwefelsauren Ammoniaks beobachtet worden ist, und wesentlich darin besteht, dass die Protopyramide P nur mit den beiden, an zwei parallelen Polkanten, die Deuteropyramide $P\infty$ nur mit den beiden, an zwei parallelen Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren ausgebildet ist. Es wird dadurch eine, sonst nur im monoklinoëdrischen Systeme vorkommende Ausbildungsweise der Formen hervorgebracht, welche wegen des Mangels einer ringsum symmetrischen Vertheilung der bleibenden Flächen nicht füglich als eine Hemiëdrie, sondern nur als eine dem monoklinoëdrischen Systeme analoge Meroëdrie bezeichnet werden kann. Die Erscheinung ist interessant, weil sie beweist, dass ein solcher monoklinoëdrischer Formentypus nicht nur im rhombischen, sondern auch im tetragonalen Systeme vorkommen kann.

§. 94. Berechnung der tetragonalen Trapezoëder.

Die Zwischenaxen haben in jedem tetragonalen Trapezoëder denselben Werth, wie in der holoëdrischen Stammform, und bilden daher keinen neuen Gegenstand der Berechnung. Dagegen haben wir die Kanten der Trapezoëder sowohl nach ihrem Linearmaasse, als auch nach einer ihrer Angularfunctionen zu berechnen.

Ein jedes tetragonale Trapezoëder hat **dreierlei** Kanten, nämlich 8 **Polkanten**, 4 **primäre** und 4 **secundäre Mittelkanten**, indem wir unter primären Mittelkanten diejenigen verstehen, in welchen die Nebenaxen auslaufen, und deren Mittelpuncte in die primären Hauptschnitte fallen, wogegen in den secundären Mittelkanten die Zwischenaxen auslaufen, daher ihre Mittelpuncte in die secundären Hauptschnitte fallen. Bezeichnen wir nun

die Polkanten mit X,
die primären Mittelkanten mit Z, und
die secundären Mittelkanten mit Z',

so ergiebt sich, dass in beistehender Figur, in welcher x, y und z die Endpuncte der drei positiven Halbaxen bedeuten, Px eine Polkante, PQ eine primäre und PS eine secundäre Mittelkante ist. Die beiden letzteren werden durch die Puncte z und r, d. h. durch den Endpunct der Halbaxe der z, und durch den Endpunct der Zwischenaxe halbirt, weshalb denn Pz eine halbe primäre und Pr eine halbe secundäre Mittelkante darstellt. Da nun die Linien Px, Pz und Pr von den Puncten P, x, z und r begränzt werden, so handelt es sich um die Kenntniss der Coordinaten dieser vier Puncte; dieselben sind zunächst



Fig. 51.

für den Punct x, $x=ma$, $y=0$, $z=0$,
für den Punct z, $x=0$, $y=0$, $z=1$,
für den Punct r, $x=0$, $y=z=\frac{n}{n+1}$.

Zur Bestimmung der Coordinaten des Punctes P gelangen wir, indem wir die Gleichungen der Linie PQ, also der Durchschnittslinie der beiden Flächen F' und F'' mit der Gleichung der Fläche F combiniren. Es sind aber die Gleichungen dieser drei Flächen folgende:

$$\text{für } F \quad \frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$$

$$\text{für } F' \quad \frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+z=1$$

$$\text{für } F'' \quad -\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$$

Subtrahiren und addiren wir successiv die beiden Gleichungen von F' und F'', so folgen die Gleichungen der Linie PQ

$$\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}=0, \text{ und } z=1;$$

und combiniren wir diese Gleichungen mit der Gleichung von F, so folgen die Coordinaten

$$\text{für den Punct } P, \; x=\frac{ma(n-1)}{n(n+1)}, \; y=\frac{n-1}{n+1}, \; z=1.$$

Verbinden wir endlich diese Coordinaten des Punctes P successiv mit den Coordinaten der Puncte x, z und r nach der Formel für J (S. 36), so erhal-

ten wir, unter Berücksichtigung, dass Pz und Pr nur die halben Mittelkanten sind,

$$\text{Polkante} \quad X = \frac{\sqrt{n^2+1}\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{n(n+1)}$$

$$\text{Mittelkante} \quad Z = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2+n^2}}{n(n+1)}$$

$$\text{Mittelkante} \quad Z' = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{n(n+1)}$$

Anm. Setzt man in diesen Ausdrücken $n = 1$, so wird $Z = 0$, während X und Z' die Werthe der Polkante und der Mittelkante der Pyramide mP erhalten; setzt man dagegen $n = \infty$, so wird $Z' = 0$, während X und Z die Werthe der Polkante und Mittelkante der Pyramide mP∞ annehmen; was vollkommen mit den Resultaten der Ableitung in §. 91 übereinstimmt, und beweist, dass die Protopyramiden und Deuteropyramiden in ihrer geometrischen Erscheinungsweise unverändert bleiben.

Die beiden Mittelkanten Z und Z' würden nur dann einander gleich, und also die Trapezoide nur dann Deltoide werden, wenn $n = 1 + \sqrt{2}$ wäre; folglich würden nur die oktogonalen Pyramiden dergleichen von Deltoiden begränzte (und der Enantiomorphie nicht mehr unterworfene) Trapezoëder liefern, und aus der Unmöglichkeit jener folgt auch die Unmöglichkeit dieser.

Die Kantenwinkel berechnen sich nach der Formel für $\cos W$ (S. 41), wenn wir in selbiger successiv die Parameter der Flächen F und F', F' und F'', F'' und F einführen; wir erhalten so die Ausdrücke:

$$\cos X = -\frac{n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{K}$$

$$\cos Z' = -\frac{n(2m^2a^2-n)}{K}$$

in welchen wiederum $K = m^2a^2(n^2+1)+n^2$ ist. Setzt man in ihnen $n = 1$, oder $n = \infty$, so gelangt man auf die Cosinus der Polkanten und Mittelkanten der Protopyramiden oder der Deuteropyramiden, welche sich mithin auch in dieser Hinsicht als die wirklichen Gränzformen der Trapezoëder erweisen.

§. 95. Berechnung der tetragonalen Skalenoëder und der Sphenoide.

a. Berechnung der Skalenoëder.

Es folgt aus der Ableitung der tetragonalen Skalenoëder, dass die Nebenaxen in den Mittelpuncten ihrer Mittelkanten endigen, während die Zwischenaxen in den längeren Polkanten austreten. Diese Zwischenaxen behaupten jedoch unverändert den Werth, welcher ihnen in der ditetragonalen Pyramide zukommt; wir haben es daher auch nur mit der Berechnung der Kantenlinien und Kantenwinkel zu thun.

Da die längeren Polkanten der Skalenoëder die verlängerten secundären Polkanten der holoëdrischen Stammform sind, so müssen sie auch den Signatur-Buchstaben Y behalten, während wir die kürzeren Polkanten mit X, die Mittelkanten mit Z bezeichnen können.

Wenn nun in beistehender Figur x, y und z die Endpuncte der drei positiven Halbaxen bedeuten, so ist Px die in den Octanten dieser Halbaxen fallende längere Polkante, Px' die in den unteren Nebenoctanten fallende kürzere Polkante, und Pz eine halbe Mittelkante. Zur Berechnung dieser Linien bedürfen wir also der Coordinaten der Puncte x, x', z und P; diese sind

für den Punct x, $x = m\mathrm{a}$, $y = 0$, $z = 0$,
für den Punct x', $x = -m\mathrm{a}$, $y = 0$, $z = 0$,
für den Punct z, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

Fig. 52.

Um jedoch die Coordinaten des Punctes P zu finden, dazu bedürfen wir der Gleichungen der Mittelkante Pz, als der Durchschnittslinie der beiden Flächen F und F'; es ist aber die Gleichung

$$\text{für die Fläche } F \quad \frac{x}{m\mathrm{a}} + \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{für die Fläche } F' \; -\frac{x}{m\mathrm{a}} - \frac{y}{n} + z = 1$$

also werden die Gleichungen ihrer Durchschnittslinie Pz:

$$z = 1 \text{ und } \frac{x}{m\mathrm{a}} + \frac{y}{n} = 0$$

Combiniren wir diese mit der Gleichung des secundären Hauptschnittes $y - z = 0$, so erhalten wir die Coordinaten

$$\text{für den Punct } P,\; x = -\frac{m\mathrm{a}}{n},\; y = z = 1.$$

Verbinden wir nun die Coordinaten dieses Punctes successiv mit den oben stehenden Coordinaten der Puncte x, x' und z nach der Formel für J (S. 36), so finden wir, unter Berücksichtigung, dass Pz die halbe Mittelkante ist, für das Skalenoëder $\frac{m\mathrm{P}n}{2}$:

$$\text{Polkante} \quad X = \frac{\sqrt{m^2\mathrm{a}^2(n-1)^2 + 2n^2}}{n}$$

$$\text{Polkante} \quad Y = \frac{\sqrt{m^2\mathrm{a}^2(n+1)^2 + 2n^2}}{n}$$

$$\text{Mittelkante} \quad Z = \frac{2\sqrt{m^2\mathrm{a}^2 + n^2}}{n}$$

Anm. Die beiden Kanten X und Z können allerdings in gewissen Fällen gleich lang sein, wodurch denn die Flächen des Skalenoëders gleichschenkelige Dreiecke werden müssen. Setzt man die Werthe von X und Z einander gleich, so folgt als Bedingung dieser Gleichheit

$$ma = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n-3}}$$

welche immer erfordert, dass $n > 3$, und meistentheils auch, dass $m = n$ sein muss, weil der ganze Factor von n in der Regel irrational sein wird, und folglich nur entweder den Werth von a, oder einen Factor dieses Werthes repräsentiren kann. Wäre z. B. $n = 4$, und $a = \sqrt{\frac{2}{5}}$, so würde das aus der Pyramide 4P4 abgeleitete Skalenoëder von gleichschenkeligen Dreiecken umschlossen sein, und eigentlich gar nicht mehr den Namen eines Skalenoëders führen können. Wäre dagegen $n = \frac{3}{2}$, und $a = \sqrt{2}$, so würde die Pyramide $\frac{3}{2}$P$\frac{3}{2}$ ein dergleichen Skalenoëder liefern.

Was die Kantenwinkel betrifft, so leuchtet zuvörderst ein, dass Y die unveränderte Kante der holoëdrischen Stammform ist; die Kantenwinkel X und Z aber finden sich leicht aus den Parametern der Flächen F, F' und der hinteren Nebenfläche von F; es wird nämlich

$$\cos X = \frac{n(2m^2a^2-n)}{K} = -\cos Z' \text{ in §. 94,}$$

$$\cos Y = -\frac{n(2m^2a^2+n)}{K} = \cos Y \text{ in §. 89,}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{K} = \cos Z \text{ in §. 94,}$$

in welchen Ausdrücken K den Werth $m^2a^2(n^2+1)+n^2$ hat.

b. Berechnung der Sphenoide.

Setzt man in vorstehenden, für die Kantenlinien und Kantenwinkel der Skalenoëder gefundenen Ausdrücken $n = 1$, und beachtet man dabei, dass sich je zwei Kanten X des Skalenoëders zu einer Polkante des Sphenoides vereinigen, während die Kante Y als solche verschwindet, so erhält man die den Sphenoiden $\frac{mP}{2}$ entsprechenden Formeln, nämlich für die Kantenlinien:

$$\text{Polkante } X = 2\sqrt{2},$$
$$\text{Höhenlinie } Y = \sqrt{2}\sqrt{2m^2a^2+1},$$
$$\text{Mittelkante } Z = 2\sqrt{m^2a^2+1};$$

für die Kantenwinkel aber:

$$\cos X = \frac{2m^2a^2-1}{2m^2a^2+1} = -\cos Z \text{ in §. 90, a,}$$

$$\cos Y = -1, \text{ also } Y = 180^0,$$

$$\cos Z = \frac{1}{2m^2a^2+1} = -\cos X \text{ in §. 90, a,}$$

welche Werthe sich insgesammt für $ma = 1$ in jene des Tetraëders verwandeln.

Setzt man dagegen in denen für das Skalenoëder gefundenen Ausdrücken $n = \infty$, so gehen selbige in diejenigen über, welche in §. 90 für die Deuteropyramiden gefunden wurden; zum vollständigen Beweise, dass diese Pyramiden bei sphenoidischer Hemiëdrie mit ihren sämmtlichen acht Flächen aus-

gebildet bleiben. Eben so erhält man für $m=\infty$ die Formeln der ditetragonalen Prismen.

Anm. Ein jedes Skalenoëder verweist uns immer auf drei Sphenoide, welche zu demselben in sehr naher Beziehung stehen. Das eine dieser Sphenoide ist dasjenige, dessen Mittelkanten dieselbe Lage haben, wie die Mittelkanten des Skalenoëders, weshalb wir es das Sphenoid der Mittelkanten, oder auch, weil es sich unmittelbar in das Skalenoëder einschreiben lässt, das eingeschriebene Sphenoid nennen können. Die beiden anderen Sphenoide sind diejenigen, deren Flächen die längeren oder die kürzeren Polkanten des Skalenoëders abstumpfen würden, weshalb sie die Sphenoide der Polkanten genannt werden können; das Sphenoid der längeren Polkanten hat analoge, das Sphenoid der kürzeren Polkanten dagegen hat antiloge Stellung zu dem Skalenoëder.

Eine leichte Rechnung lehrt, dass die Hauptaxen der drei zu dem Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ gehörigen Sphenoide folgende Werthe haben:

im Sphenoid der Mittelkanten: $\frac{ma}{n}=h$

im Sphen. der längeren Polk.: $\frac{ma(n+1)}{2n}=h'$

im Sphen. der kürzeren Polk.: $\frac{ma(n-1)}{2n}=h''$

und es ist bemerkenswerth, dass zwischen den Hauptaxenlängen dieser drei Sphenoide die Relation $h'=h+h''$ Statt findet.

§. 96. Berechnung der Tritopyramiden.

Auch in den tetragonalen Pyramiden der dritten Art oder in den Tritopyramiden des Tetragonalsystems bleiben die Zwischenaxen unverändert, weshalb nur noch die Berechnung der Kantenlinien und Kantenwinkel zu geben ist. Nun ist es einleuchtend, dass die obere oder die untere Hälfte einer jeden solchen Pyramide genau dieselben Flächen enthält, wie die gleichnamige Hälfte eines tetragonalen Trapezoëders; denn, je nachdem für die abwechselnden oberen Flächen einer ditetragonalen Pyramide entweder die gleichsinnig, oder die widersinnig liegenden abwechselnden unteren Flächen vergrössert werden, entsteht ja entweder eine Tritopyramide, oder ein Trapezoëder. Die oberen oder die unteren Polkanten der Tritopyramiden sind also wie ihrer Lage so auch ihrem Winkelmaasse nach identisch mit den Polkanten der Trapezoëder; allein ihre Länge bestimmt sich jetzt durch ihren Durchschnitt mit der Basis, deren Gleichung $x=0$ ist.

Combiniren wir also die Gleichungen der Flächen F und F' in Fig. 51, S. 155, so erhalten wir die Gleichungen der Polkantenlinie Px, nämlich

$$\frac{(n-1)x}{ma}+\frac{(n^2+1)y}{n}=n-1$$

$$\text{und}\ \frac{(n+1)x}{ma}+\frac{(n^2+1)z}{n}=n+1,$$

in welchen wir nur $x = 0$ zu setzen brauchen, um die Coordinaten des Mitteleckpunctes der Tritopyramiden mit den Werthen

$$x = 0,\ y = \frac{n(n-1)}{n^2+1},\ z = \frac{n(n+1)}{n^2+1}$$

zu erhalten. Hieraus berechnet sich die Länge

$$\text{der Polkante } X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{der Mittelkante } Z = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Was endlich die Kantenwinkel betrifft, so sind solche bereits gefunden; denn der Polkantenwinkel X ist identisch mit dem gleichnamigen Winkel der Trapezoëder, der Mittelkantenwinkel Z aber identisch mit jenem der ditetragonalen Pyramide; also wird

$$\cos X = -\frac{n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2+1)-n^2}{K}$$

worin K abermals $= ma^2(n^2+1)+n^2$ ist.

Setzt man in diesen Ausdrücken $m = \infty$, so gelangt man auf Werthe, welche den tetragonalen Prismen der dritten Art entsprechen; für $n = 1$, oder $n = \infty$ dagegen kommen diese Ausdrücke auf diejenigen zurück, welche oben in §. 90 für die Protopyramiden und Deuteropyramiden gefunden worden sind.

Drittes Capitel.

Tetartoëdrische Formen des Tetragonalsystems.

§. 97. Allgemeine Bemerkung.

Obgleich bis jetzt noch keine Tetartoëdrie im Tetragonalsysteme nachgewiesen worden ist, so lässt sich doch erwarten, dass solche früher oder später an der einen oder der anderen tetragonal krystallisirenden Substanz entdeckt werden wird; und zwar um so mehr, als die ähnliche Ausbildungsweise bereits im Gebiete des Hexagonalsystems bekannt ist, mit welchem das Tetragonalsystem auch ausserdem so viele und auffallende Analogieen erkennen lässt. Wir halten es daher nicht für überflüssig, der Erfahrung gewissermaassen vorzugreifen, indem wir hier eine Betrachtung der möglichen tetartoëdrischen Ausbildungen tetragonaler Formen einschalten.

Halten wir abermals den Grundsatz fest, dass bei einer jeden Meroëdrie zunächst die viergliedrige Symmetrie des Tetragonalsystems respectirt werden muss, und also niemals ganze Glieder ausfallend gedacht werden dürfen, so gelangen wir auf das Ergebniss, dass für die ditetragonale Pyramide, und also

für das Krystallsystem überhaupt, nur zwei Modalitäten der Tetartoëdrie möglich sind.

Es wird nämlich zuvörderst in jedem Gliede der Pyramide mPn eine Fläche, und zwar in den auf einander folgenden Gliedern abwechselnd eine obere und eine untere Fläche bleiben müssen, während die übrigen Flächen verschwinden. Nun können aber diese abwechselnd oberen und unteren Flächen in Bezug auf rechts und links entweder gleichsinnig oder widersinnig liegen, wodurch denn folgende zwei Modalitäten der Tetartoëdrie begründet werden:

1. eine jede bleibende Fläche ist innerhalb ihres Gliedes entweder rechts liegend oder links liegend;
2. von den bleibenden Flächen sind die oberen rechts liegend, die unteren links liegend, oder auch umgekehrt.

Wir wollen die erstere Tetartoëdrie die sphenoidische, die zweite die rhombotype Tetartoëdrie nennen, weil solche vielen Formen einen rhombischen Gestaltungs-Typus verleiht. Beide sind die vollkommenen Analoga der rhomboëdrischen und der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des Hexagonalsystems.

§. 98. Sphenoidische Tetartoëdrie.

Denken wir uns in den abwechselnden Gliedern einer ditetragonalen Pyramide mPn nur je eine obere und eine untere Fläche, jedoch alle vier Flächen entweder als rechte, oder als linke ausgebildet, während die übrigen zwölf Flächen verschwinden, so gelangen wir jedenfalls auf ein tetragonales Sphenoid, welches sich aber durch seine Flächenstellung von denen in §. 92 betrachteten, eben so wie von anderen, gleich zu erwähnenden tetragonalen Sphenoiden wesentlich unterscheidet. Wir wollen diese Formen Sphenoide der dritten Art oder Tritosphenoide nennen.

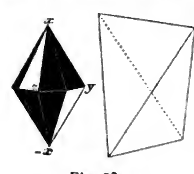


Fig. 53.

Am leichtesten erkennt man die Nothwendigkeit dieses Resultates der Tetartoëdrie, wenn man erwägt, dass die so bestimmten bleibenden Flächen keine anderen, als die abwechselnden einzelnen Flächen einer Tritopyramide (§. 93) sind, welche sich ja, wie überhaupt jede tetragonale Pyramide, in ein tetragonales Sphenoid verwandeln muss, sobald sie nur mit ihren abwechselnden Flächen ausgebildet ist. Die vier correlaten Tritosphenoide, denen allen das Zeichen $\frac{mPn}{4}$ zukommt, sind nur durch ihre Stellung verschieden, was durch Vorsetzung der Zeichen + und —, so wie $\frac{d}{l}$ und $\frac{l}{d}$ ausgedrückt werden kann.

Bringen wir nun buchstäblich genau dasselbe Gesetz für die übrigen holoëdrischen Formen in Anwendung*), so erhalten wir folgende Resultate:

Die Protopyramiden mP verwandeln sich gleichfalls in tetragonale Sphenoide, welche daher Sphenoide der ersten Art oder Protosphenoide genannt werden können, und sich von denen in §. 92 betrachteten hemiëdrichen Sphenoiden zwar nicht durch ihre Form, wohl aber durch die Bedeutung ihrer Flächen unterscheiden.

Die Deuteropyramiden mP∞ verhalten sich gerade so wie die Protopyramiden; sie werden ebenfalls zu tetragonalen Sphenoiden, welche Sphenoide der zweiten Art oder Deuterosphenoide heissen mögen, da sie sich durch ihre Flächenstellung von den beiden anderen auf ganz ähnliche Weise unterscheiden, wie die Deuteropyramiden von den Protopyramiden und Tritopyramiden.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn verwandeln sich in tetragonale Prismen der dritten Art, oder in Tritoprismen, welche sich nur durch die Bedeutung ihrer Flächen von den gleichnamigen hemiëdrischen Prismen (§. 93) unterscheiden, indem ihre Flächen abwechselnd als obere und als untere gedacht werden müssen.

Die beiden Prismen ∞P und ∞P∞ bleiben scheinbar unverändert, obwohl auch für sie das Verhältniss gilt, dass ihre Flächen abwechselnd als obere und untere gedeutet werden müssen.

Das Pinakoid endlich bleibt unverändert.

Ueberhaupt also stellt sich das Resusltat heraus, dass bei dieser Tetartoëdrie alle Pyramiden als tetragonale Sphenoide, und alle Prismen als tetragonale Prismen ausgebildet sind.

§. 99. Berechnung der Tritosphenoide.

Die Berechnung der Tritosphenoide wird äusserst einfach, wenn wir diese Formen als die Producte einer wiederholten Hemiëdrie betrachten, welcher die Tritopyramiden unterworfen wurden. Es ist nämlich ein, von der besonderen Stellung und Bedeutung der tetragonalen Pyramiden ganz unabhängiges geometrisches Resultat, dass in den, durch Vergrösserung ihrer abwechselnden Flächen aus ihnen abgeleiteten Sphenoiden die Polkanten zweimal so lang als die Mittelkanten, die Mittelkanten dagegen zweimal so lang als die Polkanten der Stammform sind. Bezeichnen wir also diese beiderlei Kanten eines Tritosphenoides $\frac{m\mathrm{P}n}{4}$ mit X und Z, so folgt aus §. 96 ohne Weiteres:

$$X = \frac{4n]}{\sqrt{n^2+1}} = 2Z \text{ in §. 96,}$$

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{\sqrt{n^2+1}} = 2X \text{ in §. 96.}$$

*) Wobei es sehr zweckmässig ist, eine jede Form durch eine angemessene Theilung ihrer Flächen auf eine achtseitige Pyramide zurückzuführen.

Eben so ist es in Bezug auf die Kantenwinkel ein ganz allgemeines geometrisches Verhältniss, dass die Polkante jedes Sphenoides das Supplement der Mittelkante, und dass die Mittelkante desselben das Supplement der Polkante derjenigen tetragonalen Pyramide ist, aus welcher das Sphenoid abgeleitet werden kann. Demgemäss folgt abermals aus §. 96 für irgend ein Tritosphenoid $\frac{m\mathrm{P}n}{4}$:

$$\cos X = \frac{m^2 a^2(n^2+1)-n^2}{K} = -\cos Z \text{ in §. 96,}$$

$$\cos Z = \frac{n^2}{K} = -\cos X \text{ in §. 96.}$$

wobei wie immer K den Werth $m^2a^2(n^2+1)+n^2$ hat.

Setzt man in allen diesen Ausdrücken $n=1$, so erhält man die in §. 93 für die hemiëdrischen Sphenoide gefundenen Werthe; setzt man dagegen $n=\infty$, so findet man für die Deuterosphenoide die Kantenlinien:

$$X = 4 = 2Z \text{ in §. 90, b;}$$

$$Z = 2\sqrt{m^2a^2+2} = 2Y \text{ in §. 90, b;}$$

und ebenso die Kantenwinkel:

$$\cos X = \frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1} = -\cos Z \text{ in §. 90, b;}$$

$$\cos Z = \frac{1}{m^2a^2+1} = -\cos Y \text{ in §. 90, b.}$$

Setzt man endlich in denen für die Tritosphenoide geltenden Ausdrücken $m=\infty$, so wird $Z=\infty$, $\cos X=1$ und $\cos Z=0$; woraus sich ergiebt, dass $\frac{\infty\mathrm{P}n}{4}$, als Gränzform der Tritosphenoide, ein tetragonales Prisma der dritten Art ist, wie auch durch die Ableitung gefunden wurde.

Anm. Es versteht sich von selbst, dass man alle diese Rechnungen auch so führen kann, dass dabei die ditetragonale Pyramide $m\mathrm{P}n$, als die eigentliche holoëdrische Stammform der Tritosphenoide zu Grunde gelegt wird. Man schreibt dann zuvörderst die Gleichungen derjenigen vier Flächen, welche als bleibende Flächen vorausgesetzt werden, bestimmt aus ihnen die Gleichungen der beiden Polkanten, und weiter durch Combination dieser mit den Gleichungen der entsprechenden Flächen die Coordinaten eines oberen und eines unteren Eckpunctes. Dieser Weg ist ein Umweg, führt aber natürlich ganz auf dieselben Resultate, wie solche hier durch Beziehung der Tritosphenoide auf ihre hemiëdrischen Stammformen erhalten worden sind.

§. 100. Rhombotype Tetartoëdrie.

Wenn in den abwechselnden Gliedern einer ditetragonalen Pyramide $m\mathrm{P}n$ für je eine obere rechte eine untere linke Fläche als bleibend vorausgesetzt wird, oder vice versa, so dass also z. B. in der nachstehenden Figur, (in welcher x, y und z die Endpuncte der drei positiven Halbaxen bedeuten), die beiden vorderen Flächen F und F', sowie die hinderen Gegenflächen der

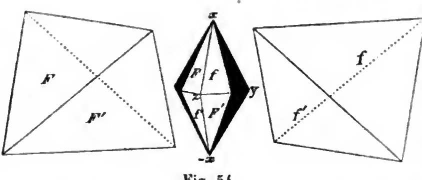


Fig. 54.

beiden Flächen f und f' allein ausgebildet sind, während die übrigen zwölf Flächen verschwinden, so verwandelt sich die Pyramide in ein Sphenoid, welches in seinen allgemeinen Eigenschaften mit den Sphenoiden des rhombischen Krystallsystemes übereinstimmt, die wir später kennen lernen werden. Dasselbe ist nämlich eine von vier ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, deren abwechselnd längere und kürzere Mittelkanten im Zickzack auf- und absteigen, während die beiden Polkanten horizontal liegen. Da diese Sphenoide im Vergleich zu den tetragonalen Sphenoiden ein schiefes oder verzogenes Ansehen haben, und doch jedenfalls von den ähnlichen Sphenoiden des rhombischen Systems unterschieden werden müssen, so wollen wir sie Plagiosphenoide nennen.

Man kann diese Formen auch durch wiederholte Hemiëdrie sowohl aus den tetragonalen Skalenoëdern, als aus den tetragonalen Trapezoëdern ableiten; aus jenen durch Vergrösserung der an den abwechselnden Mittelkanten, aus diesen durch Vergrösserung der an den abwechselnden primären Mittelkanten gelegenen Flächenpaare. Betrachten wir die Plagiosphenoide als hemiëdrische Formen der Skalenoëder, so resultiren aus jedem Skalenoëder zwei complementäre Formen, welche sich bei genauerer Betrachtung als enantiomorph, als ein paar rechts und links gebildete Körper erweisen. Dagegen sind die beiden aus einem und demselben Trapezoëder folgenden Plagiosphenoide tautomorph, d. h. beide erscheinen entweder als rechts oder als links gebildete Körper, je nachdem das Trapezoëder selbst als ein rechtes oder ein linkes vorgestellt wird. Die ditetragonale Pyramide, als die eigentliche holoëdrische Stammform der Plagiosphenoide, liefert daher vier complementäre Körper, von denen zwar je zwei durch blose Stellungs-Aenderung zur Congruenz, oder in parallele Stellung gebracht werden können, während diess für je zwei andere nicht mehr möglich ist. Die beiden in Figur 54 dargestellten Sphenoide sind ein paar solche enantiomorphe Gegenkörper.

Untersuchen wir nun, welche Wirkungen dieselbe Tetartoëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen des Tetragonalsystems ausübt*), so gelangen wir auf die folgenden Resultate.

Die Protopyramiden mP verwandeln sich in tetragonale Sphenoide, welche zwar in ihrer Gestalt sowohl mit den hemiëdrischen, als auch mit denen in §. 98 nachgewiesenen tetartoëdrischen Protosphenoiden vollkommen übereinstimmen, in der Bedeutung ihrer Flächen aber von beiden we-

*) Wobei es abermals rathsam ist, jede Form durch Theilung ihrer Flächen gleichsam in eine achtseitige Pyramide zu verwandeln,

sentlich abweichen, und kraft dieser Bedeutung der Enantiomorphie unterworfen sind, ohne dass sich doch solche in ihrer Gestaltung zu erkennen giebt.

Die Deuteropyramiden $mP\infty$ verwandeln sich in horizontal-prismatische Formen, also in solche Formen, welche den Raum in der Richtung der einen Nebenaxe offen lassen, indem sie nur noch von den vier, dieser Nebenaxe parallelen Flächen begränzt werden. Wir können diese Formen, wie die ähnlichen Formen des rhombischen Systems, mit dem Namen Doma belegen.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn verwandeln sich in vertical prismatische Formen von rhombischem Querschnitte, oder in rhombische Prismen, indem sie nur noch mit zwei, einander gegenüber und an demselben primären Hauptschnitte anliegenden Flächenpaaren ausgebildet sind.

Das Protoprisma ∞P bleibt scheinbar unverändert, obwohl die Bedeutung seiner Flächen eine ganz andere ist, als sie für dasselbe Prisma bei holoëdrischer, hemiëdrischer oder sphenoidisch-tetartoëdrischer Ausbildung Statt findet.

Das Deuteroprisma $\infty P\infty$ erscheint nur noch mit zwei gegenüberliegenden Flächen, als ein verticales Flächenpaar, dessen beide Flächen einem der primären Hauptschnitte parallel sind, mithin als ein verticales Pinakoid.

Das Pinakoid endlich bleibt unverändert.

Ueberhaupt also erleiden durch diese Tetartoëdrie die sämmtlichen holoëdrischen Formen, mit Ausnahme des Protoprismas und des Pinakoides, eine wesentliche Gestaltveränderung; alle aber unterliegen dem Verhältnisse der Enantiomorphie, als einem durchgreifenden Gegensatze, welchem sich keine Form entziehen kann.

Anm. Sollte dereinst eine tetragonal krystallisirende Substanz aufgefunden werden, welche dieser Tetartoëdrie unterworfen ist, so wird sie auch jedenfalls die Erscheinungen der circularen Polarisation des Lichtes zeigen, wie solche mit der analogen Tetartoëdrie im tesseralen und hexagonalen Systeme verbunden ist.

§. 101. Berechnung der Plagiosphenoide.

Diejenigen vier Flächen, welche in Fig. 54 (S. 164) als die zunächst bleibenden Flächen der Pyramide mPn gewählt wurden, waren die beiden vorderen Flächen F und F', so wie die beiden hinteren Gegenflächen von f und f', welche wir mit F'' und F''' bezeichnen wollen. Sind nun x, y und z die Endpuncte der positiven Halbaxen, so werden die Gleichungen dieser Flächen folgende:

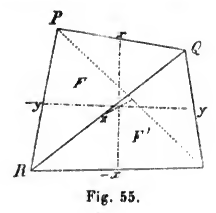


Fig. 55.

für F, $\quad \frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + z = 1$

für F', $\quad -\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$

$$\text{für } F'' \qquad \frac{x}{m\mathrm{a}} + \frac{y}{n} - z = 1$$

$$\text{für } F''' \quad -\frac{x}{m\mathrm{a}} - \frac{y}{n} - z = 1$$

Durch successive Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen der übrigen drei Flächen finden sich nun leicht die Gleichungen der drei Kantenlinien PQ, QR und PR; und zwar werden diese Gleichungen:

$$\text{für } PQ \quad x = m\mathrm{a}, \text{ und } \frac{y}{n} - z = 0$$

$$\text{für } QR \quad z = 1, \quad \text{und } \frac{x}{m\mathrm{a}} - \frac{y}{n} = 0$$

$$\text{für } PR \quad y = -n, \text{ und } \frac{x}{m\mathrm{a}} + z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man zuvörderst, dass die dreierlei Kanten des Plagiosphenoides den Coordinat-Ebenen oder Hauptschnitten parallel sind, indem die Polkante PQ horizontal, die Mittelkante QR der Ebene (xy), und die Mittelkante PR der Ebene (zx) parallel liegt.

Um die Längen dieser drei Kantenlinien zu berechnen, dazu bedarf es nur der Bestimmung der beiden Puncte P und Q; denn wir haben zu berücksichtigen, dass die Kante PQ von dem Endpuncte x der Hauptaxe, und die Kante QR von dem Endpuncte z der Axe der z halbirt wird, während der Halbirungspunct der Kante PR in der negativen Halbaxe der y, und zwar in der Entfernung n vom Mittelpuncte des Axensystems liegt. Die Coordinaten der Puncte P und Q aber bestimmen sich durch Combination der Gleichungen der Linie PQ mit den Gleichungen der Linien QR und PR; man findet so

für den Punct P $\quad x = m\mathrm{a},\ y = -n,\ z = -1,$

für den Punct Q $\quad x = m\mathrm{a},\ y = n,\ \ z = 1.$

Hieraus berechnen sich denn die Kantenlinien wie folgt:

$$\text{Polkante } X = 2\sqrt{n^2+1}$$

$$\text{längere Mittelk. } Z = 2\sqrt{m^2\mathrm{a}^2+n^2}$$

$$\text{kürzere Mittelk. } Z' = 2\sqrt{m^2\mathrm{a}^2+1}$$

Die Kantenwinkel aber bestimmen sich aus den Parametern der vier Flächen F, F', F'' und F''' nach der allgemeinen Formel von $\cos W$ (S. 41)

$$\cos X = \frac{m^2\mathrm{a}^2(n^2+1)-n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2\mathrm{a}^2(n^2-1)-n^2}{K}$$

$$\cos Z' = \frac{m^2\mathrm{a}^2(n^2-1)+n^2}{K}$$

wobei Z natürlich denselben Werth erhält, wie die Mittelkante der Skalenoëder in §. 95, oder die primären Mittelkanten der Trapezoëder in §. 94.

Setzen wir nun in diesen für die Kantenlinien und Kantenwinkel der Plagiosphenoide gefundenen Ausdrücken $n = 1$, so erhalten wir für die aus mP abgeleitete tetartoëdrische Form folgende Werthe:

$$X = 2\sqrt{2}$$
$$Z = Z' = 2\sqrt{m^2a^2+1}$$
$$\cos X = \frac{2m^2a^2-1}{2m^2a^2+1},$$
$$\cos Z = \cos Z' = \frac{1}{2m^2a^2+1},$$

welche Werthe mit denen in §. 95 für die hemiëdrischen tetragonalen Sphenoide gefundenen Werthen vollkommen übereinstimmen.

Setzen wir dagegen in denen für die Plagiosphenoide gefundenen Ausdrücken $n = \infty$, so folgt für die aus mP∞ abgeleitete tetartoëdrische Form:

$$X = Z = \infty,$$
$$\cos X = \frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1},$$
$$\cos Z = -\cos X,$$
$$\cos Z' = 1, \text{ also } Z' = 0^\circ;$$

aus welchen Werthen sich ergiebt, dass diese Form ein horizontales Prisma ist, welches von zwei einander gegenüber liegenden Flächenpaaren der Pyramide mP∞ gebildet wird.

Setzen wir eben so in den allgemeinen Ausdrücken für die Plagiosphenoide $m = \infty$, so ergiebt sich für die aus ∞Pn abgeleitete tetartoëdrische Form:

$$Z = Z' = \infty,$$
$$\cos X = 1, \text{ also } X = 0^\circ,$$
$$\cos Z = -\frac{n^2-1}{n^2+1},$$
$$\cos Z' = -\cos Z',$$

welche Werthe uns lehren, dass diese Form ein verticales Prisma von rhombischem Querschnitte ist.

Setzen wir endlich in denen so eben für ∞Pn gefundenen Werthen auch $n = \infty$, so folgt

$$\cos Z = -1, \text{ also } Z = 180^\circ,$$
$$\cos Z' = 1, \text{ also } Z' = 0^\circ,$$

woraus sich ergiebt, dass die aus dem Deuteroprisma folgende tetartoëdrische Form ein bloses verticales Flächenpaar ist.

So finden also die in §. 100 durch die Ableitung gefundenen Resultate ihre vollständige Bestätigung durch die Rechnung.

Viertes Capitel.

Combinationen der tetragonalen Formen.

§. 102. Eintheilung derselben.

Die Combinationen des Tetragonalsystems sind entweder holoëdrische, oder hemiëdrische, oder auch möglicherweise tetartoëdrische, je nachdem die

eine oder die andere Ausbildungsweise der Formen Statt findet. Da nun eine tetartoëdrische Ausbildung bis jetzt noch an keinem tetragonal krystallisirenden Körper beobachtet worden ist, so mögen auch an gegenwärtigem Orte die betreffenden Combinationen unberücksichtigt bleiben.

Die meisten tetragonal krystallisirenden Körper zeigen eine holoëdrische Ausbildung ihrer Formen, weshalb denn auch die holoëdrischen Combinationen bei weitem die wichtigsten sind. Einige Species von Mineralien und künstlich dargestellten Körpern zeigen die pyramidale, andere die sphenoidische Hemiëdrie, wogegen die trapezoëdrische Hemiëdrie bisher noch an keinem Körper mit Sicherheit erkannt worden ist. Da sich jedoch die pyramidale und die trapezoëdrische Hemiëdrie nur in solchen Formen zu erkennen geben, welche gewöhnlich sehr untergeordnet auftreten, während die in den Combinationen vorwaltenden Formen durch diese beiden Modalitäten der Hemiëdrie gar keine Umgestaltung erleiden, so können wir uns auch füglich auf die Darstellung der sphenoidischen Combinationen beschränken.

Uebrigens bedarf es kaum der Bemerkung, dass Combinationen überhaupt nur innerhalb eines und desselben Formencomplexes möglich sind, dass also auch nur von Combinationen solcher Formen die Rede sein kann, welche aus einer und derselben Grundform abgeleitet werden können, oder zu einer und derselben Krystallreihe gehören.

Jedenfalls werden wir uns aber auch hier, wie im Tesseralsysteme, nur auf die allgemeine Theorie der binären Combinationen beschränken, und dabei wiederum die Voraussetzung gelten lassen, dass die eine Form als vorherrschende, die andere als untergeordnete ausgebildet sei.

§. 103. Theorie der holoëdrischen Combinationen.

Da die ditetragonalen Pyramiden die Repräsentanten aller holoëdrischen Formen sind, so werden wir die allgemeine Theorie der binären Combinationen überhaupt in den Combinationen zweier solcher Pyramiden zu suchen haben, von welchen wir die vorherrschende mit $m\mathrm{P}n$, die untergeordnete mit $m'\mathrm{P}n'$ bezeichnen. Denken wir uns beide Formen in der Ableitungsstellung um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct ausgebildet, so erkennen wir leicht, dass die vorherrschende Form durch die Flächen der untergeordneten Form folgende sechs Modificationen erleiden kann:

1. eine Zuschärfung der primären Polkanten,
2. eine Zuschärfung der secundären Polkanten,
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten,
4. eine achtflächige Zuspitzung der Polecke,
5. eine vierflächige Zuspitzung der primären Mittelecke, und
6. eine vierflächige Znspitzung der secundären Mittelecke.

Um nun die, diesen sechs Combinations-Verhältnissen entsprechenden Bedingungen auf eine einfache Weise zu bestimmen, dazu wollen wir uns beide Formen auf gleich grosse Nebenaxen reducirt denken, wie ja solches auch bei der Ableitung vorausgesetzt wird. Dann ergeben sich jene Bedin-

gungen wesentlich aus den Grössen der Hauptaxen h und h', und der Zwischenaxen r und r'.

1. Zuschärfung der primären Polkanten X. Sie erfordert offenbar eine Coincidenz der beiderseitigen Kantenlinien X, und folglich die Gleichheit beider Hauptaxen, oder $h' = h$; ausserdem muss aber auch die Polkante der untergeordneten Form stumpfer sein, als jene der vorherrschenden Form, welcher Bedingung dadurch Genüge geleistet wird, dass $r' > r$ ist. Folglich muss eine Zuschärfung der primären Polkanten Statt finden, wenn zugleich $h' = h$ und $r' > r$ ist.

2. Zuschärfung der secundären Polkanten Y. Sie erfordert erstens einen Parallelismus der beiderseitigen Kanten Y, und zweitens, dass dieselbe Kante in der untergeordneten Form stumpfer ist, als in der vorherrschenden. Jener Parallelismus der Kanten wird Statt finden, sobald das Verhältniss der Hauptaxe zur Zwischenaxe in beiden Formen dasselbe ist; setzen wir also das Verhältniss von $h : r = q$, und jenes von $h' : r' = q'$, so wird die erste Bedingung darauf zurückkommen, dass $q' = q$. Die zweite Bedingung aber wird offenbar nur dann erfüllt sein, wenn $r' < r$. Folglich wird eine Zuschärfung der secundären Polkanten allemal eintreten, sobald $q' = q$, und $r' < r$.

3. Zuschärfung der Mittelkanten Z. Sie erfordert Parallelismus oder, wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Nebenaxen, Coincidenz der beiderseitigen Mittelkanten, also auch Gleichheit der Zwischenaxen, oder $r' = r$. Zugleich müssen aber die Mittelkanten der untergeordneten Form stumpfer sein, als jene der vorherrschenden Form, welche Bedingung durch $h' > h$ erfüllt wird. Demnach wird jedenfalls eine Zuschärfung der Mittelkanten Statt finden, wenn $r' = r$, und $h' > h$.

4. Achtflächige Zuspitzung der Polecke. Sie erfordert offenbar die Erfüllung der beiden Bedingungen, dass $h' < h$ und $q' < q$ ist.

5. Vierflächige Zuspitzung der primären Mittelecke. Sie wird jedenfalls Statt finden, wenn $h' > h$ und zugleich $r' > r$ ist.

6. Vierflächige Zuspitzung der secundären Mittelecke. Eine solche wird nothwendig eintreten, wenn $q' > q$ und $r' < r$ ist.

Da nun die Hauptaxen beider Formen die Werthe ma und m'a, die Coëfficienten der Zwischenaxen aber die Werthe $\frac{2n}{n+1}$ und $\frac{2n'}{n'+1}$ haben, so ergiebt sich, dass

$$h' >=< h, \text{ wenn } m' >=< m,$$
$$r' >=< r, \text{ wenn } n' >=< n,$$
$$q' >=< q, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< \frac{m(n+1)}{n},$$

und wir erhalten demnach für die sechs Combinations-Verhältnisse folgende Regeln:

An jeder Pyramide mPn bildet eine zweite Pyramide m'Pn':

1. eine Zuschärfung der primären Polkanten, wenn $m' = m$, und $n' > n$;

2. eine Zuschärfung der secundären Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $n' = n$, und $m' > m$;
4. eine achtflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$;
5. eine vierflächige Zuspitzung der primären Mittelecke, wenn $m' > m$, und $n' > n$;
6. eine vierflächige Zuspitzung der secundären Mittelecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$.

In diesen sechs Regeln ist die ganze Theorie der binären holoëdrischen Combinationen des Tetragonalsystems enthalten, wie man sich leicht überzeugt, wenn man für mPn und $m'Pn'$ die Zeichen irgend zweier anderer Formen einführt.

Anm. Um diess nur an einem Beispiele zu erläutern, so wollen wir aus vorstehenden Regeln die Combinations-Erscheinungen einer Deuteropyramide $mP\infty$ mit einer Protopyramide $m'P$ ableiten. Da in diesem Falle $n = \infty$ und $n' = 1$ ist, so sind offenbar nur noch die drei Fälle 2, 4 und 6 möglich, welche sich deshalb, weil die untergeordnete Form nicht mehr 16, sondern nur 8 Flächen, und weil die vorherrschende Form nur noch eine Art von Polkanten und Mittelecken besitzt, folgendermaassen ausdrücken:

Es bildet an $mP\infty$, als vorherrschender Form, eine untergeordnete Protopyramide $m'P$:

1. eine Abstumpfung der Polkanten, wenn $m' = \frac{1}{2}m$,
2. eine vierflächige Zuspitzung der Polecke, . . . $<$ . . ,
3. eine Zuschärfung der Mittelecke, . . . $>$ . . ;

dass aber die Flächen der untergeordneten Form stets auf die Polkanten der vorherrschenden aufgesetzt sein müssen, diess ergiebt sich nicht nur aus der gegenseitigen Stellung beider Pyramiden, sondern es lässt sich auch aus vorstehenden Regeln erkennen, sobald man darauf achtet, wie je zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide zu einer Fläche werden, wenn sie in eine Protopyramide übergeht.

§. 104. Theorie der sphenoidischen Combinationen.

Unter allen hemiëdrischen Combinationen des Tetragonalsystems haben diejenigen, welche durch die sphenoidische Hemiëdrie bedingt werden, die grösste Wichtigkeit, weil diese Hemiëdrie nicht nur die ditetragonalen Pyramiden, sondern auch die so gewöhnlichen Protopyramiden einer wesentlichen Gestaltveränderung unterwirft. Schon desshalb bedürfen die sphenoidischen Combinationen einer etwas ausführlicheren Betrachtung; aber auch die vielfachen Analogieen, welche diese Combinationen mit den rhomboëdrischen

Combinationen des Hexagonalsystems zeigen, dürften eine solche Betrachtung rechtfertigen.

Die Theorie dieser Combinationen beruht auf der Untersuchung der Verhältnisse, unter denen sich irgend zwei Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ combiniren können, von welchen das erstere als vorherrschende, das andere als untergeordnete Form vorausgesetzt wird. Dabei ist jedoch, wie bei allen hemiëdrischen Combinationen, die Ambiguität der Stellung zu berücksichtigen, indem sich beide Formen entweder in analoger, oder in antiloger Stellung befinden können. In beiden Fällen ist es die Lage der beiderlei Polkanten und Mittelkanten, durch welche die Combinations-Erscheinungen wesentlich bestimmt werden.

I. *Combinationen zweier Skalenoëder von gleicher oder analoger Stellung.*

Aus den Gleichungen derjenigen drei Kantenlinien, von welchen irgend zwei ähnlich liegende Flächen beider Skalenoëder begränzt werden, gelangt man sehr leicht auf folgende Resultate.

Es bildet an einem vorherrschenden Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ ein untergeordnetes Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$:

1. eine Zuschärfung der längeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$;
2. eine Zuschärfung der kürzeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$, und $n' > n$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, und $m' > m$, also auch $n' > n$;
4. eine vierflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$, und $\frac{m'(n'-1)}{n'} < \frac{m(n-1)}{n}$; sind dabei die heteropolaren Combinationskanten*) horizontal, so ist $n'=n$, sind sie aber parallel den Mittelkanten, so ist $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$;

*) Die Combinationskanten sind in den einaxigen Krystallsystemen als heteropolare und amphipolare zu unterscheiden, je nachdem die beiden Flächen, von denen sie gebildet werden, zu einer und derselben Hälfte der Hauptaxe, also zu einem und demselben Pole gehören, oder nicht. Vergl. Anfangsgr. S. 23.

5. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen paarweise auf die kürzeren Polkanten aufgesetzt, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} > \frac{m(n-1)}{n}$, und $n' > n$; sind dabei die heteropolaren Combinationskanten den längeren Polkanten parallel, so ist $\frac{n'(n'+1)}{n'} = \frac{n(n+1)}{n}$;

6. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen paarweise auf die längeren Polkanten aufgesetzt, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$ und $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$; dabei werden die heteropolaren Combinationskanten horizontal, wenn $n' = n$, oder auch parallel den kürzeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$.

II. *Combinationen zweier Skalenoëder von verwendeter oder antiloger Stellung.*

Indem wir abermals die Gleichungen der Kantenlinien zweier ähnlich liegender Flächen aufsuchen, erhalten wir die folgenden Resultate:

Es bildet an einem vorherrschenden Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ ein untergeordnetes Skalenoëder $-\frac{m'Pn'}{2}$:

1. eine Zuschärfung der kürzeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$;

2. eine vierflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n-1)}{n}$;

3. eine Zuschärfung der Mittelecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n-1)}{n}$; sind dabei die heteropolaren Combinationskanten den längeren Polkanten parallel, so ist $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$.

Andere Verhältnisse als diese drei können bei verwendeter Stellung beider Formen nicht vorkommen.

Anm. Aus diesen allgemeinen Regeln wird man sich leicht die besonderen Regeln ableiten können, welchen die Combinationen irgend zweier anderer Formen unterworfen sind.

Fünftes Capitel.

Zonenlehre des Tetragonalsystems.

§. 105. Bestimmung der Flächen aus den Zonen.

Als Beispiel für die zonale Bestimmung der Flächen und Formen wählen wir die in nachstehender Figur dargestellte 13zählige Combination des Vesuvians, für welche sich diejenige tetragonale Pyramide, deren Flächen mit c bezeichnet sind, vorzugsweise als Grundform P empfiehlt. Dann entsprechen die Flächen P dem Pinakoide 0P, die Flächen d dem Protoprisma ∞P, und die Flächen M dem Deuteroprisma ∞P∞. Ferner ergiebt sich sofort aus ihren Verhältnissen zur Grundform, dass

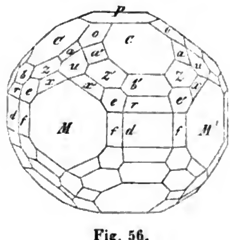


Fig. 56.

die Flächen b und r zwei verschiedenen Protopyramiden,

die Flächen o und u zwei verschiedenen Deuteropyramiden,

die Flächen a, z, x und e vier verschiedenen ditetragonalen Pyramiden, und

die Flächen f einem ditetragonalen Prisma

angehören. Nach §. 103 bestimmen sich aus ihren Verhältnissen zu der Grundform die Pyramide o als P∞, und die Pyramide u als 2P∞, wodurch denn zugleich die Pyramide b als 2P erkannt wird.

Die Flächen b, z, u, z', b', e', M' u. s. w. fallen in eine Zone, welche man die Polkantenzone der Pyramide 2P nennen kann, weil eine Polkante dieser Pyramide die Zonenlinie darstellt. Die Gleichungen dieser Polkante sind

$$y = 0 \text{ und } \frac{x}{2a} + z = 1$$

folglich wird die Zonengleichung

$$\frac{2a}{a} - \frac{1}{c} = 0, \text{ oder } \frac{2}{m} - \frac{1}{c} = 0$$

woraus sich denn für alle Flächen dieser Zone, und daher auch für die Flächen z' und e' die Bedingung $c = \frac{1}{2}m$ ergiebt.

Eben so fallen alle mit x und z bezeichnete Flächen in eine Zone, welche man die Polkantenzone der Grundform nennen kann, und zwar die vordersten, mit x' und z' bezeichneten Flächen in die Zone der oben, rechts gelegenen Polkante von P; daraus folgt für diese Flächen die Zonengleichung

$$\frac{a}{a} - \frac{1}{b} = 0, \text{ oder } \frac{1}{m} - \frac{1}{b} = 0$$

also $b = m$. Für die Fläche z' gilt also

$$b = m, \text{ und } c = \tfrac{1}{2}m.$$

Nun folgt aber unmittelbar aus der Lage dieser Fläche, dass für sie $c = 1$

und $b = n$ sein muss; folglich wird $m = n = 2$, und die Flächen z gehören daher der Pyramide 2P2.

Da z, e' und f horizontale Combinationskanten bilden, so müssen sie alle denselben Werth der Ableitungszahl n haben; also wird

$$f = \infty P2, \text{ und } e' = mP2$$

Es fand sich aber vorher für e' die Bedingung $c = \frac{1}{2}m$; da nun aus der Lage dieser Fläche für sie der Werth $b = 1$ folgt, so muss $c = n = 2$, und $m = 4$ sein, und die Flächen e gehören daher der Pyramide 4P2.

Da ferner e, x, x' und e in die Polkantenzone der Pyramide r fallen, so muss $r = 4P$, und, weil oben für x die Bedingung $b = m$ gefunden wurde, $x = 4P4$ sein.

Es ist jetzt nur noch die Bestimmung der Pyramide a übrig. Die Flächen u, a', c, fallen in eine Zone, von welcher u und c bekannt sind, oder deren Zonenlinie die in den Octanten der positiven Halbaxen fallende Polkante der Pyramide u ist; daraus folgt für die Fläche a' die eine Zonengleichung

$$\frac{2}{m} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

Dieselbe Fläche fällt aber auch in die Zone der beiden Flächen o und z'; substituirt man die diesen Flächen zukommenden Parameter in den Werthen von M, N und R der allgemeinen Zonengleichung S. 47, so erhält man für die Fläche a' die zweite Gleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

Die Lage dieser Fläche lehrt aber unmittelbar, dass für sie $c = 1$ ist; folglich bestimmt sich $b = n = 3$, und $m = \frac{3}{2}$; die mit a bezeichneten Flächen gehören also der Pyramide $\frac{3}{2}$P3, womit denn die Bestimmung aller in der Combination enthaltenen Formen vollzogen ist.

§. 106. Wichtigste Zonen des Tetragonalsystems; Zonen der Axen.

Im Tetragonalsysteme werden gewöhnlich folgende Zonen als die wichtigsten hervorgehoben:

a. die Hauptaxenzone,
b. die zwei Nebenaxenzonen,
c. die zwei Zwischenaxenzonen,
d. die vier Polkantenzonen der Grundform, und
e. die vier Diagonalzonen der Grundform.

a. Die Hauptaxenzone ist diejenige einzige Zone, deren Flächen der Hauptaxe parallel sind; sie begreift daher sämmtliche Prismen des Systems, also alle ∞Pn, nebst ∞P und $\infty P\infty$, während für sie übrigens dieselben Betrachtungen gelten, welche S. 122 für die verticale Kantenzone des Hexaëders mitgetheilt wurden. Man nennt sie auch die horizontale Zone

des Tetragonalsystems, weil sie um dasselbe in horizontaler Richtung zu verfolgen ist.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier Flächen F und F' dieser Zone bestimmt sich aus dem allgemeinen Ausdrucke (S. 55)

$$\text{tang} W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

gerade so wie in §. 74, mit dem Werthe

$$\text{tang} W = \frac{bc'-b'c}{bb'+cc'}$$

in welchem b und b' die in der Axe der y, c und c' die in der Axe der z liegenden Parameter bedeuten, welche Grössen daher in jedem besonderen Falle mit n, n', 1 oder ∞ zu vertauschen und übrigens noch mit den erforderlichen Vorzeichen zu versehen sind, weil in dem vorstehenden Werthe von tang$W$ vorausgesetzt ist, dass die beiden Flächen F und F' in den Octanten der positiven Halbaxen fallen.

b. Die Nebenaxenzonen sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer der Nebenaxen parallel liegen; sie sind daher zu zwei vorhanden, und begreifen alle diejenigen Flächen, für welche entweder der Parameter b, oder der Parameter c den Werth ∞ hat, folglich alle Deuteropyramiden mP∞, das Deuteroprisma ∞P∞ und das Pinakoid 0P. Man nennt sie auch die verticalen Zonen des zweiten Prismas, oder die Mittelkantenzonen der Deuteropyramiden.

Die Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen F und F' dieser Zonen findet sich aus dem allgemeinen Ausdrucke (S. 54)

$$\text{tang} W = \frac{\sqrt{M^2+N^2+R^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

indem man erwägt, dass, wenn b und $b' = \infty$ sind, dann c und $c' = 1$ sein müssen, und vice versa, so wie dass statt a und a' die Grössen ma und m'a gesetzt werden können; man erhält so

$$\text{tang} W = \frac{(m'-m)\text{a}}{mm'\text{a}^2+1}$$

welcher Ausdruck allgemein giltig ist, sobald man berücksichtigt, dass in seiner vorstehenden Form sowohl m als m' mit positiven Werthen vorausgesetzt sind, und daher nöthigenfalls deren Vorzeichen ändert.

c. Die Zwischenaxenzonen sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer der Zwischenaxen parallel liegen; sie sind also gleichfalls zu zwei vorhanden, und begreifen alle diejenigen Flächen, für welche die Parameter b und c einander gleich, oder beide $= 1$ sind, folglich alle Protopyramiden mP nebst dem Protoprisma ∞P und dem Pinakoide 0P. Sie werden auch die verticalen Zonen des ersten Prisma genannt und könnten auch die Mittelkantenzonen der Grundform heissen.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier Flächen dieser Zone findet sich aus dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ durch ähnliche Betrachtungen wie vorher; nämlich

$$\tang W = \frac{(m'-m)a\sqrt{2}}{2m'ma^2+1}$$

wobei wiederum in jedem besonderen Falle die Vorzeichen von m und m' zu berücksichtigen sind.

§. 107. Fortsetzung; Polkantenzonen der Grundform.

Die Polkantenzonen der Grundform sind diejenigen Zonen, deren Flächen den Polkanten der Grundform parallel liegen; sie sind daher zu vier vorhanden und begreifen mehre Arten von Formen, wie aus folgender Betrachtung erhellt. Wählen wir z. B. diejenige Polkante zur Zonenlinie, welche die positiven Halbaxen der x und z verbindet, so sind die auf den Mittelpunct reducirten Gleichungen der Zonenlinie:

$$y=0, \text{ und } \frac{x}{a}+z=0.$$

Vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen S. 47, so ergiebt sich, dass $\mu=-a,\ \nu=0, \text{ und } \varrho=1$

sein muss, woraus denn die Zonengleichung

$$\frac{a}{a}-\frac{1}{c}=0, \text{ oder } ac=a$$

folgt. Da nun mPn das allgemeinste Zeichen irgend einer Form ist, so wird auch der allgemeinste Werth von $a=ma$ sein, durch dessen Einführung sich die Zonengleichung auf $c=m$ reducirt. Es kann aber c entweder den Werth n, oder den Werth 1 haben, wobei b im ersteren Falle $=1$, im letzteren Falle $=n$ ist; folglich sind Pn und mPm die allgemeinen Zeichen derjenigen Formen, welche der Zone tributär werden, und zwar liegen die Flächen von Pn an derselben Nebenaxe wie die Zonenlinie, die Flächen von mPm an der anderen Nebenaxe. Da nun unter dem Zeichen Pn auch P und P∞, sowie unter dem Zeichen mPm auch P und ∞P∞ enthalten sind, so werden überhaupt

P, Pn, P∞, mPm und ∞P∞

diejenigen Formen sein, welche Flächen in eine Polkantenzone der Grundform liefern können.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen bestimmt sich etwas verschieden, je nachdem beide Flächen entweder unter der Zeichenform Pn oder mPm stehen, oder je nachdem die eine unter diesem, die andere unter jenem Zeichen enthalten ist. Aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

folgt nämlich zunächst, indem man $\mu=-a$, $\nu=0$ und $\varrho=1$ setzt, so wie für k den Werth $\frac{R}{\varrho}$ substituirt

$$\tang W = \frac{cc'(ab'-a'b)\sqrt{a^2+1}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

oder, weil $aa' = \mathrm{a}^2cc'$,

$$\text{tang} W = \frac{(ab' - a'b)\sqrt{\mathrm{a}^2+1}}{\mathrm{a}^2bb' + aa' + bb'}$$

welcher Ausdruck ganz allgemeingiltig ist.

Gehören nun beide Flächen zu zwei Formen Pn und Pn', so ist

$$a = \mathrm{a},\ b = n,$$
$$a' = \mathrm{a},\ b' = n',$$

und dann wird

$$\text{tang} W = \frac{\mathrm{a}(n' - n)\sqrt{\mathrm{a}^2+1}}{\mathrm{a}^2(nn'+1) + nn'}$$

Gehören dagegen beide Flächen zu zwei Formen mPm und m'Pm', so ist

$$a = m\mathrm{a},\ b = 1,$$
$$a' = m'\mathrm{a},\ b' = 1,$$

oder auch in vorstehendem Ausdrucke n mit $\frac{1}{m}$, und n' mit $\frac{1}{m'}$ zu vertauschen, und dann wird

$$\text{tang} W = \frac{\mathrm{a}(m - m')\sqrt{\mathrm{a}^2+1}}{\mathrm{a}^2(mm'+1) + 1}$$

Gehört endlich die eine Fläche zu einer Form Pn, die andere zu einer Form m'Pm', so ist

$$a = \mathrm{a},\ b = n,\ a' = m'\mathrm{a},\ b' = 1$$

oder auch in dem ersten Ausdrucke n' mit $\frac{1}{m'}$ zu vertauschen.

§. 108. Diagonalzonen der Grundform.

Die Diagonalzonen der Grundform sind diejenigen Zonen, deren Flächen den Höhenlinien oder Diagonalen der Flächen von P parallel liegen; da nun dieselben Linien den Polkanten der Pyramide 2P∞ parallel sind, so lassen sich diese Zonen auch die Polkantenzonen der Deuteropyramide 2P∞ nennen. Sie sind ebenfalls zu vier vorhanden, und begreifen wiederum mehre Arten von Formen. Wählen wir die im Octanten der positiven Halbaxen liegende Höhenlinie zur Zonenlinie, so werden die auf den Mittelpunct reducirten Gleichungen derselben

$$y - z = 0, \text{ und } \frac{x}{2\mathrm{a}} + y = 0$$

und vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47), so folgt, dass

$$\mu = -2\mathrm{a},\ \nu = 1,\ \varrho = 1,$$

woraus sich die Zonengleichung

$$\frac{2\mathrm{a}}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

ergiebt. Da nun eine jede Form unter dem allgemeinen Zeichen mPn enthalten ist, welchem das Parameter-Verhältniss $m\mathrm{a} : n : 1$ entspricht, so ist in

dieser Zonengleichung $a = m$a, sowie entweder $b = n$ und $c = 1$, oder $b = 1$ und $c = n$ zu setzen, wodurch sie in beiden Fällen

$$\frac{2}{m} - \frac{1}{n} - 1 = 0$$

wird. In dieser Gestalt bezieht sie sich nur auf solche Flächen, welche im Octanten der positiven Halbaxen liegen, und liefert also das Resultat, dass alle in diesen Octanten fallende Flächen der Zone unter der allgemeinen Zeichenform

$$mP\frac{m}{2-m}$$

stehen müssen, durch welche wir auf eine Formenreihe gewiesen sind, die mit P beginnt, und mit 2P∞ endigt.

Für alle in den beiden (oberen) Neben-Octanten liegende Flächen wird die Zonengleichung

$$\frac{2}{m} + \frac{1}{n} - 1 = 0$$

weshalb denn alle diese Flächen unter dem allgemeinen Zeichen

$$mP\frac{m}{m-2}$$

enthalten sind, und einer Formenreihe angehören, welche mit 2P∞ beginnt, und mit ∞P endigt. Ueberhaupt also sind

$$P,\ mP\frac{m}{2-m},\ 2P\infty,\ mP\frac{m}{m-2} \text{ und } \infty P$$

diejenigen Formen, welche in die Diagonalzone der Grundform Flächen zu liefern vermögen.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier Flächen dieser Zone findet sich aus dem allgemeinen Ausdrucke S. 55, indem man $\mu = 2$a, und $\nu = \varrho = -1$, sowie $k = \frac{N}{\nu}$ setzt, mit dem Werthe

$$\tang W = \frac{bb'(c'a - ca')\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{aa'bb' + cc'aa' + bb'cc'},$$

oder auch, weil $a = m$a und $a' = m'$a ist,

$$\tang W = \frac{bb'(c'm - cm')a\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{mm'(bb'+cc')a^2 + bb'cc'},$$

in welchen Ausdruck man für jeden besondern Fall die entsprechenden Werthe und Vorzeichen von b, c, b' und c' einzusetzen hat, um den Winkel W zu finden.

Anm. Man kann die vorerwähnten zugleich mit vielen anderen Zonen ganz allgemein erfassen, wenn man von den dreierlei Kantenzonen der ditetragonalen Pyramide mPn ausgeht; in ähnlicher Weise, wie oben in §. 78 die gewöhnlichen Zonen des Tesseralsystems als besondere Fälle der Kantenzonen des Hexakisoktaëders betrachtet worden sind. Uebrigens wird man sich leicht für jede vorkommende Zone aus zwei bekannten Flächen die Zonengleichung und die allgemeine Entwickelung sowie den Werth von tang$W$ abzuleiten vermögen.

Sechstes Capitel.

Zwillingskrystalle des Tetragonalsystems.

§. 109. Vorherrschendes Zwillingsgesetz.

Zu einer Transformation des Axensystems giebt das tetragonale Krystallsystem so wenig Veranlassung, dass wir auf die Betrachtung derselben um so eher verzichten können, als ja in den §§. 43 bis 45 hinreichende Anleitung zur Ausführung einer solchen Transformation gegeben worden ist, wenn selbige in gewissen Fällen ein Interesse gewähren sollte.

Dagegen nimmt die Betrachtung der gewöhnlichsten Zwillingsbildungen unsere Aufmerksamkeit in Anspruch. Zwar begegnen wir im Tetragonalsysteme verschiedenen Gesetzen der Zwillingsbildung, wie denn am Kupferkiese allein nicht weniger als drei bekannt sind; auch kommen bei einigen hemiëdrisch krystallisirenden Körpern Zwillingskrystalle mit parallelen Axensystemen vor, in welchen die hemiëdrischen Formen des einen Individuums die complementären Formen des anderen sind. Allein bei weitem die meisten Zwillinge tetragonaler Krystalle stehen unter einem einzigen Gesetze, von dem man füglich sagen kann, dass es in diesem Krystallsysteme eben so als das herrschende Gesetz der Zwillingsbildung zu betrachten sei, wie das in §. 82 erläuterte Gesetz als das herrschende Gesetz der tesseralen Zwillingskrystalle gelten muss. Dieses so häufig vorkommende Gesetz lässt sich dahin aussprechen, dass eine Fläche der Deuteropyramide P∞ als Zwillingsfläche auftritt; die so gewöhnlichen Zwillingskrystalle des Zinnerzes, Rutiles, Hausmannites u. a. Mineralien sind alle nach ihm gebildet.

Die in §. 47 zu Grunde gelegte allgemeine Gleichung der Zwillingsfläche

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

erhält in diesem Falle, wo $a=\mathrm{a}$, $b=1$ und $c=\infty$ ist, die sehr einfache Form

$$\frac{x}{\mathrm{a}}+y=1.$$

Setzt man ferner in denen S. 65 stehenden Gleichungen der drei Axen des Individuums II, wenn solche auf das Axensystem des Individuums I bezogen werden, die vorstehenden Werthe von a, b und c, so erhält man die Gleichungen

für die Axe der x', $\frac{x}{\mathrm{a}^2-1}+\frac{y}{2\mathrm{a}}=0$, und $z=0$,

für die Axe der y', $\frac{x}{2\mathrm{a}}-\frac{y}{\mathrm{a}^2-1}=0$, und $z=0$,

für die Axe der z', $x=0$, und $y=0$.

Für irgend eine Fläche F' des Individuums II, deren Parameter a', b' und c' sind, erhalten endlich die drei, in dem Axensysteme des Individuums I sich ergebenden Parameter a_1, b_1 und c_1 folgende allgemeine Werthe:

$$a_1 = \frac{a'b'(a^2+1)}{2aa' - (a^2-1)b'}$$

$$b_1 = \frac{a'b'(a^2+1)}{2ab' + (a^2-1)a'}$$

$$c_1 = -c'$$

Da aber eine jede Form unter dem allgemeinen Zeichen mPn begriffen ist, und demnach a' den Werth $\pm ma$ hat, so gelangen wir, unter Benutzung des negativen Werthes von a', auf folgende besondere Werthe; es wird

$$a_1 = \frac{ma(a^2+1)b'}{2ma^2 + (a^2-1)b'}$$

$$b_1 = \frac{m(a^2+1)b'}{m(a^2-1) - 2b'}$$

$$c_1 = -c'$$

welche Ausdrücke für sämmtliche acht Flächen der einen Hälfte des zweiten Individuums gelten, und zwar für diejenige Hälfte der Form mPn, welche, bei Juxtaposition beider Individuen in der Zwillingsfläche, an der oberen (positiven) Hälfte des ersten Individuums anliegt.

§. 110. Parallelflächen von mPn.

Bei der Transposition irgend einer Form mPn des Individuums II auf das Axensystem des Individuums I wird es zweckmässig sein, das Bild eines Zwillingskrystalls zu Hilfe zu nehmen, in welchem beide Individuen ausserhalb einander liegen und nur durch Juxtaposition verbunden sind. Wir wählen dazu die nachstehende Figur eines Zwillingskrystalls des Zinnerzes, dessen Individuen die Combination P.3P$\frac{3}{2}$ darstellen, lassen aber die achtseitige Pyramide unbestimmt als irgend ein mPn gelten. Beide Individuen berühren sich in einer Polkante von P, haben also diejenige Stellung, welche das betrachtete Zwillingsgesetz erfordert. Die acht dem Individuo I zugekehrten Flächen des Individuums II, welche der Pyramide mPn angehören, gruppiren sich aber in vier Flächenpaare, deren Flächen eine symmetrische Lage zu dem Axensysteme I haben.

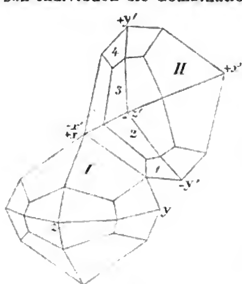


Fig. 57.

Das erste Flächenpaar, dessen vordere Fläche mit 1 bezeichnet ist, liegt unmittelbar an der negativen Halbaxe der y'; das zweite Flächenpaar, dessen vordere Fläche mit 2 bezeichnet ist, wird von den Nebenflächen des ersten Paares gebildet; das dritte Flächenpaar, dessen vordere Fläche mit 3 bezeichnet ist, besteht aus den nächstfolgenden beiden Flächen, und das vierte Flächenpaar, dessen vordere Fläche mit 4 bezeichnet ist, liegt unmittelbar an der positiven Halbaxe der y'. Jedem von diesen vier Flächenpaaren

entspricht in der anderen Hälfte der Pyramide ein Gegenflächenpaar, und jedes Flächenpaar bildet mit seinem Gegenpaare gewissermaassen eine Partialform, so dass die ganze Pyramide mPn in die vier Partialformen 1, 2, 3 und 4 zerfällt.

Wir haben nun noch zu untersuchen, welche krystallographische Zeichen diesen vier Partialformen in dem Axensysteme des Individuums I zukommen, brauchen jedoch dabei nur auf die mit Ziffern bezeichneten Flächen Rücksicht zu nehmen, weil sich Fläche und Gegenfläche lediglich durch die entgegengesetzten Vorzeichen ihrer Parameter unterscheiden. Unter Benutzung der zu Ende des vorhergehenden Paragraphen gefundenen allgemeinen Werthe der Parameter a_1, b_1 und c_1 gelangen wir so auf folgende Resultate.

1. Erste Partialform; für ihre mit 1 bezeichnete Fläche ist $b' = -1$, und $c' = -n$, folglich wird

$$a_1 = -\frac{m\mathrm{a}(\mathrm{a}^2+1)}{(2m-1)\mathrm{a}^2+1}$$

$$b_1 = -\frac{m(\mathrm{a}^2+1)}{m(\mathrm{a}^2-1)+2}$$

$$c_1 = \quad n$$

Da nun der kleinere von den beiden Parametern b_1 und c_1 mit dem Werthe 1 zu nehmen ist, und da sich nicht allgemein bestimmen lässt, welcher derselben den kleineren Werth hat, so sind beide Fälle besonders in Erwägung zu ziehen.

Ist $b_1 > c_1$, so sind alle drei Parameter mit dem Werthe von c_1 zu dividiren, wodurch c_1 selbst $= 1$ wird, und für die erste Partialform des einen Individuums zwei Flächenpaare der ditetragonalen Pyramide

$$\frac{m(\mathrm{a}^2+1)}{[(2m-1)\mathrm{a}^2+1]n}\mathrm{P}\frac{m(\mathrm{a}^2+1)}{[m(\mathrm{a}^2-1)+2]n}$$

als aequivalente Flächenpaare bestimmt werden.

Ist dagegen $b_1 < c_1$, so sind alle drei Parameter mit dem Werthe von b_1 zu dividiren, wodurch $b_1 = 1$ wird, und sich für die erste Partialform zwei Flächenpaare der Pyramide

$$\frac{m(\mathrm{a}^2-1)+2}{(2m-1)\mathrm{a}^2+1}\mathrm{P}\frac{[m(\mathrm{a}^2-1)+2]n}{m(\mathrm{a}^2+1)}$$

als aequivalente Flächenpaare ergeben.

2. Zweite Partialform; für ihre mit 2 bezeichnete Fläche ist $b' = -n$, und $c' = -1$, folglich wird

$$a_1 = -\frac{m\mathrm{a}(\mathrm{a}^2+1)n}{2m\mathrm{a}^2-n(\mathrm{a}^2-1)}$$

$$b_1 = -\frac{m(\mathrm{a}^2+1)n}{m(\mathrm{a}^2-1)+2n}$$

$$c_1 = 1$$

Wenn also $b_1 > c_1$ ist, so sind diess unmittelbar die gesuchten Parameter, und die aequivalenten Flächen der zweiten Partialform gehören der Pyramide

$$\frac{m(a^2+1)n}{2ma^2-n(a^2-1)} P \frac{m(a^2+1)n}{m(a^2-1)+2n}$$

an. Wenn aber $b_1 < c_1$ ist, dann sind alle drei Parameter mit dem Werthe von b_1 zu dividiren, wodurch $b_1 = 1$ wird, und die aequivalenten Flächen sich als zwei Flächenpaare der Pyramide

$$\frac{m(a^2-1)+2n}{2ma^2-n(a^2-1)} P \frac{m(a^2-1)+2n}{m(a^2+1)n}$$

bestimmen. Für $b_1 = c_1$ wird die gesuchte Form eine Protopyramide.

3. Dritte Partialform; für ihre mit 3 bezeichnete Fläche gilt $b' = n$, und $c' = -1$, folglich braucht man nur in den für die zweite Partialform gefundenen Resultaten n negativ einzuführen, um die Formen zu bestimmen, denen die Flächen dieser dritten Partialform entsprechen.

Ist also $b_1 > c_1$, so gehören die transponirten Flächen der Pyramide

$$\frac{m(a^2+1)n}{2ma^2+n(a^2-1)} P \frac{m(a^2+1)n}{m(a^2-1)-2n}$$

an; ist dagegen $b_1 < c_1$, so hat die gesuchte Form das Zeichen

$$\frac{m(a^2-1)-2n}{2ma^2+n(a^2-1)} P \frac{m(a^2-1)-2n}{m(a^2+1)n}$$

Für $b_1 = c_1$, muss $m(a^2+1)n = m(a^2-1)-2n$ sein, und die gesuchte Pyramide eine Protopyramide werden.

4. Vierte Partialform; für ihre mit 4 bezeichnete Fläche ist $b' = 1$, und $c' = -n$, folglich wird

$$a_1 = \frac{ma(a^2+1)}{(2m+1)a^2-1}$$

$$b_1 = \frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}$$

$$c_1 = n$$

was für $b_1 > c_1$ eine Division aller drei Parameter mit dem Werthe von c_1, dagegen für $b_1 < c_1$ eine Division derselben mit dem Werthe von b_1 erfordert, und für die aequivalenten Flächen im ersteren Falle auf das Zeichen

$$\frac{m(a^2+1)}{[(2m+1)a^2-1]n} P \frac{m(a^2+1)}{[m(a^2-1)-2]n}$$

im zweiten Falle aber auf das Zeichen

$$\frac{m(a^2-1)-2}{(2m+1)a^2-1} P \frac{n[m(a^2-1)-2]}{m(a^2+1)}$$

gelangen lässt.

§. 111. Parallelflächen der Pyramiden mP und mP∞.

Setzen wir in den Resultaten des vorhergehenden Paragraphen $n = 1$, so erhalten wir für die Flächen einer Protopyramide mP des einen Individuums ihre krystallographischen Zeichen in dem anderen Individuo. Dabei ist einleuchtend, dass sich die erste und zweite, eben so wie die dritte und vierte Partialform von mPn je auf eine Form reduciren, daher auch für jedes mP nur zwei verschiedene Formen im andern Individuo gefunden werden.

Für die eine Partialform von mP wird nämlich

$$b_1 = \frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)+2}, \text{ und } c_1 = 1;$$

ist also $b_1 > c_1$, so werden ihre Parallelflächen der Form

$$\frac{m(a^2+1)}{(2m-1)a^2+1} P \frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)+2}$$

angehören; ist dagegen $b_1 < c_1$, so bestimmt sich für dieselben Flächen das Zeichen

$$\frac{m(a^2-1)+2}{(2m-1)a^2+1} P \frac{m(a^2-1)+2}{m(a^2+1)}$$

Für die andere Partialform dagegen wird

$$b_1 = \frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}, \text{ und } c_1 = 1;$$

ist also $b_1 > c_1$, so werden ihre Parallelflächen der Pyramide

$$\frac{m(a^2+1)}{(2m+1)a^2-1} P \frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}$$

angehören, während solche für $b_1 < c_1$ auf die Form

$$\frac{m(a^2-1)-2}{(2m+1)a^2-1} P \frac{m(a^2-1)-2}{m(a^2+1)}$$

zu beziehen sind.

Setzen wir in den Resultaten des §. 110 für n den Werth ∞, so gelangen wir auf die Transposition der Flächen der Deuteropyramide mP∞; dabei ist es klar, dass die der ersten und vierten Partialform von mPn entsprechenden Flächen zwei verschiedene Formen erfordern, während die der zweiten und dritten Portialform entsprechenden Flächen einer einzigen Form angehören werden, weshalb denn die Pyramide mP∞ nur noch in drei Partialformen zerfällt. Für die erste Partialform ist c_1 stets $> b_1$; folglich entsprechen ihre beiden Flächen zweien Flächen der Deuteropyramide

$$\frac{m(a^2-1)+2}{(2m-1)a^2+1} P\infty.$$

Für die zweite Partialform, welche die vier der Axe der y' parallelen Flächen begreift, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $m(a^2+1) >$ oder < 2 ist; im ersten Falle gehören ihre aequivalenten Flächen der Pyramide

$$\frac{m(a^2+1)}{a^2-1} P \frac{m(a^2+1)}{2},$$

im zweiten Falle dagegen der Pyramide

$$\frac{2}{a^2-1} P \frac{2}{m(a^2+1)}.$$

Für die dritte Partialform endlich ist wiederum c_1 stets $> b_1$, weshalb ihre beiden Flächen zweien Flächen der Pyramide

$$\frac{m(a^2-1)-2}{(2m+1)a^2-1} P\infty$$

des ersten Individuums entsprechen.

§. 112. Parallelflächen der Prismen und des Pinakoides.

Setzen wir in den Resultaten des §. 110 $m=\infty$, so erhalten wir die Parallelflächen der ditetragonalen Prismen ∞Pn, für welche, wie man leicht begreift, einerseits die erste und vierte, anderseits die zweite und dritte Partialform von mPn zu je einer Form zusammenfallen, weshalb denn auch jedes achtseitige Prisma des einen Individuums nur noch durch die Flächen zweier Formen in dem anderen Individuo repräsentirt wird.

Für die eine dieser Formen, welche den Partialformen 1 und 4 entspricht, gilt ganz allgemein

$$b_1 = \frac{a^2+1}{a^2-1}, \text{ und } c_1 = n;$$

ist nun $b_1 > c_1$, so gehören die Parallelflächen dieser Form der Pyramide

$$\frac{a^2+1}{2na^2} P \frac{a^2+1}{n(a^2-1)};$$

ist aber $b_1 < c_1$, so gehören sie der Pyramide

$$\frac{a^2-1}{2a^2} P \frac{n(a^2-1)}{a^2+1}.$$

Für die zweite Form, welche den Partialformen 2 und 3 entspricht, gilt allgemein

$$b_1 = \frac{(a^2+1)n}{a^2-1}, \text{ und } c_1 = 1$$

folglich ist b_1 stets $> c_1$, weshalb denn die Parallelflächen dieser Form in allen Fällen der Pyramide

$$\frac{(a^2+1)n}{2a^2} P \frac{(a^2+1)n}{a^2-1}$$

angehören.

Nimmt man in den so eben gefundenen Resultaten $n=1$, so ergiebt sich, dass den Flächen des Protoprisma ∞P vier Flächen der Pyramide

$$\frac{a^2+1}{2a^2} P \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

entsprechen; nimmt man dagegen $n=\infty$, so folgt, dass das Deuteroprisma $\infty P\infty$ in dem Individuo I durch zwei Flächen von $\infty P\infty$, und durch zwei Flächen der Deuteropyramide

$$\frac{a^2-1}{2a^2} P\infty$$

dargestellt wird.

Setzt man endlich in den Resultaten des §. 111 $m=0$, so bestimmt sich als die Parallelfläche des Pinakoides in dem anderen Individuo eine Fläche der Deuteropyramide

$$\frac{2}{1-a^2} P\infty.$$

In allen diesen Ergebnissen erkennen wir also eine Bestätigung des allgemeinen Satzes, dass in den Zwillingskrystallen die Flächen des *einen* Individuums lauter krystallographisch-*möglichen* Flächen des *zweiten* Individuums entsprechen, sobald a^2 eine rationale Zahl ist.

Dritter Abschnitt.

Hexagonales System.

Erstes Capitel.

Axensystem und vorbereitende Rechnungen.

§. 113. Axensystem und Elemente desselben.

Das Hexagonalsystem zeigt so viele und so denkwürdige Analogieen mit dem vorhergehenden Systeme, dass es zweckmässig erscheint, seine Betrachtung unmittelbar auf jene des Tetragonalsystems folgen zu lassen. In der That geben beide Krystallsysteme nicht nur in Betreff ihrer holoëdrischen Formen, sondern auch in Betreff der Ableitung, der verschiedenen Arten der Hemiëdrie und Tetartoëdrie, der Combinationen und mancher anderer Verhältnisse eine so auffallende allgemeine Aehnlichkeit zu erkennen, dass sich in der Darstellung aller dieser Verhältnisse Vieles wiederholt, und dass es oft nur die Zahlen der Flächen, Kanten und Ecke sind, in welchen sich eine Verschiedenheit kund giebt. Denn während wir im Tetragonalsystem überall den Zahlen 4, 8 und 16 begegnen, so sind es im Hexagonalsysteme die Zahlen 6, 12 und 24, welche durch die Eigenthümlichkeit seines geometrischen Grundcharakters als die herrschenden Zahlen bedingt werden.

Das hexagonale Krystallsystem unterscheidet sich nämlich dadurch von allen übrigen Krystallsystemen, dass seine Formen, wenn ihren Symmetrie-Verhältnissen Rechnung getragen werden soll, auf ein *vierzähliges* Axensystem bezogen werden müssen, und sich folglich als *tetrametrische* Formen allen anderen Formen gegenüberstellen. *Drei* Axen liegen in einer Ebene, schneiden sich gegenseitig unter 60°, und sind vollkommen gleichwerthig, wogegen die *vierte* Axe auf jenen rechtwinkelig ist, und sich sowohl durch diese verschiedene Lage, als auch durch ihre verschiedene Grösse sehr auffallend von den anderen drei Axen unterscheidet. Diese einzelne Axe ist es nun, welche die Symmetrie-Verhältnisse der Formen vorzugsweise beherrscht, und überhaupt eine so eminente Rolle spielt, dass sie nothwendig

als Hauptaxe gelten muss, während die anderen drei Axen nur als Nebenaxen zu betrachten sind.

Wir wählen auch hier, wie in allen einaxigen Systemen, die Hauptaxe als Axe der x, bezeichnen die Nebenaxen als Axen der y, z und u, und nennen die durch die letzteren gehende Coordinat-Ebene die Basis, die drei verticalen Coordinat Ebenen die primären Hauptschnitte des Systems. Ausser den drei Nebenaxen sind aber noch drei Zwischenaxen zu berücksichtigen, welche in der Ebene der Basis mitten zwischen den Nebenaxen hinlaufen. Diejenigen drei Ebenen, welche durch die Hauptaxe und je eine der Zwischenaxen gehen, wollen wir die secundären Hauptschnitte des Systems, und endlich jeden Schnitt, welcher durch irgend eine Form rechtwinkelig auf die Hauptaxe gedacht werden kann, einen Querschnitt nennen.

Anm. 1. Da die Querschnitte aller holoëdrischen Formen des Systems reguläre Hexagone, oder doch solche Figuren sind, in und um welche sich dergleichen Hexagone beschreiben lassen, so gab ihm *Breithaupt* den Namen Hexagonalsystem, den wir adoptirt haben, weil er eine sehr charakteristische Eigenschaft ausdrückt, und auch ausserdem manche Bequemlichkeit darbietet.

Anm. 2. Vom mathematischen Standpuncte aus lässt sich das Hexagonalsystem auch auf ein dreizähliges Axensystem beziehen, wie diess schon im Jahre 1818 von *Lamé* (Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géometrie, p. 97), und im Jahre 1825 von *Whewell* (Phil. Trans. 1825, I, p. 89) angenommen, auch im Jahre 1829 von *Grassmann* vorgeschlagen, und im Jahre 1839 von *Miller*, in seinem trefflichen Treatise on Crystallography durchgeführt worden ist*). Das Axensystem besteht dann aus drei, gegen einander unter gleichen schiefen Winkeln geneigten und durchaus gleichwerthigen Axen. Obgleich nun diese Ansicht für die Rechnung manche Bequemlichkeit darbietet, so können wir uns derselben doch nicht anschliessen, weil sie die Hauptaxe gänzlich vernachlässigt, weil sie der sechsgliederigen Symmetrie der holoëdrischen Formen nicht adäquat ist, und weil bei ihrer Anwendung die Analogieen zwischen dem Hexagonalsysteme und Tetragonalsysteme mehr oder weniger verloren gehen. Will man aber nur ein rhomboëdrisches System anerkennen, und demgemäss die hexagonalen Pyramiden als Dirhomboëder darstellen, so ignorirt man gänzlich das eigentliche holoëdrische Fundament des Krystallsystems, was uns eben so wenig naturgemäss erscheint, wie die Einführung des holoëdrischen und des rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formencomplexes als zweier selbständiger und coordinirter Krystallsysteme, mag man nun solche hexagonales und rhomboëdrisches System, oder système sénaire und ternaire nennen; denn das sogenannte rhomboëdrische System ist nur eine von den verschiedenen hemiëdrischen Ausbildungsweisen des hexagonalen Systems.

*) *Peltko* hat später gleichfalls dieselbe Betrachtungsweise in Vorschlag gebracht, und *Gustav Schmidt* die ihr entsprechenden analytisch-geometrischen Rechnungen mitgetheilt. *Haidinger's* naturwissensch. Abhandl. B. IV, 1851.

§. 114. Reduction auf ein trimetrisches Axensystem.

Der so eigenthümliche Charakter des Hexagonalsystems, kraft dessen seine sämmtlichen Formen um eine, die Symmetrie beherrschende Hauptaxe sechsgliederig, oder auch drei- und- dreigliederig ausgebildet sind, macht die Annahme eines tetrametrischen Axensystems durchaus nothwendig, sobald es sich um eine naturgemässe Auffassung und Darstellung der einzelnen Formen und des zwischen ihnen bestehenden geometrischen Zusammenhanges handelt. Die Lehren von den einfachen Formen, von der Ableitung und Bezeichnung müssen daher jedenfalls auf das in §. 113 dargestellte Axensystem gegründet werden, weil für sie kein Grund vorhanden ist, die zumal in den holoëdrischen Formen so augenscheinlich hervortretenden hexagonalen Symmetrie-Verhältnisse zu vernachlässigen, und irgend ein anderes, in der Erscheinungsweise der Formen nicht so unmittelbar indicirtes Axensystem einzuführen.

In der Lehre von der Berechnung der Formen verhält es sich dagegen anders. Zwar werden ihre Resultate so dargestellt werden müssen, dass sie mit der Ableitung und Bezeichnung der Formen im Einklange sind, und folglich ein tetrametrisches Axensystem voraussetzen; allein die Rechnungen selbst können, bei Anwendung der analytisch-geometrischen Methode, mit dieser Voraussetzung nicht füglich bestehen, weil die vierte Axe ein für den Calcül unbrauchbares und lästiges Element ist, vor dessen Elimination an die Anwendung jener Methode nicht wohl gedacht werden kann. Für den krystallographischen Calcül kommt es also darauf an, die Axe der u zu eliminiren, und somit das durch die Erscheinungsweise der Formen nothwendig gebotene, und bei der Beschreibung und Ableitung derselben nicht zu umgehende tetrametrische Axensystem auf ein trimetrisches zu reduciren, in welchem sich die Axen der y und z unter 60^0 schneiden, während die Axe der x auf ihnen rechtwinkelig ist.

Da sich nun aber die krystallographische Ableitung und Bezeichnung auf das tetrametrische Axensystem beziehen, und da sich die Gleichungen der verschiedenen Flächen einer jeden Form unmittelbar aus ihrem krystallographischen Zeichen ablesen lassen müssen, so werden wir allerdings zunächst auch oft auf solche Gleichungen gelangen, welche von der Axe der u abhängig sind. Wir wollen daher diese, unmittelbar aus den krystallographischen Zeichen folgenden Gleichungen von Flächen, Linien und Puncten, weil sie uns die Lage dieser Elemente in Bezug auf das anschaulich gegebene Axensystem darstellen, die repräsentativen Gleichungen, dagegen die für den Calcül eingerichteten Gleichungen die calculativen Gleichungen nennen.

Unter den repräsentativen Gleichungen werden nämlich oft solche vorkommen, welche nicht unmittelbar als calculativ gelten können, weil sie mit der Coordinate u behaftet sind. In allen solchen Fällen ist nun die Coordinate u zu eliminiren, und statt ihrer die in der Gleichung nicht vorhandene Coordinate y oder z zu substituiren. Da nun die Hauptaxe hierbei gänzlich ausser

dem Spiele bleibt, so können wir die Regeln für diese Elimination und Substitution in der Ebene der Basis aufsuchen.

Es sei uns z. B. in dem von den positiven Halbaxen der z und u eingeschlossenen Sextanten irgend ein Punct P durch seine repräsentativen Coordinaten

$$PQ = z, \text{ und } PR = u$$

gegeben, so handelt es sich darum, die Lage desselben Punctes durch zwei andere Coordinaten

$$PQ' = z', \text{ und } PR' = y'$$

zu bestimmen, welche sich auf die Axen der y und z beziehen. Da nun PRR' und MQQ' zwei gleichseitige und gleiche Dreiecke sind, so wird offenbar

$$PR' \text{ oder } y' = -u,$$

$$PQ' = PQ + QQ', \text{ oder } z' = z + u = z - y',$$

Fig. 58.

woraus sich denn für u und z die Werthe ergeben:

$$u = -y', \text{ und } z = z' + y'.$$

Ist uns also eine repräsentative Gleichung gegeben, in welcher die Coordinaten z und u auftreten, so haben wir in selbiger statt u die Grösse $-y$, und statt z die Grösse $z + y$ zu substituiren, um sie calculativ zu machen.

Eben so wird folgendes Verfahren zu beobachten sein, wenn uns ein Punct P im Sextanten der $+y$ und $-u$ gegeben ist. Seine repräsentativen Gleichungen seien;

$$PS = y, \text{ und } PT = -u;$$

dann soll dieser Punct durch die beiden Coordinaten $PS' = y'$, und $PT' = z'$ bestimmt werden; es ist aber

$$PT' \text{ oder } z' = u,$$

$$PS' = PS + SS', \text{ oder } y' = y - z',$$

woraus sich denn für u und y die Werthe ergeben:

$$u = z', \text{ und } y = y' + z'$$

Ist uns also eine repräsentative Gleichung gegeben, in welcher die Coordinaten y und u auftreten, so haben wir in selbiger für u die Grösse z, und für y die Grösse $y + z$ zu substituiren, um sie calculativ zu machen.

Dass natürlich bei der Anwendung dieser beiden Regeln auf die Vorzeichen sorgfältig Rücksicht zu nehmen ist, um sie auch für die beiden Sextanten der $-u$ und $-z$, der $+u$ und $-y$ benutzen zu können, diess bedarf kaum der Erinnerung.

§. 115. Allgemeine Formeln für die Berechnung der hexagonalen Formen.

Nach Elimination der Axe der u ist das noch übrig bleibende Axensystem ein solches, dessen Verhältnisse mit denen des monoklinoëdrischen Systems übereinstimmen; denn es besteht aus den beiden Axen der y und z, welche sich unter dem Winkel von 60° schneiden, und aus der Axe der x, welche auf jenen beiden rechtwinkelig ist. Ein Unterschied macht sich nur darin gel-

tend, dass im monoklinoëdrischen Systeme eine der beiden schiefwinkeligen Axen zur Hauptaxe zu wählen ist, während im hexagonalen Systeme die Axe der x die Hauptaxe sein und bleiben muss. Da jedoch die Rechnungen im Gebiete eines monoklinoëdrischen Axensystems ganz unabhängig davon sind, ob diese oder jene Axe die Rolle der Hauptaxe spielt, so können wir für das trimetrisch gemachte hexagonale Axensystem die in den betreffenden Paragraphen der Propädeutik für das triklinoëdrische System gefundenen Formeln unmittelbar benutzen, indem wir in selbigen

$$A=60^0,\ B=90^0,\ C=90^0,$$
$$\alpha=60^0,\ \beta=90^0,\ \gamma=90^0$$

setzen.

Für irgend einen, durch seine Coordinaten x, y und z gegebenen Punct P wird also, zufolge der S. 35 stehenden Formel, die Centrodistanz

$$D=\sqrt{x^2+y^2+z^2+yz}$$

und für irgend zwei, durch ihre Coordinaten x, y und z, x', y' und z' gegebene Puncte P und P' wird, nach der S. 36 stehenden Formel, ihr Intervall oder ihr Abstand

$$J=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(y-y')(z-z')}$$

Der Cosinus des Neigungswinkels W irgend zweier Flächen F und F', deren Gleichungen

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

sind, bestimmt sich aber nach dem S. 44 stehenden allgemeinen Ausdrucke

$$\cos W=-\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\mathfrak{K}\mathfrak{K}'}}$$

wie folgt. Zuvörderst wird

$$A'=\tfrac{1}{2},\ B'=0,\ C'=0,$$

woraus sich denn ergiebt, dass

$$\mathfrak{H}=\tfrac{1}{4}[3bb'cc'+4cc'aa'+4aa'bb'-2aa'(bc'+b'c)]$$
$$\mathfrak{K}=\tfrac{1}{4}[3b^2c^2+4a^2(b^2-bc+c^2)]$$
$$\mathfrak{K}'=\tfrac{1}{4}[3b'^2c'^2+4a'^2(b'^2-b'c'+c'^2)]$$

Bringen wir diese Werthe von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in den Ausdruck von $\cos W$, so erhalten wir endlich

$$\cos W=-\frac{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}{\sqrt{4a^2(b^2-bc+c^2)+3b^2c^2}\sqrt{4a'^2(b'^2-b'c'+c'^2)+3b'^2c'^2}}$$

Diese Werthe von D, J und $\cos W$ sind es, deren wir uns zunächst bei der Berechnung der verschiedenen Formen des Hexagonalsystems zu bedienen haben werden, wobei nur noch zu bemerken ist, dass die Vorzeichen der Parameter in jedem besondern Falle sorgfältig berücksichtigt werden müssen.

Zweites Capitel.

Holoëdrische Formen des Hexagonalsystems.

§. 116. Verschiedene Parameter-Verhältnisse.

Man könnte glauben, dass im Hexagonalsysteme, als einem tetrametrischen Systeme, eigenthümliche und wesentlich andere Parameter-Verhältnisse vorkommen dürften, als in dem Tetragonalsysteme. Diess ist jedoch keinesweges der Fall; denn wenn auch eine jede Fläche auf alle vier Axen bezogen werden kann, so ist solches doch nicht nothwendig, weil die Lage einer Ebene schon durch drei Puncte vollkommen bestimmt wird. Wir werden daher, eben so wie in den übrigen Krystallsystemen, jede Fläche nur auf drei Axen, nämlich auf die Hauptaxe und auf zwei der Nebenaxen beziehen, und uns solche durch drei Parameter gegeben denken. Der vierte, in der dritten Nebenaxe liegende Parameter wird durch die beiden in den anderen Nebenaxen liegenden Parameter so nothwendig bestimmt, dass es überflüssig sein würde, ihn unter denen die Fläche bestimmenden Elementen mit aufzunehmen, wie er denn auch bei der analytisch-geometrischen Darstellung der Fläche zu vernachlässigen ist.

Auch im Hexagonalsysteme kann, wegen der Ungleichwerthigkeit der Hauptaxe, das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit aller Parameter in der Regel nicht erwartet werden, das Verhältniss der Gleichheit zweier gegen einen ungleichen Parameter aber nur in der Weise vorkommen, dass die zwei gleichen Parameter in den beiden Nebenaxen liegen, während die Hauptaxe den ungleichen Parameter enthält. Dabei erscheint es wiederum zweckmässig, dieses Verhältniss der Gleichheit zweier Parameter immer auf die Form $1:1$ zurückzuführen, für den in die Hauptaxe fallenden Parameter aber sehr verschiedene Werthe zuzulassen.

Das einfachste endliche Parameter-Verhältniss ist daher abermals das von $a:1:1$, wobei a den in der Hauptaxe liegenden Grundparameter bedeutet, welcher wohl in der Regel einen irrationalen Werth hat*).

Ausser dem Grundverhältnisse $a:1:1$ kann aber das Verhältniss zweier gleicher Parameter gegen einen ungleichen noch mit sehr verschiedenen endlichen Werthen der Hauptaxe, oder allgemein in der Form $ma:1:1$, so wie auch in den beiden Gränzformen $\infty a:1:1$ und $0a:1:1$ vorkommen; und diese drei Parameter-Verhältnisse sind es, welche wesentlich drei ver-

*) Indessen scheint in der Grundform des Berylls der Werth $\frac{1}{2}$ vorzukommen, welcher die einzige Ausnahme von der sonst allgemein giltigen Regel bedingen würde, dass sich die Hauptaxe auch stets durch ihre Grösse von den Nebenaxen unterscheidet. Es bedarf nur der Annahme, dass die Temperatur des Bildungsactes eine etwas andere gewesen sei, als die gewöhnliche Temperatur, bei der die Messungen angestellt werden, um selbst den genauesten Messungen gegenüber die Folgerung zu rechtfertigen, dass die Pyramide 2P des Berylls drei gleiche Parameter habe.

schiedene Arten von Krystallformen bedingen, denen insgesammt das Verhältniss zweier gleicher gegen einen ungleichen Parameter zu Grunde liegt.

Das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit der Parameter lässt sich in seiner endlichen Form allgemein durch

$$ma : n : 1$$

darstellen, bedingt eine vierte Art von Krystallformen, ist jedoch, kraft des geometrischen Grundcharakters des Hexagonalsystems, der Bedingung unterworfen, dass n stets < 2 sein muss. Dasselbe Verhältniss ist aber auch dreier Gränzformen fähig, von welchen die eine, wie im Tetragonalsysteme, durch

$$\infty a : n : 1,$$

die beiden anderen dagegen, zufolge jenes geometrischen Grundcharakters, durch

$$ma : 2 : 1$$

und $\infty a : 2 : 1$

dargestellt werden können. Da nun auch ein jedes dieser Verhältnisse eine besondere Art von Krystallformen bedingt, so gelangen wir wiederum auf das Resultat, dass es sieben verschiedene Parameter-Verhältnisse und eben so viele verschiedene Arten von holoëdrischen Formen giebt.

Anm. Da das Verhältniss $ma : n : 1$ alle anderen Verhältnisse in sich begreift, indem man nur für m und n gewisse Werthe einzuführen braucht, um von ihm auf diese anderen Verhältnisse zu gelangen, so stellt es sich als das allgemeinste Parameter-Verhältniss, und gewissermaassen als den Repräsentanten aller übrigen Verhältnisse dar. Eine ganz ähnliche Folgerung lässt sich auch für die durch dieses Verhältniss bestimmte Art von Formen geltend machen.

§. 117. Holoëdrische Formen des Hexagonalsystems.

Es sind nun folgende sieben Arten von holoëdrischen Formen, welche durch die im vorhergehenden Paragraphen nachgewiesenen Parameter-Verhältnisse bestimmt werden.

1. Die hexagonalen Pyramiden der ersten Art, oder die Protopyramiden; sie sind von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren Polkanten in die primären Hauptschnitte, und deren Mittelecke in die Nebenaxen fallen. Diese Pyramiden haben das Parameter-Verhältniss $ma : 1 : 1$, und können daher, nach Maassgabe der verschiedenen Werthe von a und m, in sehr verschiedenen Varietäten vorkommen, welche allgemein als spitze und als stumpfe Pyramiden unterschieden werden, je nachdem $ma >$ oder < 1, oder je nachdem der Winkel, den zwei Polkanten desselben Mitteleckes bilden $>$ oder $< 90^0$ ist.

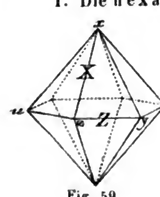
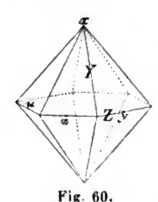


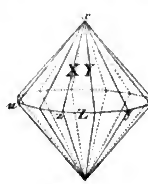
Fig. 59.

2. Die hexagonalen Pyramiden der zweiten Art, oder die Deuteropyramiden; auch sie sind von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, und daher in ihrer Gestalt ganz ähnlich den Protopy-


Fig. 60.

ramiden, unterscheiden sich aber von diesen wesentlich durch ihre Flächenstellung, welcher zufolge ihre Polkanten in die secundären Hauptschnitte, und ihre Mittelecke in die Zwischenaxen fallen. Sie erfordern das Parameter-Verhältniss $ma : 2 : 1$, und können daher gleichfalls in zahllosen Varietäten vorkommen, welche als spitze und als stumpfe Deuteropyramiden unterschieden werden, je nachdem $ma >$ oder < 1, oder je nachdem ihre Mittelkante $>$ oder $< 90^0$ ist.

3. Die dihexagonalen Pyramiden; sie sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren Basis und Querschnitte stets dihexagonale Figuren darstellen, indem regelmässig zwölfseitige oder dodekagonale Pyramiden gar nicht vorkommen können. Sie nähern sich in ihrer allgemeinen Gestalt bald mehr den Protopyramiden, bald mehr den Deuteropyramiden, und haben zweierlei Polkanten und zweierlei Mittelecke, welche nach ihrer Lage in den beiderlei Hauptschnitten als primäre und als secundäre Polkanten und Mittelecke unterschieden werden können. Ihre Flächen werden allgemein durch das Parameter-Verhältniss $ma : n : 1$ bestimmt, weshalb sie auch als die allgemeinsten Formen, und gewissermaassen als die Repräsentanten aller holoëdrischen Formen zu betrachten sind. Es lassen sich zahllose Varietäten von dihexagonalen Pyramiden denken, welche als spitze oder als stumpfe unterschieden werden, je nachdem $ma >$ oder $<$ als 1 ist.


Fig. 61.

Die bisher betrachteten drei Arten von Pyramiden bilden die geschlossenen Formen des Hexagonalsystems; ausser ihnen kommen aber noch besonders häufig folgende offene Formen vor, welche meist den Charakter von Prismen haben.

4. Das hexagonale Prisma der ersten Art, oder das Protoprisma, ist eine von 6 Parallelflächen der primären Hauptschnitte gebildete Form, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty a : 1 : 1$ haben, und deren Seitenkanten in die primären Hauptschnitte fallen. Auf diese Form findet Dasselbe seine Anwendung, was bei den gleichnamigen tetragonalen Prismen bemerkt wurde, und überhaupt von allen prismatischen Formen gilt, dass sie nämlich in der Richtung der Hauptaxe von indefiniter Ausdehnung und ohne alle bestimmte Begränzung zu denken sind, welche letztere durch die Flächen anderer Formen bedingt wird.

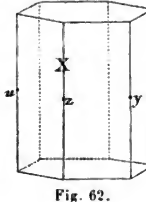


Fig. 62.

5. Das hexagonale Prisma der zweiten Art, oder das Deuteroprisma, ist eine von 6 Parallelflächen der secundären Hauptschnitte ge-

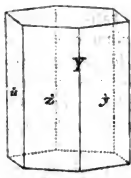


Fig. 63.

bildete Form, deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty a:2:1$ haben, und deren Seitenkanten in die secundären Hauptschnitte fallen. Obgleich also dieses Prisma in seiner Gestaltung mit dem Protoprisma übereinstimmt, so unterscheidet es sich doch von ihm wesentlich durch seine Flächenstellung, durch die Lage seiner Kanten, und durch die Lage und Grösse seiner Querschnitte. Nach oben und unten ist es unbegränzt, wie alle verticale Prismen.

6. Die **dihexagonalen Prismen** sind von 12 der Hauptaxe parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt eine dihexagonale Figur ist, und deren Flächen das Parameter-Verhältniss $\infty a:n:1$ haben. Sie besitzen zweierlei Seitenkanten, welche nach ihrer Lage in den beiderlei Hauptschnitten als primäre und secundäre Kanten unterschieden werden können. In Betreff ihrer Ausdehnung und Begränzung nach oben und unten theilen sie die Eigenschaft der beiden hexagonalen Prismen.

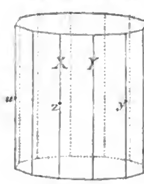
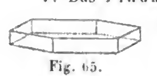


Fig. 64.

7. Das **Pinakoid** ist eine von zwei, der Basis parallelen Flächen gebildete Form von dem Parameter-Verhältnisse $a:\infty:\infty$ oder $0a:1:1$, welche den Raum in lateraler Richtung offen lässt, und daher nicht für sich allein, sondern lediglich in Combination mit andern Formen erscheinen kann.


Fig. 65.

Anm. Die Prismen wie das Pinakoid sind also *offene*, den Raum nicht allseitig umschliessende Formen, welche gar keiner isolirten Existenz fähig sind, vielmehr nothwendig entweder mit einander, nämlich jedes Prisma mit dem Pinakoide und umgekehrt, oder auch mit Pyramiden combinirt sein müssen. Uebrigens werden durch die Prismen die *säulenförmigen*, durch das Pinakoid aber die *tafelförmigen* Krystalle des Hexagonalsystems bedingt.

§. 118. Grundform; Ableitung und Bezeichnung der holoëdrischen Formen.

Gleichwie im Tetragonalsysteme so wird auch im Hexagonalsysteme irgend eine Protopyramide zur Grundform gewählt, oder vielmehr die zur Grundform auserwählte hexagonale Pyramide als eine Protopyramide vorgestellt werden müssen, wodurch sich denn auch die eigentliche Stellung des Axensystems bestimmt. Die Parameter dieser Pyramide liefern die Grundparameter der betreffenden Krystallreihe, welche daher durch den Hauptaxen-Parameter a charakterisirt wird. Wir bezeichnen die Grundform abermals mit P.

Da nun die Hauptaxe und die Nebenaxen ungleichwerthig sind, so werden sie auch als von einander unabhängige veränderliche Grössen zu behandeln sein. Denken wir uns also zuvörderst nur die Hauptaxe veränderlich,

indem wir den in ihr liegenden Parameter a mit irgend einer rationalen Zahl m multipliciren, welche grösser oder kleiner als 1 sein, und einerseits bis ∞ wachsen, anderseits bis 0 abnehmen kann, so erhalten wir für jeden endlichen Werth von m eine neue Protopyramide, welche entweder spitzer oder stumpfer als P sein wird, je nachdem $m >$ oder < 1 ist, jedenfalls aber durch das Zeichen mP, als das allgemeine Zeichen sämmtlicher Protopyramiden, dargestellt werden kann.

Für $m = \infty$ verwandelt sich die Protopyramide in das Protoprisma, und für $m = 0$ in die Basis, welche jedoch immer in zwei ihrer Parallelflächen, als Pinakoid ausgebildet ist. Sonach stellen denn das Protoprisma ∞P und das Pinakoid 0P die Gränzformen aller Protopyramiden, oder die Endglieder der Reihe

$$\begin{array}{ccccc} & m<1 & & m>1 & \\ 0P \ldots\ldots & mP \ldots\ldots & P \ldots\ldots & mP \ldots\ldots & \infty P \end{array}$$

dar, in welche sich alle Formen von dem Parameter-Verhältnisse $ma : 1 : 1$ zusammenstellen lassen, und welche eben so die Grundreihe des Hexagonalsystems genannt werden kann, wie die in §. 88 abgeleitete analoge Formenreihe die Grundreihe des Tetragonalsystems genannt wurde.

Bisher haben wir nur den in die Hauptaxe fallenden Grundparameter a als veränderlich vorausgesetzt und alle möglichen Formen abgeleitet, welche nur unter solcher Voraussetzung ableitbar sind. Jetzt müssen wir noch zusehen, welche andere Formen durch eine Veränderung der in den Nebenaxen liegenden Grundparameter abgeleitet werden können. Zu dem Ende wählen wir irgend ein beliebiges Glied mP der Grundreihe, multipliciren seine Nebenaxen mit einer Zahl n, welche grösser als 1, aber kleiner als 2 ist, und legen durch eine jede seiner Polkanten zwei Flächen, welche die nicht zu derselben Polkante gehörigen nächsten beiden Halbaxen in der Entfernung n schneiden, so erhalten wir jedenfalls eine dihexagonale Pyramide, deren Basis für verschiedene Werthe von n eine verschiedene dihexagonale Figur sein wird. Für den Werth $n = 2$ muss aber diese Figur, vermöge des geometrischen Grundcharakters des Axensystems, in das um die Basis von mP regelmässig umschriebene Hexagon, und folglich die zwölfseitige Pyramide selbst in eine hexagonale Pyramide der zweiten Art, oder in eine Deuteropyramide übergehen. Das allgemeine Zeichen der dihexagonalen Pyramiden wird natürlich mPn, und jenes der Deuteropyramiden mP2 geschrieben werden müssen.

Da nun diese zweite Ableitung aus jedem beliebigen Gliede der Grundreihe vorzunehmen ist, so wird sie auch für das Protoprisma ∞P auszuführen sein, aus welchem sie uns zunächst auf verschiedene dihexagonale Prismen ∞Pn, und endlich auf das Deuteroprisma ∞P2 gelangen lässt. Denken wir uns aber dieselbe Ableitung um die sämmtlichen Glieder der Grundreihe vollzogen, so erhalten wir zunächst verschiedene Reihen von dihexagonalen Pyramiden, deren jede einzelne durch einen besonderen Werth von n charakterisirt ist, zuletzt aber die Reihe sämmtlicher Deuteropyramiden nebst dem zugehörigen Prisma, nämlich

$$\begin{array}{ccccc} & m<1 & & m>1 & \\ 0P \ldots\ldots & mP2 \ldots\ldots & P2 \ldots\ldots & mP2 \ldots\ldots & \infty P2 \end{array}$$

welche Reihe die Gränzreihe des Hexagonalsystems genannt werden kann, weil sie die letzten Resultate aller Ableitungen begreift.

Anm. Da bei den so eben erläuterten Ableitungen alle Parameter-Verhältnisse erschöpft sind, so müssen auch alle möglichen holoëdrischen Formen abgeleitet worden sein. Wie aber die Zeichen sämmtlicher abgeleiteten Formen unter dem Zeichen mPn begriffen sind, sobald für m auch die Gränzwerthe 0 und ∞, für n die Gränzwerthe 1 und 2 zugelassen werden, so lässt sich auch mit vollem Rechte behaupten, dass die dihexagonalen Pyramiden, obgleich sie in der Natur nur selten vorkommen, die allgemeinen Repräsentanten aller holoëdrischen Formen des Hexagonalsystems sind. Wegen der Zusammenstellung aller Ableitungsresultate in der Form eines rectangulären oder auch trigonalen Schemas verweise ich auf meine Anfangsgründe der Krystallographie S. 161 f.

§. 119. Berechnung der dihexagonalen Pyramiden.

Da die dihexagonalen Pyramiden mPn die allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher holoëdrischer Formen darstellen, so haben wir uns auch zunächst mit ihrer Berechnung zu beschäftigen, wobei wir uns jedoch, eben so wie im Tetragonalsysteme, auf die Zwischenaxen, die Kantenlinien und Kantenwinkel beschränken wollen.

1. Zwischenaxen.

In beistehender Figur mögen y, z und u die Endpuncte der gleichnamigen Nebenaxen bedeuten, so ist s der Endpunct der in dem Sextanten (yz) liegenden Zwischenaxe. Um nun die Länge dieser Zwischenaxe zu finden, dazu braucht man nur die Gleichungen derselben mit der Gleichung einer der vier in demselben Sextanten liegenden Flächen, z. B. der Fläche F zu combiniren, wodurch die Coordinaten des Punctes s, und darauf die Centrodistanz dieses Punctes, oder die gesuchte Länge R der Zwischenaxe gefunden wird.

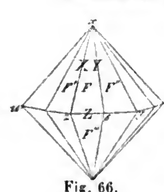


Fig. 66.

Nun hat die Zwischenaxe die Gleichungen

$$x=0,\text{ und } y-z=0\ ,$$

während der Fläche F die Gleichung

$$\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$$

zukommt; folglich werden die Coordinaten des Punctes s:

$$x=0,\ y=z=\frac{n}{n+1}\ ;$$

verbindet man diese Coordinaten nach der in §. 115 S. 189 stehenden Formel von D, so bestimmt sich

$$R=\frac{n\sqrt{3}}{n+1}\ .$$

Für die Grundform ist $n = 1$, und daher $R = \sqrt{\frac{3}{4}}$; betrachtet man diesen Werth als den **Grundwerth** der Zwischenaxe, so wird der Coëfficient r, mit welchem dieser Grundwerth multiplicirt werden muss, um auf die Zwischenaxe irgend einer Form mPn zu gelangen,

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

welches derselbe Werth ist, den wir auch im Tetragonalsysteme gefunden haben.

Anm. In den regelmässig zwölfseitigen oder dodekagonalen Pyramiden würde $R = 1$ sein müssen, woraus sich $n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ ergiebt; da nun dieser Werth **irrational** ist, so folgt hieraus, dass dodekagonale Pyramiden in der Krystallwelt unmöglich sind.

2. Kantenlinien.

Wir bezeichnen in jeder dihexagonalen Pyramide
die primären Polkanten mit X,
die secundären Polkanten mit Y,
die Mittelkanten mit Z.

Von diesen Kanten haben z. B. diejenigen, welche in Fig. 66 die Fläche F begränzen, folgende Eckpuncte:

den Poleckpunct x, dessen Coordinaten $x = m$a, $y = 0$, $z = 0$,
den prim. Mitteleckp. z, ... $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$,
den sec. Mitteleckp. s, ... $x = 0$, $y = z = \frac{n}{n+1}$;

und zwar wird begränzt
die Kante X von den Puncten x und z,
die Kante Y von den Puncten x und s,
die Kante S von den Puncten z und s;

Hieraus bestimmen sich denn nach dem Ausdruck für J in §. 115 S. 189

$$X = \sqrt{m^2\mathrm{a}^2+1}$$

$$Y = \frac{\sqrt{m^2\mathrm{a}^2(n+1)^2+3n^2}}{n+1}$$

$$Z = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n+1}$$

Anm. Setzt man $X = Y$, so folgt abermals $n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, wie vorher. Dieser Werth bestätigt nicht nur die Unmöglichkeit dodekagonaler Pyramiden, sondern lehrt uns auch die Gränze kennen, diesseits und jenseits welcher die beiden Polkanten ihr Grössenverhältniss vertauschen. Es sind nämlich die primären Polkanten länger oder kürzer als die secundären Polkanten, je nachdem $n <$ oder $> \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ ist.

3. Kantenwinkel.

In Figur 66 bildet die Fläche F, deren Gleichung

$$\frac{x}{m\mathrm{a}} + \frac{y}{n} + z = 1$$

ist, mit den Flächen F', F'' und F''' die Kanten X, Y und Z; es sind aber die repräsentativen, unmittelbar aus der Betrachtung der Form abzulesenden Gleichungen dieser Flächen folgende:

$$\text{für } F', \quad \frac{x}{m\text{a}} + \frac{u}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F'', \quad \frac{x}{m\text{a}} + y + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''', -\frac{x}{m\text{a}} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Da nun die Gleichung für die erste Fläche F' mit der Coordinate u behaftet ist, so muss sie zuvörderst nach §. 114 calculativ gemacht werden; man substituire daher in ihr für u die Grösse $-y$, und für z die Grösse $z+y$, so wird sie

$$\frac{x}{m\text{a}} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

Setzen wir nun in dem allgemeinen Ausdruck von $\cos W$ (S. 189) statt a, b und c die Parameter der Fläche F, statt a', b' und c' aber successiv die Parameter der Flächen F', F'' und F''', so ergeben sich folgende Cosinuswerthe der drei Kanten:

$$\cos X = -\frac{2m^2\text{a}^2(n^2+2n-2)+3n^2}{K}$$

$$\cos Y = -\frac{2m^2\text{a}^2(4n-n^2-1)+3n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{4m^2\text{a}^2(n^2-n+1)-3n^2}{K}$$

wobei $K = 4m^2\text{a}^2(n^2-n+1)+3n^2$ ist.

Setzen wir dagegen in demselben allgemeinen Ausdruck für $\cos W$ statt a, b und c abermals die Parameter der Fläche F, statt a', b' und c' aber successiv die Parameter der drei Flächen $y=0$, $y-z=0$ und $x=0$, so erhalten wir die Cosinus der halben Kantenwinkel, wie folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}X = \frac{m\text{a}(2-n)}{\sqrt{K}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}Y = \frac{m\text{a}(n-1)\sqrt{3}}{\sqrt{K}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}Z = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{K}}$$

aus welchen sich wiederum für $\cos\frac{1}{2}X = \cos\frac{1}{2}Y$ die Bedingung $n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ ergiebt.

§. 120. Berechnung der übrigen holoëdrischen Formen.

a. Berechnung der Protopyramiden mP.

Setzt man in den Resultaten des vorhergehenden Paragraphen $n=1$, so erhält man für die hexagonalen Pyramiden der ersten Art folgende Werthe.

1. Coëfficient der Zwischenaxe; $r=1$.
2. Kantenlinien;

$$X = \sqrt{m^2\text{a}^2+1},$$
$$Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{4m^2\text{a}^2+3}, \text{ keine Kantenlinie mehr;}$$
$$Z = 1$$

Es ist nämlich die Linie Z in §. 119 die halbe, und daher ihr doppelter Werth die ganze Mittelkante von mP; die Kantenlinie Y aber verschwindet als solche, und stellt nur noch die Höhenlinie der Flächen von mP dar.

3. Kantenwinkel.

$$\cos X = -\frac{2m^2a^2+3}{4m^2a^2+3},$$
$$\cos Y = -1, \text{ also } Y = 180^0,$$
$$\cos Z = -\frac{4m^2a^2-3}{4m^2a^2+3};$$

die halben Winkel berechnen sich am leichtesten auf folgende Weise: es ist

$$\tan\tfrac{1}{2}Z = 2ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}X = ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{2}Z.$$

b. Berechnung der Deuteropyramiden mP2.

Setzt man in den Resultaten des §. 119 $n=2$, so erhält man für die hexagonalen Pyramiden der zweiten Art folgende Werthe:

1. Coëfficient der Zwischenaxen; $r = \frac{4}{3}$.
2. Kantenlinien;

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}, \text{ ist nicht mehr eine Kante,}$$
$$Y = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{3m^2a^2+4}$$
$$Z = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Die Linie Z in §. 119 ist nämlich die halbe, und daher ihr doppelter Werth die ganze Mittelkante von mP2; die Linie X aber stellt keine Kantenlinie mehr, sondern nur noch die Höhenlinie der Pyramidenflächen dar*).

3. Kantenwinkel;

$$\cos X = -1, \text{ also } X = 180^0,$$
$$\cos Y = -\frac{m^2a^2+2}{2m^2a^2+2},$$
$$\cos Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1},$$

die halben Kantenwinkel berechnen sich sehr leicht; denn es ist

$$\tan\tfrac{1}{2}Z = ma, \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}Y = \tfrac{1}{2}ma\cos\tfrac{1}{2}Z.$$

c. Berechnung der dihexagonalen Prismen ∞Pn.

1. Coëfficient der Zwischenaxen; $r = \frac{2n}{n+1}$
2. Kantenlinien; die Seitenkanten X und Y sind von indefiniter Länge; die Linie Z, welche die Breite der Säulenflächen bestimmt, hat denselben Werth, wie in der dihexagonalen Pyramide.

---

*) Für die Besitzer meines Lehrbuches der Krystallographie bemerke ich bei dieser Gelegenheit, dass daselbst Bd. I, S. 413 in dem Ausdrucke für Y die beiden Zahlen 3 und 4 versetzt sind, weshalb dort fälschlich der Werth von $Y = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{4m^2a^2+3}$ steht.

3. Kantenwinkel;

$$\cos X = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)}$$

$$\cos Y = -\frac{4n-n^2-1}{2(n^2-n+1)}$$

$$\cos Z = -1, \text{ also } Z = 180^0.$$

Die beiden hexagonalen Prismen und das Pinakoid bedürfen keiner Berechnung.

Drittes Capitel.

Hemiëdrische Formen des Hexagonalsystems.

§. 121. Trapezoëdrische Hemiëdrie.

Da die dihexagonalen Pyramiden die Repräsentanten aller holoëdrischen Formen sind, so haben wir auch die Gesetze der Hemiëdrie zunächst an ihnen aufzusuchen und zu erforschen. Dabei müssen wir jedoch die sechsgliederige Symmetrie des Hexagonalsystems respectiren, kraft welcher immer je vier, über einem und demselben Sextanten der Basis liegende Flächen zu einem Gliede verbunden sind, und ein jedes dieser Glieder entweder zwei einzelne Flächen, oder ein Flächenpaar zu der hemiëdrischen Form zu liefern hat*).

Unter dieser Voraussetzung können nun die dihexagonalen Pyramiden, gerade so wie die ditetragonalen Pyramiden, auf viererlei verschiedene Weise hemiëdrisch ausgebildet vorkommen, weshalb denn auch im Hexagonalsysteme möglicherweise vier verschiedene Modalitäten der Hemiëdrie anzunehmen sind, obgleich bis jetzt nur zwei dieser Modalitäten wirklich nachgewiesen wurden.

Die erste Modalität der Hemiëdrie ist diejenige, bei welcher von der dihexagonalen Pyramide mPn nur die abwechselnden einzelnen Flächen zur Ausbildung gelangt sind, während die dazwischen liegenden Flächen verschwinden; es bleibt also in jedem Gliede der Pyramide entweder eine obere rechte Fläche mit einer unteren linken, oder umgekehrt.

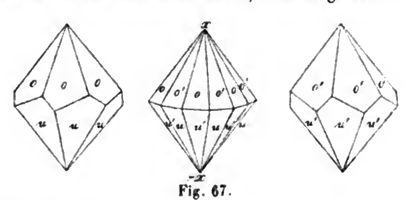


Fig. 67.

*) Vergl. die Anm. S. 149.

Die dihexagonale Pyramide verwandelt sich dadurch in ein hexagonales Trapezoëder, d. h. in eine von 12 gleichschenkeligen Trapezoiden umschlossene Form, mit 6 längeren stumpferen, und 6 kürzeren schärferen, abwechselnd im Zickzack verbundenen Mittelkanten. Nach diesem Resultate ist denn auch der Name trapezoëdrische Hemiëdrie für diese erste Modalität der hemiëdrischen Ausbildung gerechtfertigt. Uebrigens wiederholt sich das bei der gleichnamigen Hemiëdrie im Tetragonalsysteme erkannte Verhältniss, dass je zwei aus derselben Pyramide abgeleitete Trapezoëder enantiomorph sind, oder sich wie ein paar rechts und links gestaltete Körper verhalten, weshalb ihre krystallographischen Zeichen abermals $d\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ werden.

Untersuchen wir die Wirkungen dieser Hemiëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen des Systemes, so gelangen wir auf das Resultat, dass alle diese Formen scheinbar unverändert bleiben, indem sie gar keine Umgestaltung erleiden, obgleich sich in der Bedeutung ihrer Flächen eine wesentliche Verschiedenheit geltend macht, kraft welcher auch sie, trotz ihrer holoëdrischen Scheingestalten, der Enantiomorphie unterworfen sind.

Anm. Man sieht, welche grosse Analogie sich zwischen dem tetragonalen und hexagonalen Krystallsysteme auch in dieser Hemiëdrie zu erkennen giebt; dieselbe erstreckt sich auch darauf, dass bis jetzt noch kein Körper bekannt ist, an welchem die trapezoëdrische Hemiëdrie als solche zur Ausbildung gebracht wäre; denn die am Quarze bisweilen beobachteten hexagonalen Trapezoëder sind entweder durch gleichzeitige Ausbildung zweier correlater trigonaler Trapezoëder, oder durch eine Zwillingsbildung zu erklären, bei welcher sich zwei Individuen vollständig einverleibt sind.

§. 122. Rhomboëdrische Hemiëdrie.

Eine zweite und äusserst wichtige Modalität der Hemiëdrie ist diejenige, bei welcher in den auf einander folgenden Gliedern der dihexagonalen Pyramide abwechselnd die oberen und die unteren Flächenpaare allein ausgebildet sind. Die holoëdrische Stammform verwandelt sich dadurch

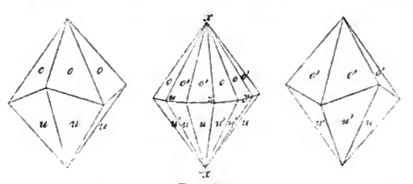


Fig. 68.

in ein hexagonales Skalenoëder, d. h. in eine von 12 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und

absteigen, und deren Polkanten zweierlei, nämlich 6 längere stumpfere, und 6 kürzere schärfere sind, während sie beide in die secundären Hauptschnitte fallen. Je zwei complementäre Skalenoëder befinden sich nur in verschiedener Stellung, können durch eine blosse Umdrehung um die Hauptaxe in parallele Stellung gebracht werden, und lassen sich daher durch die Zeichen $\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ unterscheiden.

Denken wir uns dasselbe Gesetz der Hemiëdrie auch für die übrigen holoëdrischen Formen verwirklicht, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Die dihexagonalen Prismen ∞Pn erleiden zwar keine Gestaltveränderung, unterliegen aber einer verschiedenen Bedeutung ihrer abwechselnden Flächenpaare, welche nunmehr als obere und untere Flächenpaare charakterisirt sind.

Die Protopyramiden mP, deren einzelne Flächen die Aequivalente der Flächenpaare von mPn sind, verwandeln sich durch alleinige Ausbildung ihrer abwechselnden Flächen in Rhomboëder, d. h. in eigenthüm-

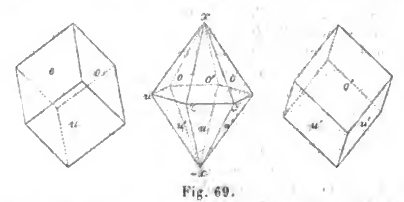


Fig. 69.

liche, von 6 gleichen und ähnlichen Rhomben umschlossene Formen, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und absteigen; und zwar in solche Rhomboëder, welche wir, zur Unterscheidung von anderen ähnlichen Formen, Rhomboëder der ersten Art nennen wollen. Ein jedes Rhomboëder hat 6 Polkanten und 6 Mittelkanten, welche gleich lang, in Bezug auf ihr Winkelmaass aber zu einander supplementär sind. Da sich je zwei aus derselben Pyramide abgeleitete Rhomboëder nur durch ihre gegenseitige Stellung unterscheiden, so geben wir ihnen die Zeichen $\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$. Im Allgemeinen aber werden die Rhomboëder als stumpfe und als spitze Rhomboëder unterschieden, je nachdem ihre Polkanten $>$ oder $< 90^0$ sind; daher denn auch das, nach einer trigonalen Zwischenaxe aufrecht gestellte Hexaëder als die ideale Gränzform zwischen den stumpfen und spitzen Rhomboëdern betrachtet werden kann.

Die Deuteropyramiden $mP2$ bleiben zwar scheinbar unverändert; ihre Flächen erlangen jedoch eine verschiedene Bedeutung, indem sie eigent-

lich nur noch die abwechselnd rechten und linken Hälften der ursprünglichen Flächen sind.

Das Protoprisma ∞P bleibt unverändert, obgleich sich für seine abwechselnden Flächen der Gegensatz geltend macht, dass sie als obere und untere Flächen zu betrachten sind.

Das Deuteroprisma ∞P2 bleibt ebenfalls unverändert, während seine Flächen gleichfalls eine andere Bedeutung haben, als bei holoëdrischer Ausbildung.

Das Pinakoid erleidet gar keine Veränderung.

Ueberhaupt also werden durch diese Hemiëdrie lediglich die dihexagonalen Pyramiden und die Protopyramiden wesentlich umgestaltet, indem sich jene in Skalenoëder, und diese in Rhomboëder verwandeln. Da uns nun die so häufig vorkommenden Rhomboëder das Dasein dieser Hemiëdrie zunächst erkennen lassen, so nennen wir sie die rhomboëdrische Hemiëdrie.

Anm. 1. In denjenigen rhomboëdrischen Krystallreihen, welche, wie z. B. jene des Turmalins und des Rothgiltigerzes, zugleich dem Hemimorphismus unterworfen sind, giebt sich die verschiedene Bedeutung der Flächen des Protoprismas und der Flächenpaare des dihexagonalen Prismas auf eine sehr anschauliche Weise zu erkennen, indem jenes gewöhnlich als trigonales, dieses als ditrigonales Prisma erscheint; wie diess ja auch nothwendig der Fall sein muss, weil die Hemiëdrie die Flächen jener Prismen in obere und untere sondert, der Hemimorphismus aber in einer einseitigen Ausbildung entweder nur der oberen, oder nur der unteren Flächen besteht. Uebrigens ist es gewiss nicht naturgemäss, den von *Breithaupt* so treffend charakterisirten Hemimorphismus als eine besondere Art der Hemiëdrie zu betrachten, und so den Begriff der Hemiëdrie ungebührlich zu erweitern.

Anm. 2. Unter allen in der Krystallwelt bekannten Hemiëdrieen ist keine so häufig ausgebildet, wie die rhomboëdrische Hemiëdrie, welcher die grosse Mehrzahl der hexagonal krystallisirenden Mineralien unterliegt. Unter diesen Mineralien befinden sich viele der wichtigsten Species, und namentlich auch der Calcit oder Kalkspath, also diejenige Species, welche den grössten Reichthum von Formen und Combinationen entfaltet. Daher erlangt denn die rhomboëdrische Hemiëdrie eine solche Wichtigkeit und Bedeutung, dass wir noch eine fernerweite Betrachtung ihrer Resultate von einem etwas anderen Gesichtspuncte einschalten müssen; zumal weil sich auf diese Betrachtung eine für die gewöhnliche krystallographische Praxis sehr bequeme Bezeichnung gründet.

§. 123. Fortsetzung; secundäre Ableitung und Bezeichnung der Skalenoëder.

Da die meisten hexagonalen Mineralien der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, da man also weit häufiger Veranlassung hat, Rhomboëder und Skalenoëder zu bestimmen und zu bezeichnen, als Protopyramiden und dihexagonale Pyramiden, und da in manchen rhomboëdrischen Krystallreihen, wie z. B. in jener des Calcites, des Turmalins, des Rothgiltigerzes u. a. sehr viele verschiedene Rhomboëder und Skalenoëder vorkommen, so erscheint es vortheilhaft, in der krystallographischen Praxis für diese Formen statt der

ursprünglichen, das Verhältniss zu ihren eigentlichen Stammformen ausdrükkenden Zeichen $\frac{mP}{2}$ und $\frac{mPn}{2}$, andere, etwas einfachere und mehr repräsentative Zeichen zu gebrauchen. Dazu gelangen wir nun leicht durch folgendes Verfahren.

Zuvörderst führen wir in jeder rhomboëdrischen Krystallreihe ein besonderes Grundelement der Bezeichnung ein, indem wir das aus der Pyramide P abgeleitete Rhomboëder, welches ja in solchen Krystallreihen die Grundform bildet, und also füglich das Grundrhomboëder genannt werden kann, mit dem Buchstaben R bezeichnen. In Uebereinstimmung damit wird ein jedes, aus irgend einer anderen Pyramide mP abgeleitete Rhomboëder das Zeichen mR erhalten müssen, so dass sich überhaupt für alle rhomboëdrisch krystallisirenden Körper die Grundreihe des Hexagonalsystems folgendermaassen schreiben lässt:

$$0R \ldots \underset{}{\overset{m<1}{\pm mR}} \ldots \pm R \ldots \overset{m>1}{\pm mR} \ldots \infty R$$

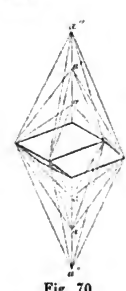
wobei für jedes Rhomboëder die beiden complementären Gegenkörper $+mR$ und $-mR$ unterschieden werden müssen, was für das Protoprisma ∞R und das Pinakoid $0R$ nicht mehr nöthig ist.

Durch diese Bezeichnung werden wir also unmittelbar darauf gewiesen, die Grundreihe des Systems gar nicht mehr als eine Reihe von Pyramiden, sondern als eine Reihe von Rhomboëdern vorzustellen, was auch dieser hemiëdrischen Ausbildungsweise des Hexagonalsystems ganz angemessen ist.

Um nun aber die Skalenoëder, als die nächst zahlreichen Formen, mit diesen Rhomboëdern in derivative und symbolische Verbindung zu bringen, dazu lässt uns eine sehr in die Augen fallende Eigenschaft derselben gelangen: die Eigenschaft nämlich, dass die Mittelkanten eines jeden Skalenoëders in ihrer Lage genau mit den Mittelkanten irgend eines Rhomboëders übereinstimmen, welches man daher auch das Rhomboëder der Mittelkanten oder das eingeschriebene Rhomboëder des Skalenoëders nennt. Wenn also für jedes Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ irgend ein bestimmtes m'R oder $-m'$R als eingeschriebenes Rhomboëder nachzuweisen ist, so wird man auch die verschiedenen Skalenoëder überhaupt nach diesen ihren eingeschriebenen Rhomboëdern gruppiren, und innerhalb jeder Gruppe nach der zunehmenden Länge ihrer Hauptaxen in eine Reihe ordnen können.

Diess führt uns nun auf eine secundäre Ableitung der Skalenoëder aus ihren eingeschriebenen Rhomboëdern, und auf eine sehr einfache und repräsentative Bezeichnung derselben.*) Gesetzt, das in der Mitte der

*) Diese Ableitung und Bezeichnung gab ich zuerst in meinem Grundrisse der Krystallographie, 1826, S. 370 ff., dann in meinem Lehrbuche der Mineralogie, 1828, S. 85 f. Die erstere ist wesentlich dieselbe, welche schon *Mohs* in seinem Grundrisse der Mineralogie eingeführt hatte.


Fig. 70.

beistehenden Figur gezeichnete Rhomboëder sei ein solches eingeschriebenes Rhomboëder mR, welches den drei Skalenoëdern aa, $a'a'$ und $a''a''$ gemeinschaftlich zukommt, so wird man ein jedes dieser Skalenoëder aus dem Rhomboëder ableiten, d. h. durch Umschreibung construiren können, indem man die Hauptaxe ma des Rhomboëders nach einer bestimmten Zahl n vervielfältigt, um zunächst die Poleckpuncte a, a' oder a'' des Skalenoëders zu erhalten. Legt man darauf in jede Mittelkante des Rhomboëders zwei Flächen, welche die Hauptaxe in ihren neuen Endpuncten schneiden, so wird offenbar das Skalenoëder construirt sein. Das krystallographische Zeichen eines auf diese Weise abgeleiteten Skalenoëders lässt sich ganz einfach mRn schreiben, wobei natürlich sowohl m als n einen ganz anderen Werth, und überdiess n eine ganz andere Bedeutung haben wird, als in dem primitiven Zeichen $\frac{mPn}{2}$, wie wir unten in §. 127 sehen werden. Sind also z. B. n, n' und n'' diejenigen Factoren von ma, welche uns die Lage der Puncte a, a' und a'' bestimmen, so werden mRn, mRn' und mRn'' die Zeichen der drei Skalenoëder sein.

Auf ähnliche Weise verfährt man in allen Fällen, welches Rhomboëder auch das eingeschriebene sein mag, und wie viele Skalenoëder auch zu ihm gehören mögen.

Der kleinste Werth von n ist jedenfalls $= 1$, der grösste Werth $= \infty$; da nun aus jedem Rhomboëder gar viele Skalenoëder abgeleitet werden können, so lassen sich sämmtliche Skalenoëder mit den Gliedern der Grundreihe in folgendem Schema verbinden:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0R & \ldots & \pm mR & \ldots & \pm R & \ldots & \pm mR & \ldots & \infty R \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
0R & \ldots & \pm mRn & \ldots & \pm Rn & \ldots & \pm mRn & \ldots & \infty Rn \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0R & \ldots & mR\infty & \ldots & R\infty & \ldots & mR\infty & \ldots & \infty R\infty
\end{array}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\infty P2}$$

Für $n = \infty$ schliesst eine jede Skalenoëder-Reihe mit dem Deuteroprisma ∞P2 ab, welchen Werth auch m haben mag; für $m = \infty$ aber giebt ∞Rn ein dihexagonales Prisma, so lange $n > 1$ und $< \infty$ ist, welchen Gränzwerthen das Protoprisma und abermals das Deuteroprisma entsprechen. Vorstehendes Schema begreift also sämmtliche Formen, mit Ausnahme der Deuteropyramiden, welche sich bei dieser secundären Ableitung in keine unmittelbare Verbindung mit den übrigen Formen bringen lassen, daher denn noch die Gränzreihe dem Schema der Rhomboëder und Skalenoëder als ein

Appendix beigefügt werden muss, um das System in seiner Vollständigkeit darstellen zu können.

Anm. Obgleich es ein Uebelstand ist, dass der Zusammenhang zwischen den Skalenoëdern und Deuteropyramiden verloren geht, so gewährt doch diese secundäre Bezeichnung der Skalenoëder den Vortheil, dass sie weit repräsentativer ist, als die primitive Bezeichnung. Das primitive Zeichen $\frac{mPn}{2}$ fordert nämlich 1. die Vorstellung einer dihexagonalen Pyramide, also einer 24-flächigen Form, und 2. die Vorstellung der Veränderung, welche sie durch die Hemiëdrie erleidet, so wie des Productes dieser Veränderung. Das secundäre Zeichen mRn dagegen macht an unsere Einbildungskraft die weit einfacheren Anforderungen, 1. ein Rhomboëder, also eine 6-flächige Form, und 2. die Verlängerung seiner Hauptaxe richtig vorzustellen. Bei der Betrachtung des Zeichens mRn stellt sich sofort das Bild des Skalenoëders vor unser Bewusstsein, was bei der Betrachtung des primitiven Zeichens durchaus nicht in demselben Grade der Fall ist. Da nun überdiess die Zahlwerthe von m und n in den secundären Zeichen weit einfacher zu sein pflegen, als in den primitiven Zeichen, so ist für das Bedürfniss der Mineralogie und Physiographie überhaupt die secundäre Ableitung und Bezeichnung der primitiven jedenfalls vorzuziehen.

§. 124. Pyramidale und trigonotype Hemiëdrie.

Die dritte Modalität der Hemiëdrie ist diejenige, bei welcher in den auf einander folgenden Gliedern der dihexagonalen Pyramide entweder nur die rechten, oder nur die linken Flächenpaare ausgebildet sind, wodurch

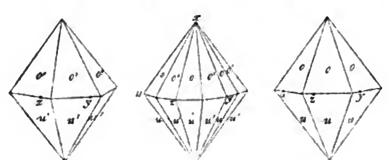


Fig. 71.

sich die zwölfseitige Pyramide in eine hexagonale Pyramide der dritten Art, oder in eine Tritopyramide d. h. in eine solche Pyramide verwandelt, welche in der Stellung ihrer Flächen sowohl von den Protopyramiden, als auch von den Deuteropyramiden wesentlich abweicht*). Denn die Nebenaxen haben in diesen Pyramiden ihre Austrittspuncte weder in den Mitteleckpuncten, noch in den Mittelpuncten der Mittelkanten, sondern in irgend anderen Puncten dieser Kanten; die Polkanten liegen daher auch weder in den primären noch in den secundären Hauptschnitten. Weil es also abermals Pyramiden sind, auf welche uns diese Hemiëdrie gelangen lässt, so nennen wir solche die pyramidale Hemiëdrie.

*) Diese Hemiëdrie ist zuerst von *Haidinger* am Apatit nachgewiesen worden.

Die hemiëdrische Form erscheint wie eine Protopyramide, oder auch wie eine Deuteropyramide, welche um die Hauptaxe mehr oder weniger entweder nach rechts, oder nach links gedreht ist; von je zwei complementären oder correlaten Tritopyramiden aber stellt sich die eine nach rechts, die andere nach links gewendet dar. Diese Verschiedenheit ist jedoch eben so wenig wesentlich, als bei den gleichnamigen Pyramiden des Tetragonalsystems (§. 93), vielmehr durch eine blosse Umkehrung der Pole aufzuheben, weshalb wir denn abermals beide Gegenkörper durch die Zeichen $\frac{d}{l}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{d}\frac{mPn}{2}$ unterscheiden können.

Denken wir uns nun dieselbe Hemiëdrie auch für die übrigen holoëdrischen Formen zur Verwirklichung gebracht, so erhalten wir folgende Resultate.

Die dihexagonalen Prismen ∞Pn verwandeln sich in hexagonale Prismen der dritten Art, oder in Tritoprismen, für welche sich gleichfalls der Unterschied des rechts und links Gewendetseins geltend macht, daher sie als $\frac{d}{l}\frac{\infty Pn}{2}$ und $\frac{l}{d}\frac{\infty Pn}{2}$ zu unterscheiden sind.

Die Protopyramiden und die Deuteropyramiden erleiden keine Gestaltveränderung, obwohl eine jede ihrer Flächen eigentlich nur noch die Hälfte der ursprünglichen Fläche ist. Dasselbe gilt auch von dem Protoprisma und dem Deuteroprisma, welche beide, eben so wie das Pinakoid, unverändert bleiben.

Anm. Es bedarf kaum der Bemerkung, wie diese Hemiëdrie in allen Stücken das vollkommene Analogon der gleichnamigen Hemiëdrie des Tetragonalsystems ist.

Endlich ist im Hexagonalsysteme noch eine vierte Modalität der Hemiëdrie möglich, welche eben so das Analogon der rhombotypen Hemiëdrie des Tetragonalsystems darstellt, wie sich die drei bisher betrachteten Modalitäten als Wiederholungen der drei anderen Hemiëdrieen dieses Systems zu erkennen geben. Wir wollen sie die trigonotype Hemiëdrie nennen, weil sie die Ausbildung von trigonalen Pyramiden, trigonalen Prismen und überhaupt von solchen Formen bedingt, deren Querschnitte gleichseitige Dreiecke, also regelmässige Trigone, und Ditrigone sind. Ihr Gesetz würde wesentlich darin bestehen, dass in den auf einander folgenden Gliedern der dihexagonalen Pyramide abwechselnd die rechten und die linken Flächenpaare allein zur Ausbildung gelangt sind. Die Pyramiden mPn verwandeln sich dadurch in ditrigonale Pyramiden, d. h. in solche sechsseitige Pyramiden, deren Basis eine ditrigonale Figur ist. Die Protopyramiden mP erleiden keine Umgestaltung, wogegen die Deuteropyramiden $mP2$ nur mit ihren an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren, folglich als trigonale Pyramiden erscheinen. Die dihexagonalen Prismen ∞Pn werden zu ditrigonalen Prismen, das Protoprisma bleibt scheinbar unverändert, und das Deuteroprisma erscheint nur noch mit seinen abwechselnden Flächen, als trigonales Prisma. Uebrigens ist diese trigo-

notype Hemiëdrie bis jetzt noch an keinem Körper in der Wirklichkeit nachgewiesen worden.

§. 125. Berechnung der hexagonalen Trapezoëder.

Die Berechnung der hexagonalen Trapezoëder beschränkt sich auf die Kantenlinien und Kantenwinkel, weil die Zwischenaxen durch die Hemiëdrie keine Veränderung erleiden.

Berechnung der Kantenlinien.

Wir unterscheiden in jedem hexagonalen Trapezoëder die beiderlei Mittelkanten als primäre und secundäre Mittelkanten, je nachdem solche an den Endpuncten der Nebenaxen oder der Zwischenaxen liegen, und bezeichnen die erstern mit Z, die andern mit Z', die Polkanten aber mit X.

Vergleichen wir nun die beistehende Figur eines Trapezoëders mit dem in Fig. 67, S. 199 stehenden Bilde seiner holoëdrischen Stammform, so erhalten wir für die zunächst in Rücksicht kommenden Flächen F, F', F'' und F''' folgende Gleichungen, welchen, soweit sie nicht schon unmittelbar calculativ hervortreten, die nach §. 114 transformirten Gleichungen untergesetzt sind:

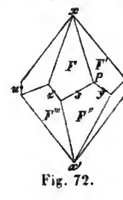


Fig. 72.

für F, $\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$

für F', $\frac{x}{ma} + y - \frac{u}{n} = 1$, oder, nach §. 114,

$$\frac{x}{ma} + y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

für F'', $-\frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$

für F''', $-\frac{x}{ma} + z + \frac{u}{n} = 1$, oder, nach §. 114,

$$-\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

Durch successive Addition und Subtraction der beiden Gleichungen von F' und F'' erhalten wir die Gleichungen der primären Mittelkante Py, wie folgt:

$$y + \frac{z}{2} = 1, \text{ und } \frac{x}{ma(2-n)} - \frac{z}{2n} = 0$$

aus deren ersterer wir sogleich erkennen, dass diese Mittelkanten den secundären Hauptschnitten parallel sind. Combiniren wir aber diese Gleichungen mit der Gleichung von F, so gelangen wir auf die Coordinaten des Punctes P:

$$x = \frac{ma(2-n)(n-1)}{n(n+1)}, \quad y = \frac{2}{n+1}, \quad z = \frac{2(n-1)}{n+1}.$$

Es sind aber die Coordinaten

für den Poleckpunct x, $x = ma$, $y = 0$, $z = 0$,
für den Punct y der Nebenaxe, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$,
für den Punct s der Zwischenaxe, $x = 0$, $y = \frac{n}{n+1}$, $z = \frac{n}{n+1}$.

Beachten wir nun, dass

die obere Polkante Px von den zwei Puncten P und x
die halbe primäre Mittelk. Py - - - - P und y
die halbe secund. Mittelk. Ps - - - - P und s

begränzt wird, so erhalten wir, nach der Formel für J in §. 115, S. 189, für die Längen der dreierlei Kanten des Trapezoëders folgende Werthe:

$$\text{Polkante } X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)^2+n^2(n^2-n+1)}}{n(n+1)}$$

$$\text{Mittelkante } Z = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{n(n+1)}$$

$$\text{Mittelkante } Z' = \frac{2(2-n)\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+n^2}}{n(n+1)}$$

Setzt man $Z=Z'$, so folgt die Bedingung $(2-n)^2=3(n-1)^2$, oder $n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$; folglich können Trapezoëder mit symmetrischen Trapezoiden eben so wenig vorkommen als dodekagonale Pyramiden.

Berechnung der Kantenwinkel.

Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke von $\cos W$ in §. 115, S. 189, statt a, b und c die Parameter der Fäche F, statt a', b' und c' aber successiv die Parameter der Flächen F', F'' und F''', so erhält man die Cosinus der drei Kanten X, Z' und Z, wie folgt:

$$\cos X = -\frac{2m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}{K}$$

$$\cos Z' = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{K}$$

in welchen Ausdrücken wiederum $K=4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2$ ist.

Alle diese für die Kantenlinien und Kantenwinkel gefundenen Ausdrücke aber verwandeln sich für $n=1$ in die Formeln der Protopyramiden, für $n=2$ in die Formeln der Deuteropyramiden, so dass die in §. 121 über die anderweiten Wirkungen dieser Hemiëdrie gezogenen Folgerungen durch die Rechnung vollkommen bestätigt werden.

§. 126. Berechnung der Skalenoëder und Rhomboëder.

Bei der Berechnung der Skalenoëder legen wir zuvörderst ihre primitive Ableitung und Bezeichnung zu Grunde, indem wir in §. 128 die der secundären Bezeichnung entsprechenden Resultate mittheilen werden. Da nun die Zwischenaxen keine Veränderung erleiden, so haben wir es abermals zunächst nur mit der Berechnung der Kantenlinien und Kantenwinkel zu thun.

Berechnung der Kantenlinien.

Wir bezeichnen in jedem Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$

die kürzeren Polkanten mit X,
die längeren Polkanten mit Y,
die Mittelkanten mit Z.

Wenn nun in nachstehender Figur y, z und u die Endpuncte der gleichnamigen positiven Halbaxen sind, so erhalten wir für die vier Flächen F, F', F'' und F''' folgende Gleichungen, welchen wiederum, soweit sie nicht unmittelbar calculativ sind, ihre calculative Form beigefügt ist;

Fig. 73.

für F, $\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$

für F', $\frac{x}{ma}+u-\frac{y}{n}=1$, oder, nach §. 114,

$$\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+\frac{(n-1)z}{n}=1$$

für F'', $\frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$

für F''', $-\frac{x}{ma}+z+\frac{u}{n}=1$, oder, nach §. 114,

$$-\frac{x}{ma}+\frac{(n-1)y}{n}+z=1$$

Die Länge der Kantenlinien ist nun leicht zu berechnen, wenn wir die Coordinaten irgend eines Mitteleckpunctes, z. B. des Punctes P kennen, weil
Px eine längere Polkante Y,
Px' eine kürzere Polkante X, und
Pz eine halbe Mittelkante Z

ist. Zur Auffindung des Punctes P gelangen wir aber, wenn wir durch Combination der beiden Gleichungen von F und F''' die Gleichungen der Mittelkante Pz bestimmen, und solche dann mit der Gleichung der Fläche F'' combiniren.

Durch successive Addition und Subtraction der Gleichungen von F und F''' ergeben sich nämlich für die Mittelkante Pz die Gleichungen:

$$\frac{y}{2}+z=1, \text{ und } \frac{x}{ma(2-n)}+\frac{y}{2n}=0$$

von denen uns die erstere lehrt, dass die Mittelkanten der Skalenoëder den secundären Hauptschnitten parallel sind. Verbinden wir diese Gleichungen mit der Gleichung von F'', so erhalten wir als Coordinaten

für den Punct P, $x=-\frac{ma(2-n)}{3n}$, $y=z=\frac{2}{3}$;

dagegen sind die Coordinaten
für den Punct x', $x=-ma$, $y=0$, $z=0$,
für den Punct x, $x=\ ma$, $y=0$, $z=0$,
für den Punct z, $x=\ 0\ $, $y=0$, $z=1$.

Verbinden wir nun die Coordinaten des Punctes P successiv mit den Coordinaten dieser anderen drei Puncte, nach Anleitung des Ausdruckes von J in

§. 115, so erhalten wir, unter Berücksichtigung, dass Pz nur die halbe Mittelkante ist, folgende Längen der drei Kantenlinien:

$$\text{kürzere Polkante } X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2n-1)^2+3n^2}}{3n}$$

$$\text{längere Polkante } Y = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}}{3n}$$

$$\text{Mittelkante } Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

Eine Gleichheit der beiden Kanten X und Z ist unmöglich, so lange die Form noch wirklich ein Skalenoëder, oder so lange $n > 1$ ist.

Berechnung der Kantenwinkel.

Setzen wir in dem allgemeinen Ausdrucke von $\cos W$ in §. 115 für a, b und c die Parameter der Fläche F, dagegen für a', b' und c' successiv die Parameter der drei Flächen F', F'' und F''', so erhalten wir die Cosinus der drei Kantenwinkel mit folgenden Werthen:

$$\cos X = -\frac{2m^2a^2(2n^2-2n-1)+3n^2}{K}$$

$$\cos Y = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)+3n^2}{K}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{K}$$

in denen abermals $K = 4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2$ ist.

Für die Cosinus der beiden halben Polkantenwinkel und den Sinus der halben Mittelkante findet man:

$$\cos\tfrac{1}{2}X = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{K}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{\sqrt{K}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}Z = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{K}}.$$

Was die Berechnung der Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ betrifft, so brauchen wir nur in denen für die Skalenoëder gefundenen Resultaten $n=1$ zu setzen, um die dazu erforderlichen Formeln zu finden;

Kantenlinien; $X = \frac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$

$Y = \frac{2}{3}\sqrt{4m^2a^2+3}$

$Z = X$

Die Linie Y ist jedoch nicht mehr eine Kantenlinie, sondern nur noch die geneigte Diagonale der Rhomboëderflächen.

Kantenwinkel; $\cos X = \frac{2m^2a^2-3}{4m^2a^2+3}$

$\cos Y = -1$, also $Y = 180^0$

$\cos Z = -\cos X$.

Setzt man dagegen in den für die Skalenoëder gefundenen Resultaten $n=2$, so erhält man dieselben Ausdrücke, welche oben in §. 120 für die Deuteropyramiden gefunden worden sind. Die Resultate der Ableitung

finden daher in denen der Berechnung ihre vollkommene Bestätigung, und der zwischen den Skalenoëdern und den Deuteropyramiden obwaltende Zusammenhang folgt aus den Berechnungsformeln der Skalenoëder mit derselben Evidenz, wie aus ihrer Ableitungs-Construction. Wie aber in der Ableitung, so geht er auch in der Rechnung verloren, sobald man die Resultate der letzteren auf eine der secundären Ableitung entsprechende Weise darstellt.

§. 127. Fortsetzung; die drei Rhomboëder jedes Skalenoëders.

In der Erscheinung eines jeden Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$ geben sich uns unmittelbar drei verschiedene Rhomboëder zu erkennen, welche durch die dreierlei Kanten des Skalenoëders angezeigt sind.

Das erste dieser Rhomboëder ist dasjenige, dessen Mittelkanten mit denen des Skalenoëders zusammenfallen, und welches wir bereits in §. 123 als das eingeschriebene Rhomboëder, oder auch als das Rhomboëder der Mittelkanten von $\frac{mPn}{2}$ kennen gelernt haben, ohne uns jedoch dort auf eine Bestimmung seiner Dimensionen einzulassen. Das zweite Rhomboëder ist dasjenige, dessen Polkanten den kürzeren Polkanten, das dritte Rhomboëder endlich dasjenige, dessen Polkanten den längeren Polkanten des Skalenoëders parallel sind. Wir können also diese drei Rhomboëder als das Rhomboëder der Mittelkanten, der kürzeren Polkanten und der längeren Polkanten unterscheiden; auch lehrt uns eine einfache Betrachtung, dass die beiden ersteren zu dem Skalenoëder eine analoge oder gleiche Stellung besitzen werden, während sich das Rhomboëder der längeren Polkanten in antiloger oder verwendeter Stellung befindet. Es handelt sich jetzt noch darum, die krystallographischen Zeichen dieser drei Rhomboëder aus den Ableitungszahlen m und n des Skalenoëders zu bestimmen.

Was nun zuvörderst das Rhomboëder der Mittelkanten betrifft, so können wir seine Hauptaxenlänge unmittelbar aus der in §. 126 für den Mitteleckpunct P des Skalenoëders gefundenen Coordinate

$$x=\frac{ma(2-n)}{3n}$$

ableiten. Es ist nämlich ein allgemein giltiges Verhältniss, dass in jedem Rhomboëder die Mitteleckpuncte um den dritten Theil der halben Hauptaxe über oder unter der Ebene der Basis liegen. Nun ist aber jener Mitteleckpunct des Skalenoëders, dessen Abstand von der Basis uns eben durch die Coordinate x bestimmt wird, zugleich ein Mitteleckpunct des eingeschriebenen Rhomboëders; folglich muss die halbe Hauptaxe dieses Rhomboëders den Werth

$$3x=\frac{ma(2-n)}{n}$$

haben, woraus sich denn ergiebt, dass $\pm\frac{m(2-n)}{n}R$ das krystallographische Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten ist.

Die Zeichen der beiden anderen Rhomboëder finden sich leicht aus der Bedingung des Parallelismus ihrer Polkanten mit den Polkanten des Skalenoëders. Es sind nämlich die Gleichungen der über dem Sextanten der $+y$ und $+z$ fallenden Polkante eines jeden Rhomboëders $\pm m'$R:

$$\pm\frac{x}{m'a}+z=1,\ \text{und}\ y-z=0.$$

Die Gleichungen der beiden, über denselben Sextanten fallenden Polkanten des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ aber bestimmen sich

für die Polk. X: $-\frac{x}{ma}+\frac{(2n-1)z}{n}=1$, und $y-z=0$,

für die Polk. Y: $\frac{x}{ma}+\frac{(n+1)z}{n}=1$, und $y-z=0$.

Hieraus folgt für den Parallelismus der Polkante des Rhomboëders

mit X, $m'a : 1 = ma(2n-1) : n$

mit Y, $m'a : 1 = ma(n+1) : n$

Da sich nun das Rhomboëder der kürzeren Polkanten in analoger, das Rhomboëder der längeren Polkanten aber in antiloger Stellung zu dem Skalenoëder befindet, so werden die krystallographischen Zeichen

für das Rhomboëder der kürzeren Polk. $=\pm\frac{m(2n-1)}{n}$R,

für das Rhomboëder der längeren Polk. $=\mp\frac{m(n+1)}{n}$R.

Das Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten aber war $\pm\frac{m(2-n)}{n}$R; da nun

$$n+1=(2n-1)+(2-n)$$

ist, so erhalten wir das Resultat, dass die Axe des Rhomboëders der längeren Polkanten der Summe der Axen der beiden anderen Rhomboëder gleich ist; ein Resultat, welches sowohl an und für sich, als auch in Bezug auf die ähnliche Relation der drei zu jedem tetragonalen Skalenoëder gehörigen Sphenoide (S. 159) merkwürdig ist.

§. 128. Fortsetzung; Berechnung des Skalenoëders aus dem secundären Zeichen mRn.

Wollen wir die in §. 126 für das Skalenoëder gefundenen Resultate so darstellen, dass sie sich auf das secundäre Zeichen desselben beziehen, so müssen wir zuvor untersuchen, wie sich die beiden Zeichen $\frac{mPn}{2}$ und m'Rn' zu einander verhalten und gegenseitig bestimmen.

In dem secundären Zeichen m'Rn' bedeutet m'R das Rhomboëder der Mittelkanten, oder das eingeschriebene Rhomboëder des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$, von welchem wir so eben in §. 127 gesehen haben, dass seine Ableitungszahl

$$m'=\frac{m(2-n)}{n}$$

ist. Die Grösse n' dagegen bedeutet diejenige Zahl, mit welcher m' multiplicirt werden muss, um auf die Hauptaxe des Skalenoëders gelangen zu lassen; demnach ist

$$m'n' = \frac{m(2-n)n'}{n} = m, \quad \text{und } n' = \frac{n}{2-n}$$

Hieraus ergiebt sich denn, dass

$$\frac{m(2-n)}{n}\text{R}\frac{n}{2-n} \text{ und } \frac{m\text{P}n}{2}$$

die beiden aequivalenten Zeichen eines und desselben Skalenoëders sind, wenn das secundäre Zeichen durch die Ableitungszahlen des primitiven Zeichens ausgedrückt wird. Ist uns aber umgekehrt das secundäre Zeichen $m\text{R}n$ gegeben, so bestimmen sich in dem primitiven Zeichen $\frac{m'\text{P}n'}{2}$ die Werthe der Ableitungszahlen zu

$$m' = mn, \text{ und } n' = \frac{2n}{n+1},$$

weshalb denn abermals

$$m\text{R}n \text{ und } \frac{mn\text{P}\frac{2n}{n+1}}{2}$$

die beiden aequivalenten Zeichen eines und desselben Skalenoëders sind, wenn das primitive Zeichen durch die Ableitungszahlen des secundären Zeichens ausgedrückt wird.

Wollen wir also irgend eine auf das primitive Zeichen $\frac{m\text{P}n}{2}$ gegründete Berechnungsformel so darstellen, dass sie dem secundären Zeichen $m\text{R}n$ entspricht, so haben wir in selbiger durchgängig für m den Werth mn, und für n den Werth $\frac{2n}{n+1}$ zu substituiren. Bringen wir diese Substitution für die in §. 126 gefundenen Resultate zur Ausführung, so gelangen wir auf folgende Berechnungsformeln:

In jedem Skalenoëder $m\text{R}n$ bestimmen sich:

der Coëfficient der Zwischenaxen; $z = \frac{4n}{3n+1}$;

die Kantenlinien; $X = \frac{1}{3}\sqrt{m^2a^2(3n-1)^2+12}$,

$Y = \frac{1}{3}\sqrt{m^2a^2(3n+1)^2+12}$,

$Z = \frac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$;

die Kantenwinkel; $\cos X = -\frac{m^2a^2(3n^2-6n-1)+6}{2K}$

$\cos Y = -\frac{m^2a^2(3n^2+6n-1)+6}{2K}$ *)

*) In der 2. Auflage meiner Anfangsgründe der Krystallographie steht durch einen Druckfehler $-6n$ statt $+6n$.

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(3n^2-1)-3}{K}$$

in welchen Formeln $K = m^2a^2(3n^2+1)+3$ ist.

Ferner ergeben sich die Proportionen:

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = n+1 : n-1$$
$$\cos\tfrac{1}{2}X : \sin\tfrac{1}{2}Z = n+1 : 2n$$
$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \sin\tfrac{1}{2}Z = n-1 : 2n$$

Die drei Rhomboëder aber, welche uns in den Kanten eines jeden Skalenoëders $\pm mRn$ gegeben sind, erhalten folgende Zeichen:

das Rhomboëder der Mittelkanten ist $\pm mR$,

das Rhomboëder der kürzeren Polkanten ist $\pm\frac{1}{2}m(3n-1)R$,

das Rhomboëder der längeren Polkanten ist $\mp\frac{1}{2}m(3n+1)R$.

Für das Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ ändert sich nur das Zeichen, und es ist daher abermals in jedem Rhomboëder mR:

$$r = 1$$
$$X = \tfrac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$$
$$Y = \tfrac{1}{3}\sqrt{4m^2a^2+3}$$
$$\cos X = \frac{2m^2a^2-3}{4m^2a^2+3}$$

Anm. Man ersieht aus Obigem, dass auch die Berechnungsformeln für die Skalenoëder eine etwas einfachere Gestalt annehmen, wenn die secundäre Bezeichnung zu Grunde gelegt wird; und zwar ist diess um so mehr der Fall, weil gewöhnlich auch m und n mit einfacheren Zahlwerthen hervortreten.

§. 129. Berechnung der Tritopyramiden.

Die Tritopyramiden sind hexagonale Pyramiden, und die allgemeinen geometrischen Eigenschaften solcher Pyramiden sind ganz unabhängig von ihrer besonderen Flächenstellung; daher ist denn die Berechnung der Tritopyramiden eine ziemlich einfache Aufgabe.

Die Zwischenaxen haben denselben Werth, wie in der holoëdrischen Stammform mPn. Die Berechnung der Kantenlinien, welche der Polkante X und der Mittelkante Z angehören, hängt lediglich von der Bestimmung eines Mitteleckpunctes, z. B. des Punctes P in beistehender Figur ab, in welcher y und z die Endpuncte der beiden gleichnamigen positiven Halbaxen bedeuten. Nun sind die Gleichungen der beiden Flächen F und F' folgende:

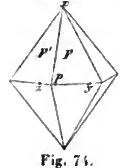


Fig. 74.

für F, $\frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$

für F', $\frac{x}{ma} + z + \frac{u}{n} = 1$, oder, nach §. 114,

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

daher werden die Gleichungen der beiden Mittelkanten Py und Pz:

$$\text{für } Py, \; x=0, \text{ und } y+\frac{z}{n}=1,$$

$$\text{für } Pz, \; x=0, \text{ und } \frac{(n-1)y}{n}+z=1.$$

Subtrahiren wir diese Gleichungen von einander, so erhalten wir die Coordinaten des Mitteleckpunctes P:

$$x=0, \; y=\frac{n(n-1)}{n^2-n+1}, \quad z=\frac{n}{n^2-n+1}$$

während die Coordinaten des Poleckpunctes x

$$x=ma, \; y=0, \; z=0$$

sind. Da nun die Polkante Px von den beiden Puncten P und x gebildet wird, während die Mittelkante dem Halbmesser der hexagonalen Basis, oder der Centrodistanz des Punctes P gleich ist, so bestimmen sich aus diesen Coordinaten, nach den Formeln für J und D in §. 115

$$\text{Polkante } X=\frac{\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)+n^2}}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$\text{Mittelk. } Z=\frac{n}{\sqrt{n^2-n+1}}.$$

Was die Kantenwinkel betrifft, so ist einleuchtend, dass in dieser Hinsicht die Mittelkante identisch mit der Mittelkante von mPn, die Polkante dagegen identisch mit der Polkante des aus mPn abgeleiteten Trapezoëders sein muss; folglich wird

$$\cos X=-\frac{2m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}{K}$$

$$\cos Z=-\frac{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{K}$$

wobei wiederum $K=4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2$ ist.

Setzen wir in allen diesen Resultaten $n=1$, oder $n=2$, so gelangen wir auf diejenigen Formeln, welche in §. 120 für die Protopyramiden und Deuteropyramiden gefunden worden sind; wodurch denn die in §. 124 über die anderweiten Effecte dieser Hemiëdrie ausgesprochenen Folgerungen vollkommen bestätigt werden.

Viertes Capitel.

Tetartoëdrische Formen des Hexagonalsystems.

§. 130. Allgemeine Bemerkung.

Wie bei der Hemiëdrie, so scheint auch bei der Tetartoëdrie die zu Anfang von §. 121 erwähnte Gliederung der dihexagonalen Pyramiden berücksichtigt werden zu müssen, so dass also von je vier, über einem Sex-

tanten der Basis gelegenen Flächen allemal eine zurückbleibt, während die drei anderen verschwinden. Unter dieser Voraussetzung sind aber nur zwei Modalitäten der Tetartoëdrie möglich. Es wird nämlich für die abwechselnden Glieder jedenfalls der Gegensatz von oben und unten eintreten, indem in dreien derselben eine obere, in dreien eine untere Fläche die bleibende ist; dabei können jedoch die oberen zu den unteren Flächen in Bezug auf rechts und links entweder eine gleichsinnige, oder eine widersinnige Lage haben. Sonach ergeben sich denn zwei Arten der Tetartoëdrie, welche wir nach den Resultaten, welche sie für die Erscheinungsweise der verschiedenen Formen zur Folge haben, durch die Namen der rhomboëdrischen und der trapezoëdrischen oder auch trigonotypen Tetartoëdrie unterscheiden können.

Da die Tetartoëdrie nur das symmetrisch vertheilte Viertel aller Flächen der Stammform mPn in Anspruch nimmt, während die Hemiëdrie die symmetrisch vertheilte Hälfte derselben fordert, so werden wir auch die Resultate jener aus den Resultaten dieser ableiten können, indem wir die letzteren einer abermaligen Hemiëdrie unterwerfen. Und so verhält es sich auch in der That. Wir gelangen nämlich auf das Product der rhomboëdrischen Tetartoëdrie, wenn wir uns entweder die Tritopyramiden oder die Skalenoëder nur mit ihren abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet denken; und wir gelangen auf das Product der trigonotypen Tetartoëdrie, wenn wir uns vorstellen, dass entweder die Skalenoëder oder die Trapezoëder nur noch mit ihren an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren, oder auch, dass die durch die trigonotype Hemiëdrie gelieferten ditrigonalen Pyramiden nur noch mit ihren abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet sind. Da nun diese Auffassung der Tetartoëdrie, als einer wiederholten Hemiëdrie, ihre Betrachtung etwas vereinfacht, so wollen wir solche auch im Folgenden zu Grunde legen.

§. 131. Rhomboëdrische Tetartoëdrie.

Wenn in den auf einander folgenden Gliedern einer dihexagonalen Pyramide mPn abwechselnd eine obere und eine untere Fläche, aber durchaus nur rechts, oder nur links liegende Flächen ausgebildet sind, so verwandelt sich die Pyramide in ein Rhomboëder, und zwar in ein Rhomboëder der dritten Art, welches sich durch seine Flächenstellung eben so von den hemiëdrischen Rhomboëdern des §. 122, wie von anderen, weiter unten zu erwähnenden Rhomboëdern unterscheidet.

Genau dasselbe Rhomboëder kommt zum Vorschein, wenn von einer Tritopyramide $\frac{d}{l}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{l}{d}\frac{mPn}{2}$ nur die abwechselnden einzelnen Flächen zur Ausbildung gelangt sind, welche in ihrer Vertheilung der so eben ausgesprochenen Regel der Tetartoëdrie vollkommen entsprechen. Da nun eine jede hexagonale Pyramide durch Vergrösserung ihrer abwechselnden Flächen in ein Rhomboëder übergeht, so begreift man, dass und warum die tetar-

toëdrische Form wirklich ein Rhomboëder der dritten Art sein muss. Die krystallographischen Zeichen der vier, aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide abzuleitenden Rhomboëder lassen sich $\pm\frac{d}{l}\frac{mPn}{4}$ und $\pm\frac{l}{d}\frac{mPn}{4}$ schreiben, weil diese correlaten Formen nur durch ihre Stellung verschieden sind.

Untersuchen wir nun die Wirkungen, welche dasselbe Gesetz der Tetartoëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen ausübt*), so erhalten wir folgende Resultate.

Die Protopyramiden mP verwandeln sich in Rhomboëder, welche eigentlich $\frac{mP}{4}$ bezeichnet werden müssen, in ihrer Erscheinung aber sich gar nicht von den hemiëdrischen Rhomboëdern $\frac{mP}{2}$ oder mR unterscheiden, obwohl ihre Flächen nur als die rechten oder linken Flächenhälften dieser letzteren zu deuten sind.

Die Deuteropyramiden $mP2$ verwandeln sich gleichfalls in Rhomboëder, und zwar in Rhomboëder der zweiten Art, denen daher das Zeichen $\frac{mP2}{4}$ zukommt, und deren Flächen eigentlich auch nur als die vergrösserten abwechselnden Flächenhälften von $mP2$ zu denken sind.

Die dihexagonalen Prismen ∞Pn verwandeln sich in hexagonale Prismen der dritten Art oder in Tritoprismen, welche in ihrer Erscheinung mit den hemiëdrischen Tritoprismen des §. 124 vollkommen übereinstimmen, sich aber von selbigen durch die Bedeutung ihrer Flächen unterscheiden.

Das Protoprisma ∞P und das Deuteroprisma $\infty P2$ bleiben scheinbar ganz unverändert, obwohl eigentlich jede ihrer Flächen nur als das zur weiteren Ausdehnung gelangte Viertel einer ganzen Fläche gedeutet werden muss.

Ueberhaupt also erhalten wir für das Hexagonalsystem in seiner rhomboëdrischen Tetartoëdrie das Resultat, dass die sämmtlichen Pyramiden als Rhomboëder, die sämmtlichen Prismen aber als hexagonale Prismen erscheinen, und dass sowohl jene Rhomboëder als auch diese Prismen Formen der ersten, zweiten und dritten Art sind, je nachdem sie aus der Grundreihe, aus der Gränzreihe, oder von dihexagonalen Formen abstammen.

§. 132. Berechnung der tetartoëdrischen Rhomboëder.

Wir werden die Berechnung der aus mPn abgeleiteten tetartoëdrischen Rhomboëder am leichtesten ausführen, wenn wir sie als hemiëdrische Formen

*) Bei dieser Untersuchung ist es vortheilhaft, eine jede Form durch eine angemessene Theilung ihrer Flächen auf eine zwölfseitige Pyramide zurückzuführen, und dann für ihre 24 Flächenfelder buchstäblich genau das zu Anfang des Paragraphen ausgesprochene Gesetz der Vertheilung eintreten zu lassen.

der Tritopyramiden betrachten. Es sei also in nachstehender Figur die Pyramide eine solche hexagonale Pyramide der dritten Art, und das daneben befindliche Rhomboëder dasjenige, welches aus ihr durch Vergrösserung der abwechselnden Flächen F, F', F'' u. s. w. abgeleitet werden kann. Wenn nun y, z und u die Endpuncte der gleichnamigen positiven Halbaxen sind, so bestimmen sich die Gleichungen der beiden vorderen oberen Flächen des Rhomboëders, wie folgt:

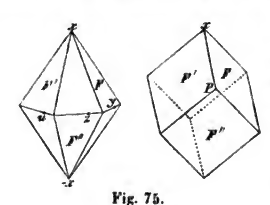


Fig. 75.

für F, $\frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$

für F', $\frac{x}{ma} + u - \frac{y}{n} = 1$, oder, nach §. 114,

$$\frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

Durch Combination dieser Gleichungen erhalten wir die Gleichungen der Polkantenlinie Px des Rhomboëders:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n^2-n+1)z}{n(n+1)} = 1, \text{ und } \frac{y}{2-n} + \frac{z}{n+1} = 0.$$

Da nun in jedem Rhomboëder die Mitteleckpuncte genau um $\frac{1}{3}$ der halben Hauptaxe über oder unter der Basis liegen, so ist offenbar P derjenige Punct der Polkantenlinie Px, für welchen $x = \frac{1}{3}ma$; setzt man diesen Werth in die erste Gleichung dieser Linie, so erhält man die Coordinate z, und dann aus der zweiten Gleichung die Coordinate y, überhaupt also für den Punct P die Coordinaten:

$$x = \tfrac{1}{3}ma, \quad y = -\frac{2n(2-n)}{3(n^2-n+1)}, \quad z = \frac{2n(n+1)}{3(n^2-n+1)};$$

der Punct x aber hat die Coordinaten:

$$x = ma, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Hieraus bestimmt sich denn, nach der Formel für J in §. 115,

$$\text{Polkantenlinie } X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}}{3\sqrt{n^2-n+1}}$$

Um endlich den Cosinus dieser Kante zu finden, dazu haben wir in dem allgemeinen Ausdrucke von $\cos W$ in §. 115 für a, b und c die Parameter der Fläche F, für a', b' und c' die Parameter der Fläche F' einzusetzen, wodurch sich

$$\cos X = \frac{2m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

bestimmt.

Setzt man in diesen Formeln von X und $\cos X$ $n=1$, so gelangt man auf diejenigen Formeln, welche in §. 126 für die Rhomboëder der ersten Art gefunden worden sind, zum Beweise, dass die aus mP abgeleitete tetartoëdrische Form in ihrer Gestalt wirklich mit dem Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder mR übereinstimmt.

Setzt man dagegen $n = 2$, so erhält man für die Rhomboëder der zweiten Art $\frac{mP2}{4}$, als die tetartoëdrischen Formen der Deuteropyramiden:

$$\text{Polkantenlinie } X = \tfrac{2}{3} \sqrt{m^2a^2+4}$$

$$\cos X = \frac{m^2a^2-2}{2m^2a^2+2}$$

Für $m = \infty$ gelangt man auf die Winkel eines hexagonalen Prismas, so dass die Resultate der Rechnung dasjenige vollkommen bestätigen, was in §. 131 über die Wirkungen dieser Tetartoëdrie gesagt worden ist.

§. 133. Trigonotype oder trapezoëdrische Tetartoëdrie.

Wenn in den auf einander folgenden Gliedern einer dihexagonalen Pyramide mPn abwechselnd eine obere und eine untere Fläche ausgebildet ist, welche gegenseitig nach rechts und links eine widersinnige Lage haben, so verwandelt sich die zwölfseitige Pyramide in ein trigonales Trapezoëder. Es macht sich also hier gleichzeitig der Gegensatz von oben und unten, so wie von rechts und links geltend, während bei der rhomboëdrischen Tetartoëdrie nur der erstere Gegensatz eintrat.

Wir erhalten genau dieselbe Form, wenn wir an einem hexagonalen Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ die an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaare allein ausgebildet denken, indem die so bestimmten Flächen in ihrer Lage dem so eben ausgesprochenen Gesetze der Tetartoëdrie vollkommen entsprechen. Jedes Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ liefert also zwei correlate trigonale

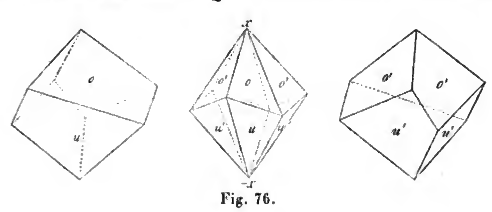


Fig. 76.

Trapezoëder, wie aus vorstehender Figur zu ersehen ist, während natürlich die dihexagonale Pyramide mPn, als die eigentliche holoëdrische Stammform, vier dergleichen Trapezoëder bedingt. — Diese Trapezoëder sind von 6 gleichschenkeligen Trapezoiden umschlossene Formen, mit 3 längeren stumpferen, und 3 kürzeren schärferen Mittelkanten, welche im Zickzack auf- und absteigen; ihr Mittelquerschnitt ist ein Ditrigon, während alle, in derselben Gestalthälfte zwischen dem Polecke und den Mittelecken gedachte Querschnitte gleichseitige Dreiecke oder Trigone sind. Je zwei correlate, d. h. aus demselben Skalenoëder abgeleitete Trapezoëder sind enantiomorph, oder ver-

schieden wie ein paar rechts und links gebildete Körper. Daher werden die krystallographischen Zeichen der vier, aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide mPn hervorgehenden Trapezoëder $\pm d\frac{mPn}{2}$ und $\pm l\frac{mPn}{2}$ zu schreiben sein.

Untersuchen wir nun die Wirkungen derselben Tetartoëdrie auf die übrigen holoëdrischen Formen, so gelangen wir auf folgende Resultate.

Die Protopyramiden mP verwandeln sich in Rhomboëder, welche in ihrer Gestalt vollkommen mit den hemiëdrischen Rhomboëdern mR übereinstimmen, sich aber durch die Bedeutung ihrer Flächen, und den ihnen dadurch aufgeprägten Charakter der Enantiomorphie wesentlich unterscheiden.

Die Deuteropyramiden $mP2$ verwandeln sich in trigonale Pyramiden, indem sie nur noch mit denen an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren ausgebildet sind; diese Pyramiden erscheinen gerade so, wie die gleichnamigen Producte der trigonotypen Hemiëdrie (§. 124), unterliegen aber einer verschiedenen Bedeutung ihrer Flächen, und kraft dieser dem Verhältnisse der Enantiomorphie.

Die dihexagonalen Prismen ∞Pn erscheinen nur noch mit ihren abwechselnden Flächenpaaren, als ditrigonale Prismen, welche sich von den gleichnamigen Producten der trigonotypen Hemiëdrie dadurch unterscheiden, dass ihre abwechselnden einzelnen Flächen zugleich als obere und untere, sowie als rechte und linke verschieden sind.

Das Protoprisma ∞P bleibt scheinbar unverändert, obgleich sich auch für seine Flächen eine ganz andere Bedeutung geltend macht, indem z. B. die drei abwechselnden als obere rechte, die dazwischen liegenden als untere linke vorgestellt werden müssen, u. s. w.

Das Deuteroprisma $\infty P2$ erscheint nur noch als trigonales Prisma, mit seinen abwechselnden drei Flächen, deren Bedeutung jedoch ebenfalls eine andere ist, als in dem gleichnamigen Producte der trigonotypen Hemiëdrie.

Das Pinakoid bleibt, wie immer, unverändert.

Anm. 1. Wir nennen diese Tetartoëdrie die trapezoëdrische nach dem Producte, welches sie aus der dihexagonalen Pyramide liefert, die trigonotype dagegen, weil sie, eben so wie die gleichnamige und mit ihr sehr nahe verwandte Hemiëdrie, die Ausbildung von trigonalen Pyramiden und Prismen, und überhaupt von solchen Formen veranlasst, deren Querschnitte Trigone und Ditrigone sind. Die Analogie zwischen ihr und der rhombotypen Tetartoëdrie des Tetragonalsystems ist so in die Augen fallend, dass sie keiner weiteren Erörterung bedarf.

Anm. 2. Dass uns der Quarz, dieses so wichtige und interessante Mineral, in seinen Krystallformen die Gesetze der trapezoëdrischen Tetartoëdrie verwirklicht zeigt, diess habe ich bereits im Jahre 1830, in meinem Lehrbuche der Krystallographie, und in allen meinen späteren Schriften geltend zu machen gesucht. In der That lassen sich, (unter Berücksichtigung der von *Haidinger* und *G. Rose* so vortrefflich nachgewiesenen Zwillingsbildung, und des bisweiligen simultanen Auftretens correlater Formen), alle morphologischen Eigenthüm-

lichkeiten des Quarzes aus dieser Tetartoedrie so **vollständig** erklären, dass es einigermaassen auffallen muss, jene von mir zuerst gegebene und, wie ich glaube, naturgemässe Interpretation der Quarzformen so wenig berücksichtigt zu sehen. Die Krystallreihe des Quarzes ist weder eine holoëdrische, noch eine hemiëdrische, sondern eine tetartoëdrische, und daher das Rhomboëder $r\frac{P}{4}$ oder $l\frac{P}{4}$ als ihre eigentliche Grundform, dagegen die Pyramide P nur als die holoëdrische Stammform dieser Grundgestalt aufzuführen.

§. 134. Berechnung der trigonalen Trapezoëder.

Wir gelangen auf dem kürzesten Wege zur Berechnung der trigonalen Trapezoëder, wenn wir sie als hemiëdrische Formen der Skalenoëder betrachten. In beistehender Figur sehen wir links ein Skalenoëder, von dessen an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren das rechts befindliche Trapezoëder gebildet wird. An einem solchen Trapezoëder haben wir dreierlei Kanten zu unterscheiden, nämlich

die Polkanten X
die längeren Mittelkanten Z,
die kürzeren Mittelkanten Z'.

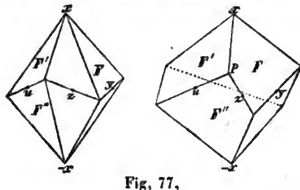


Fig. 77.

Um nun zuvörderst die Längen der **Kantenlinien** berechnen zu können, dazu bedürfen wir nur irgend eines Mitteleckpunctes, z. B. des Punctes P, welcher der Durchschnittspunct der Mittelkante Pz mit der Fläche F' ist; da nun diese Mittelkante die Durchschnittslinie der beiden Flächen F und F'' ist, so müssen wir von den Gleichungen der drei Flächen F, F' und F'' ausgehen; diese sind

für F, $\quad \frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$

für F', $\quad \frac{x}{ma}+u-\frac{y}{n}=1$, oder, nach §. 114,

$$\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+\frac{(n-1)z}{n}=1$$

für F'', $\quad -\frac{x}{ma}+u+\frac{z}{n}=1$, oder, nach §. 114,

$$-\frac{x}{ma}-\frac{(n-1)y}{n}+\frac{z}{n}=1.$$

Durch successive Addition und Subtraction der Gleichungen von F und F'' erhalten wir die Gleichungen der Mittelkante Pz

$$\frac{y}{2}+z=n, \text{ und } \frac{x}{ma(2n-1)}+\frac{y}{2n}=0;$$

Combiniren wir diese mit der Gleichung der Fläche F', so gelangen wir auf die Coordinaten

für den Punct P, $x = \frac{ma(2n-1)(2-n)}{3n}$, $y = -\frac{2}{3}(2-n)$, $z = \frac{2}{3}(n+1)$.

Dagegen sind die Coordinaten

für den Punct x, $x = ma$, $y = 0$, $z = 0$;

für den Punct u, $x = 0$, $z = 0$, $u = 1$, oder, nach §. 114,

$x = 0$, $y = -1$, $z = 1$;

Den Punct z bestimmen wir, indem wir in der Gleichung der Mittelkante Pz $x = 0$ setzen; also werden die Coordinaten

für den Punct z, $x = 0$, $y = 0$, $z = n$.

Es wird aber begränzt

die Polkante Px von den Puncten P und x,

die halbe Mittelkante Pu von den Puncten P und u,

die halbe Mittelkante Pz von den Puncten P und z.

Substituiren wir also in dem allgemeinem Ausdrucke von J in §. 115 für a, b und c die Coordinaten des Punctes P, für a', b' und c' successiv die Coordinaten der drei Puncte x, u und z, so erhalten wir, unter Berücksichtigung dass Pu und Pz nur die halben Mittelkanten sind, für die dreierlei Kantenlinien folgende Werthe:

$$\text{Polkante } X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)^2+3n^2(n^2-n+1)}}{3n}$$

$$\text{Mittelkante } Z = \frac{2(2n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

$$\text{Mittelkante } Z' = \frac{2(2-n)\sqrt{m^2a^2(2n-1)^2+3n^2}}{3n}$$

Was endlich die Kantenwinkel betrifft, so ist es einleuchtend, dass die Polkante X mit der Polkante der Rhomboëder $\frac{mPn}{4}$ in §. 132, und dass die Mittelkante Z mit der Mittelkante der Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ in §. 126 identisch ist; wir haben daher nur noch die Mittelkante Z' nach dem allgemeinen Ausdrucke von $\cos W$ in §. 115 zu berechnen, indem wir für a, b und c die Parameter der Fläche F, für a', b' und c' die Parameter der Fläche F'' einsetzen, und erhalten so überhaupt:

$$\cos X = \frac{2m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{K} = \cos X \text{ in §. 132,}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{K} = \cos Z \text{ in §. 126,}$$

$$\cos Z' = \frac{2m^2a^2(2n^2-2n-1)+3n^2}{K}$$

worin $K = 4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2$ ist.

Setzt man in diesen, für die Trapezoëder gefundenen Ausdrücken $n = 1$, so gelangt man auf das Resultat, dass $Z = Z' = X = \frac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$, und dass

$$\cos X = \frac{2m^2a^2-3}{4m^2a^2+3},\ \cos Z = \cos Z' = -\cos X,$$

welches die oben in §. 126 für die Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder mR gefundenen Formeln sind.

Setzt man dagegen $n=2$, so erhält man, ganz in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Ableitung, die Formeln für die trigonalen Pyramiden, nämlich

$$X = \sqrt{m^2a^2+4},\ Z = 2\sqrt{3},\ Z' = 0;$$
$$\cos X = \frac{m^2a^2-2}{2(m^2a^2+1)},\ \cos Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1}$$

Setzt man endlich $m=\infty$, so bekommt man für die Seitenkanten des ditrigonalen Prismas, welche den Kanten Z und Z' entsprechen:

$$\cos Z = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)} = \cos X \text{ in §. 120},$$
$$\cos Z' = \frac{2n^2-2n-1}{2(n^2-n+1)},$$

welche beide für $n=1$ auf $Z=Z'=120^0$, dagegen für $n=2$ auf $Z=180^0$ und $Z'=60^0$ führen; zum Beweise, dass das Prisma ∞P unverändert bleibt, während das Prisma ∞P2 als trigonales Prisma auftritt.

Fünftes Capitel.

Combinationen des Hexagonalsystems.

§. 135. Eintheilung derselben.

Die Combinationen des Hexagonalsystems unterscheiden sich als holoëdrische, hemiëdrische und tetartoëdrische, je nachdem diese oder jene Ausbildungsweise der Formen Statt findet. Da nun die holoëdrische und die rhomboëdrisch-hemiëdrische Ausbildung des Systems diejenigen beiden sind, denen wir in der Natur am häufigsten begegnen, so werden wir uns vorzüglich mit ihnen zu beschäftigen haben.

Die meisten hexagonal krystallisirenden Körper sind der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterworfen, und nur wenige lassen eine wirkliche holoëdrische Gestaltung erkennen. Die pyramidale Hemiëdrie kommt am Apatite vor; die trapezoëdrische und die trigonotype Hemiëdrie aber hat man noch gar nicht beobachtet, indem diejenigen Combinationen des Quarzes, welche allenfalls so gedeutet werden könnten, theils durch eine simultane Ausbildung zweier correlater tetartoëdrischer Formen*), theils durch eine Zwillingsbil-

*) Wie z. B. die von *G. Rose* in seiner Abhandlung Fig. 50 dargestellten Quarzkrystalle aus Brasilien und die analog gebildeten von den Färöern, welche dasselbe trigo-

dung zu erklären sind. Die rhomboëdrische Tetartoëdrie ist am Titaneisenerz, am Dioptas und am Phenakit*), die trigonotype Tetartoëdrie aber bis jetzt nur am Quarze erkannt worden.

Von den hemiëdrischen Combinationen hätten wir also, nächst den so ausserordentlich häufigen rhomboëdrischen, nur noch die pyramidalen des Apatites zu berücksichtigen. Da jedoch diese lediglich durch die eigenthümliche Erscheinungsweise der dihexagonalen Pyramiden und Prismen, also solcher Formen charakterisirt sind, welche am Apatite stets untergeordnet auftreten, während die vorwaltenden Formen theils Protopyramiden, theils Deuteropyramiden nebst den Gränzformen 0P, ∞P und ∞P2 sind, so bedarf es auch blos der Bemerkung, dass in den Combinationen des Apatites die Pyramiden mPn und die Prismen ∞Pn nur entweder mit ihren rechten, oder mit ihren linken, also nur mit denen auf einer Seite eines jeden primären Hauptschnittes gelegenen Flächen ausgebildet sind; während die Bestimmung der betreffenden Formen nach denselben Regeln zu geben ist, wie in den holoëdrischen Combinationen.

§. 136. Theorie der holoëdrischen Combinationen.

Wie selten auch dihexagonale Pyramiden überhaupt vorkommen, und wie untergeordnet sie gewöhnlich ausgebildet zu sein pflegen, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass die allgemeine Theorie der binären Combinationen auf die Combination zweier solcher Pyramiden gegründet werden muss. Denken wir uns also eine vorherrschende Pyramide mPn, und eine untergeordnete m'Pn', so haben wir zu untersuchen, welche Veränderungen die erstere durch die Flächen der letzteren erleiden kann. Es sind offenbar dieselben sechs Veränderungen, die wir in §. 103 für eine vorherrschende ditetragonale Pyramide kennen gelernt haben, nur dass die dort erwähnte 8flächige Zuspitzung jetzt als eine 12flächige Zuspitzung erscheint, nämlich:

1. eine Zuschärfung der primären Polkanten,
2. eine Zuschärfung der secundären Polkanten,
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten,
4. eine zwölfflächige Zuspitzung der Polecke,
5. eine vierflächige Zuspitzung der primären Mittelecke, und
6. eine vierflächige Zuspitzung der secundären Mittelecke.

Wenn wir uns nun beide Formen auf gleich grosse Nebenaxen reducirt denken, so werden die Bedingungen, welche diese sechs Combinations-Verhältnisse bestimmen, abermals wesentlich von den Grössen der beiderlei Hauptaxen h und h', und der beiderlei Zwischenaxen r und r' abhängen, und

---

nale Trapezoëder gleichzeitig rechts und links ausgebildet zeigen, so dass beide zugleich ein Skalenoëder reproduciren. Diese Krystalle sind wohl nicht als Zwillingskrystalle, sondern nur so zu erklären, wie z. B. die Oktaëder der Zinkblende, welche durch simultane und gleichmässige Ausbildung beider Tetraëder entstehen.

*) Zumal an den Varietäten von *Framont*, an denen *Beyrich* sie zuerst nachgewiesen hat.

sich buchstäblich als dieselben herausstellen, deren nähere Erörterung in §. 103 gegeben wurde. Es ergiebt sich nämlich

1. eine Zuschärfung der prim. Polk., wenn $h' = h$, und $r' > r$;
2. eine Zuschärfung der sec. Polk., wenn $q' = q$, und $r' < r$, wobei abermals $q = \frac{h}{r}$, und $q' = \frac{h'}{r'}$;
3. eine Zuschärfung der Mittelk., wenn $r' = r$, und $h' > h$;
4. eine 12flächige Zusp. der Polecke, wenn $h' < h$, und $q' < q$;
5. eine 4flächige Zusp. der prim. Mittelecke, wenn $h' > h$, und $r' > r$;
6. eine 4flächige Zusp. der sec. Mittelecke, wenn $q' > q$, und $r' < r$.

Auch ist wiederum $h' > = < h$, wenn $m' > = < m$,
$r' > = < r$, wenn $n' > = < n$,
$q' > = < q$, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > = < \frac{m(n+1)}{n}$

und wir erhalten daher abermals für die angeführten sechs Combinations-Verhältnisse folgende Regeln:

An jeder dihexagonalen Pyramide mPn bildet eine zweite dergleichen Pyramide m'Pn':

1. eine Zuschärfung der primären Polkanten X, wenn $m' = m$, und $n' > n$;
2. eine Zuschärfung der secundären Polkanten Y, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$, also auch $m' < m$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten Z, wenn $n' = n$, und $m' > m$;
4. eine zwölfflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$, wobei $n' > = < n$ sein kann;
5. eine vierflächige Zuspitzung der primären Mittelecke, wenn $m' > m$, und $n' > n$; und
6. eine vierflächige Zuspitzung der secundären Mittelecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$.

In diesen sechs Regeln ist abermals die ganze Theorie der holoëdrischen Combinationen enthalten, indem man nur für m, n, m' und n' die entsprechenden Werthe einzuführen braucht, um die Combinations-Verhältnisse irgend zweier anderer Formen zu erschliessen. Dabei macht sich gegen das Tetragonalsystem blos der Unterschied geltend, dass sowohl n als auch n' niemals > 2 werden können, während dieselben beiden Ableitungszahlen in dem genannten Systeme erst mit ∞ ihren Gränzwerth erreichen.

Anm. Wollen wir z. B. wissen, welche Veränderungen eine Protopyramide mP durch eine Deuteropyramide m'P2 erleiden kann, so haben wir zu berücksichtigen, dass dann nur noch die drei Fälle Nr. 1, 4 und 5 möglich sind,

weil ja $n' > n$ ist. Da nun die untergeordnete Form nicht mehr eine zwölfseitige, sondern eine sechsseitige Pyramide ist, so gelangen wir auf die Folgerung, dass mP durch m'P2 überhaupt dreierlei Veränderungen erleiden kann, nämlich:

eine Abstumpfung der Polkanten, wenn $m' = m$,
eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$, und
eine Zuschärfung der Mittelecke, wenn $m' > m$;

wobei in allen Fällen die Flächen von m'P2 auf die Polkanten von mP aufgesetzt sein werden. Auf ähnliche Weise lassen sich für je zwei andere Formen die ihnen zukommenden Combinations-Erscheinungen bestimmen.

§. 137. Rhomboëdrische Combinationen.

Wenn wir von rhomboëdrischen Combinationen schlechthin sprechen, so sind damit allemal rhomboëdrisch-hemiëdrische Combinationen gemeint, gerade so wie wir die Krystallreihe eines Minerals eine rhomboëdrische nennen, um auszudrücken, dass sie den Gesetzen der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterliegt.

Rhomboëdrische Combinationen sind also diejenigen Combinationen des Hexagonalsystems, in welchen die Protopyramiden als Rhomboëder, und die dihexagonalen Pyramiden als Skalenoëder, alle übrigen Formen aber mit ihrer vollen Flächenzahl erscheinen. Da wir nun in der Lehre von der Ableitung und Bezeichnung die Skalenoëder von einem zweifachen Gesichtspuncte aus dargestellt haben, indem wir dabei einerseits ihre ursprünglichen Beziehungen zu den dihexagonalen Pyramiden, anderseits gewisse Beziehungen zu den Rhomboëdern in das Auge fassten, so fragt es sich, welche von beiden Ansichten wir bei der Combinationslehre zu Grunde legen sollen. Wegen der grösseren Anschaulichkeit und Einfachheit der secundären Ableitung würden wir derselben jedenfalls den Vorzug geben, wenn nicht bei ihrer Anwendung der Zusammenhang der Deuteropyramiden mit den Rhomboëdern und Skalenoëdern gänzlich verloren ginge; ein Zusammenhang, den wir wegen des nicht seltenen Vorkommens jener Pyramiden in rhomboëdrischen Combinationen ja nicht aus dem Auge verlieren dürfen. Um daher beiden Anforderungen Genüge zu leisten, sind wir genöthigt, die Combinationsregeln zuvörderst für die primitive Ableitung und Bezeichnung aufzusuchen, und nachher sämmtliche auf die Skalenoëder bezügliche Regeln in die Sprache der secundären Ableitung zu übersetzen.

§. 138. Theorie der rhomboëdrischen Combinationen bei Anwendung der primitiven Bezeichnung.

Die Theorie der binären rhomboëdrischen Combinationen beruht auf den Combinationsgesetzen zweier Skalenoëder $\frac{m\mathrm{P}n}{2}$ und $\frac{m'\mathrm{P}n'}{2}$, für welche wir jedoch, wie für alle hemiëdrischen Formen, die zweifache Stellung zu berücksichtigen haben. Die Verhältnisse, unter denen sich zwei Skalenoëder combiniren können, werden aber wesentlich durch die gegenseitige Lage

ihrer gleichnamigen Kanten bestimmt, welche wiederum von gewissen Winkeln abhängig ist. Bezeichnen wir nämlich in irgend einem Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ den Neigungswinkel

der längeren Polkante zur Hauptaxe mit α,
der kürzeren Polkante zur Hauptaxe mit β, und
der Mittelkante gegen die Basis mit γ,

so bestimmen sich die Cotangenten dieser Winkel, wie folgt:

$$\cot\alpha = \frac{ma(n+1)}{n\sqrt{3}},$$

$$\cot\beta = \frac{ma(2n-1)}{n\sqrt{3}},$$

$$\cot\gamma = \frac{ma(2-n)}{n\sqrt{3}}.$$

Bezeichnen wir eben so in dem zweiten Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$ die analogen Winkel mit α', β' und γ', so gelten für die Cotangenten dieser Winkel dieselben Werthe mit m' und n', statt mit m und n. Die Veränderungen aber, welche das vorwaltende Skalenoëder durch die Flächen des untergeordneten erleiden kann, bestimmen sich wesentlich durch die Verhältnisse dieser beiderseitigen Winkel.

I. Befinden sich nämlich beide Formen in gleicher oder analoger Stellung, dann sind folgende sechs Combinations-Erscheinungen möglich; die vorherrschende Form $\pm\frac{mPn}{2}$ erleidet durch die untergeordnete Form $\pm\frac{m'Pn'}{2}$:

1. eine Zuschärfung der längeren oder stumpferen Polkanten, wenn $\alpha'=\alpha$, und $\beta'>\beta$;
2. eine Zuschärfung der kürzeren oder schärferen Polkanten, wenn $\beta'=\beta$, und $\alpha'>\alpha$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $\gamma'=\gamma$, und $\alpha'<\alpha$;
4. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\alpha'>\alpha$, und $\beta'>\beta$;
5. eine Zuschärfung der Mittelecke, bei welcher die Zuschärfungsflächen auf die stumpferen Polkanten und die Mittelkanten aufgesetzt sind, wenn $\alpha'<\alpha$, und $\gamma'>\gamma$;
6. eine Zuschärfung der Mittelecke, bei welcher die Zuschärfungsflächen auf die schärferen Polkanten und die Mittelkanten aufgesetzt sind, wenn $\beta'<\beta$, und $\gamma'<\gamma$.

II. Befinden sich dagegen beide Formen in verwendeter oder antiloger Stellung, dann sind nur folgende drei Fälle möglich; die vorherrschende Form $\pm\frac{mPn}{2}$ erleidet durch die untergeordnete Form $\mp\frac{m'Pn'}{2}$:

7. eine Zuschärfung der schärferen Polkanten, wenn $\alpha'=\beta$, und $\beta'>\alpha$;
8. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\alpha'>\beta$, und $\beta'>\alpha$;
9. eine Zuschärfung der Mittelecke, bei welcher die Zuschärfungsflächen

auf die schärferen Polkanten und die Mittelkanten aufgesetzt sind, wenn $\alpha' < \beta$.

Nun ergiebt sich aber aus den oben mitgetheilten Werthen der Cotangenten dieser Winkel, dass

bei gleicher oder analoger Stellung beider Formen:

$$\alpha' >=< \alpha, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} <=> \frac{m(n+1)}{n},$$

$$\beta' >=< \beta, \text{ wenn } \frac{m'(2n'-1)}{n'} <=> \frac{m(2n-1)}{n},$$

$$\gamma' >=< \gamma, \text{ wenn } \frac{m'(2-n')}{n'} <=> \frac{m(2-n)}{n};$$

bei verwendeter oder antiloger Stellung beider Formen:

$$\alpha' >=< \beta, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} <=> \frac{m(2n-1)}{n},$$

$$\beta' >=< \alpha, \text{ wenn } \frac{m'(2n'-1)}{n'} <=> \frac{m(n+1)}{n}.$$

Substituiren wir diese Bedingungen in die vorstehenden 9 Fälle, so erhalten wir folgende, unmittelbar durch die Ableitungszahlen ausgedrückten Combinationsregeln;

I. Bei analoger Stellung bildet $\frac{m'Pn'}{2}$ an $\frac{mPn}{2}$:

1. eine Zuschärfung der stumpferen Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} < \frac{m(2n-1)}{n}$, woraus sich denn ergiebt, dass auch $m' < m$, und $n' < n$ sein muss;
2. eine Zuschärfung der schärferen Polkanten, wenn $\frac{m'(2n'-1)}{n'} = \frac{m(2n-1)}{n}$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$, woraus sich ergiebt, dass $m' < m$ und $n' > n$ sein muss;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $\frac{m'(2-n')}{n'} = \frac{m(2-n)}{n}$, und $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$, woraus zugleich folgt, dass $m' > m$, und $n' > n$ sein muss;
4. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$, und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} < \frac{m(2n-1)}{n}$, woraus folgt, dass $m' < m$ sein muss, während n' und n verschiedene Verhältnisse haben können; sind die Combinationskanten horizontal, so ist $n' = n$, und sind sie parallel den Mittelkanten, so ist $\frac{m'(2-n')}{n'} = \frac{m(2-n)}{n}$;

5. eine **Zuschärfung der Mittelecke**, die Zuschärfungsflächen auf die **stumpferen** Polkanten gesetzt, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$, und $\frac{m'(2-n')}{n'} < \frac{m(2-n)}{n}$; sind die heteropolaren Combinationskanten horizontal, so ist $n' = n$, und sind sie parallel den schärferen Polkanten, so ist $\frac{m'(2n'-1)}{n'} = \frac{m(2n-1)}{n}$;

6. eine **Zuschärfung der Mittelecke**, die Zuschärfungsflächen auf die schärferen Polkanten aufgesetzt, wenn $\frac{m'(2n'-1)}{n'} > \frac{m(2n-1)}{n}$, und $\frac{m'(2-n')}{n'} > \frac{m(2-n)}{n}$; sind die heteropolaren Combinationskanten parallel den stumpferen Polkanten, so ist $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$;

II. Bei **antiloger** Stellung bildet $\mp\frac{m'Pn'}{2}$ an $\pm\frac{mPn}{2}$:

7. eine Zuschärfung der **schärferen Polkanten**, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(2n-1)}{n}$, und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$;

8. eine **sechsflächige** Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(2n-1)}{n}$, und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$;

9. eine Zuschärfung der Mittelecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(2n-1)}{n}$; sind die heteropolaren Combinationskanten parallel den stumpferen Polkanten von $\frac{mPn}{2}$, so ist $\frac{m'(2n'-1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$.

§. 139. Theorie der rhomboëdrischen Combinationen bei Anwendung der secundären Bezeichnung.

Wollen wir die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate in die Zeichensprache der **secundären** Ableitung übersetzen, so haben wir, weil allgemein dem Zeichen mRn das Zeichen $mnP\frac{2n}{n+1}$ entspricht, durchgängig mn und $m'n'$ statt m und m', so wie $\frac{2n}{n+1}$ und $\frac{2n'}{n'+1}$ statt n und n' zu setzen; dann erhalten wir für die Combinationen zweier Skalenoëder mRn und $m'Rn'$ folgende Bedingungen:

bei gleicher oder analoger Stellung beider Formen ist

$\alpha' >=< \alpha$, wenn $m'(3n'+1) <=> m(3n+1)$,
$\beta' >=< \beta$, wenn $m'(3n'-1) <=> m(3n-1)$,
$\gamma' >=< \gamma$, wenn $m' >=< m$;

bei verwendeter oder antiloger Stellung beider Formen ist

$\alpha' >=< \beta$, wenn $m'(3n'+1) <=> m(3n-1)$,
$\beta' >=< \alpha$, wenn $m'(3n'-1) <=> m(3n+1)$.

Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Regeln:

I. Bei analoger Stellung bildet $m'Rn'$ an mRn:

1. eine Zuschärfung der stumpferen Polkanten, wenn $m'(3n'+1) = m(3n+1)$, $m' > m$, und $n' < n$:
2. eine Zuschärfung der schärferen Polkanten, wenn $m'(3n'-1) = m(3n-1)$, $m' < m$, und $n' > n$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $m' = m$ und $n' > n$;
4. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m'(3n'+1) < m(3n+1)$, und $m'(3n'-1) < m(3n-1)$, also auch $m'n' < mn$; sind dabei die Combinationskanten horizontal, so ist $n' = n$, sind sie parallel den Mittelkanten von mRn, so ist $m' = m$;
5. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen auf die stumpferen Polkanten und die Mittelkanten aufgesetzt, wenn $m'(3n'+1) > m(3n+1)$, und $m' > m$; sind dabei die heteropolaren Combinationskanten horizontal, so ist $n' = n$, sind sie parallel den schärferen Polkanten von mRn, so ist $m'(3n'-1) = m(3n-1)$;
6. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen auf die schärferen Polkanten und die Mittelkanten aufgesetzt, wenn $m'(3n'-1) > m(3n-1)$, und $m' < m$, also $n' > n$; sind dabei die Combinationskanten den stumpferen Polkanten von mRn parallel, so ist $m'(3n'+1) = m(3n+1)$.

II. Bei antiloger Stellung bildet $\mp m'Rn'$ an $\pm mRn$:

7. eine Zuschärfung der schärferen Polkanten, wenn $m'(3n'+1) = m(3n-1)$;
8. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m'(3n'+1) < m(3n-1)$;
9. eine Zuschärfung der Mittelecke, wenn $m'(3n'+1) > m(3n-1)$, und zwar sind die Combinationskanten den stumpferen Polkanten von mRn parallel, wenn $m'(3n'-1) = m(3n+1)$.

§. 140. Combinationen eines vorherrschenden Skalenoëders mRn.

Da rhomboëdrische Combinationen überhaupt sehr häufig vorkommen, und da der Calcit oder Kalkspath, diese so verbreitete Species des Mineralreiches, durch eine ganz ausserordentliche Manchfaltigkeit der Combinationen ausgezeichnet ist, so wollen wir die aufgefundenen allgemeinen Regeln aus-

nahmsweise für die Combinationen der drei wichtigsten Arten von Formen, nämlich der Skalenoëder, der Rhomboëder und der Deuteropyramiden in besondere Anwendung bringen.

Combinationen eines vorherrschenden Skalenoëders mRn;

1. Mit einem untergeordneten Skalenoëder $m'Rn'$; diese Form bildet die im vorhergehenden Paragraphen aufgeführten Modificationen.
2. Mit einem untergeordneten Rhomboëder $m'R$; ein solches bildet
   A. Bei gleicher Stellung, welche daran erkannt wird, dass seine Flächen auf die stumpferen Polkanten von mRn aufgesetzt sind,
   a. eine Abstumpfung dieser Polkanten, wenn $m' = \frac{1}{2}m(3n+1)$,
   b. eine dreiflächige Zuspitzung der Polecke, . . . $<$ . . . . . .
   c. eine Abstumpfung der Mittelecke, . . . $>$ . . . . . .

Im Falle b erscheinen die Zuspitzungsflächen als Rhomben, wenn $m' = m$, und im Falle c sind die Combinationskanten den schärferen Polkanten von mRn parallel, wenn $m' = \frac{1}{4}m(3n-1)$.

   B. Bei verwendeter Stellung, welche daran erkannt wird, dass die Flächen des Rhomboëders auf die schärferen Polkanten des Skalenoëders aufgesetzt sind,
   a. eine Abstumpfung dieser Polkanten, wenn $m'=\frac{1}{2}m(3n-1)$
   b. eine dreiflächige Zuspitzung der Polecke . . . $<$ . . . . . .
   c. eine Abstumpfung der Mittelecke, . . . $>$ . . . . . .

Im Falle c sind die Combinationskanten den stumpferen Polkanten des Skalenoëders parallel, wenn $m'=\frac{1}{4}m(3n+1)$.

3. Mit einer untergeordneten Deuteropyramide $m'P2$; die Flächen dieser Pyramide liegen immer paarweise an den schärferen Polkanten des Skalenoëders, und bilden:
   a. eine Zuschärfung dieser Polkanten, wenn $m'=\frac{1}{2}m(3n-1)$,
   b. eine sechsfl. Zuspitzung der Polecke, ... $<$ . . . . .
   c. eine Zuschärfung der Mittelecke, ... $>$ . . . . .
4. Mit einem untergeordneten dihexagonalen Prisma $\infty Rn'$; die Flächen desselben sind auf die Mittelkanten des Skalenoëders aufgesetzt, und bilden Zuschärfungen der Mittelecke mit verticalen Zuschärfungskanten; die heteropolaren Combinationskanten werden horizontal, wenn $n' = n$.
5. Das Protoprisma ∞R bildet eine Abstumpfung der Mittelecke,
6. Das Deuteroprisma $\infty P2$ bildet eine Abstumpfung der Mittelkanten,
7. Das Pinakoid $0R$ bildet eine Abstumpfung der Polecke.

§. 141. Combinationen eines vorherrschenden Rhomboëders mR.

1. Mit einem untergeordneten Skalenoëder $m'Rn'$;
   A. Bei gleicher Stellung, welche daran erkannt wird, dass die schärferen Polkanten des Skalenoëders über die Polkanten des Rhomboëders fallen, bilden die Flächen desselben ·

a. eine Zuschärfung der Polkanten, wenn $m' < m$, und $\frac{1}{4}m'(3n'-1) = m$,
b. eine sechsfl. Zuspitzung der Polecke . . . . $< m$,
c. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsfl. auf die Polk. gesetzt, ... $> m$,
d. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $m' = m$,
e. eine Zuschärfung der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen auf die Mittelk. und geneigten Diagonalen aufgesetzt, wenn $m' > m$.

Im Falle c werden die Combinationskanten den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen parallel, wenn $\frac{1}{4}m'(3n'+1) = m$ ist.

B. Bei verwendeter Stellung, welche daran erkannt wird, dass die stumpferen Polkanten des Skalenoëders über die Polkanten des Rhomboëders fallen, bilden die Flächen von $-m'Rn'$

a. eine Zuschärfung der Polkanten, wenn $\frac{1}{2}m'(3n'+1) = m$,
b. eine sechsfl. Zuspitzung der Polecke, ... $< m$,
c. eine Zuschärfung der Mittelecke, ... $> m$.

Im letzteren Falle werden die Combinationskanten den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen parallel, wenn $\frac{1}{4}m'(3n'-1) = m$.

2. Mit einem untergeordneten zweiten Rhomboëder $m'R$.

A. Bei gleicher Stellung sind die Flächen von $m'R$ auf die Flächen von mR mit horizontalen Combinationskanten aufgesetzt, und bilden

a. eine dreifl. Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$,
b. eine Abstumpfung der Mittelecke . . . . . $> m$.

B. Bei verwendeter Stellung sind die Flächen von $-m'R$ auf die Polkanten von mR aufgesetzt und bilden

a. eine Abstumpfung der Polkanten, wenn $m' = \frac{1}{2}m$,
b. eine dreifl. Zuspitzung der Polecke, ... $<$ . .,
c. eine Abstumpfung der Mittelecke, ... $>$ . .

Im letzteren Falle werden die heteropolaren Combinationskanten den geneigten Diagonalen der Flächen von mR parallel, wenn $m' = 2m$.

3. Mit einer untergeordneten Deuteropyramide $mP2$; die Flächen derselben sind immer paarweise auf die Polkanten des Rhomboëders aufgesetzt, und bilden

a. eine Zuschärfung der Polkanten, wenn $m' = \frac{2}{3}m$,
b. eine sechsfl. Zuspitzung der Polecke, ... $<$ . .,
c. eine Zuschärfung der Mittelecke, ... $>$ . . .

Im letzteren Falle werden die heteropolaren Combinationskanten den geneigten Diagonalen der Flächen von mR parallel, wenn $m' = \frac{4}{3}m$.

4. Jedes dihexagonale Prisma ∞Rn bildet eine Zuschärfung der Mittelecke, bei welcher die Zuschärfungsflächen auf die Mittelkanten aufgesetzt und die Zuschärfungskanten vertical sind.

5. Das Protoprisma ∞R bildet eine verticale Abstumpfung der Mittelecke.

6. Das Deuteroprisma $\infty P2$ bildet eine Abstumpfung der Mittelkanten.

7. Das Pinakoid $0R$ bildet eine Abstumpfung der Polecke.

§. 142. Combinationen einer vorherrschenden Deuteropyramide $mP2$.

Die Ambiguität der Stellung der Skalenoëder und Rhomboëder ist ohne Einfluss, weil die Deuteropyramiden in den rhomboëdrischen Krystallreihen vollständig ausgebildet sind; die Combinationen sind folgende:

1. Mit einem Skalenoëder $m'Rn'$; die Flächen dieser Form liegen immer paarweise an den abwechselnden Polkanten der Deuteropyramide, und bilden
   a. eine Zuschärfung dieser Polkanten, wenn $\frac{1}{4}m'(3n'+1) = m$,
   b. eine sechsfl. Zuspitzung der Polecke, ... $<$ . .
   c. eine Zuschärfung der Mittelecke, ... $>$ . .

Im Falle c werden die heteropolaren Combinationskanten parallel den übrigen Polkanten der Pyramide, wenn $\frac{1}{2}m'(3n'-1) = m$, dagegen parallel den Höhenlinien der Pyramidenflächen, wenn $m'n' = m$.

2. Mit einem Rhomboëder $m'R$; die Flächen des Rhomboëders sind immer auf die abwechselnden Polkanten der Deuteropyramide aufgesetzt, und bilden
   a. eine Abstumpfung dieser Polkanten, wenn $m' = \frac{1}{4}m$,
   b. eine dreifl. Zuspitzung der Polecke, ... $<$ . .
   c. eine Abstumpfung der Mittelecke, ... $>$ . .

Im letzteren Falle sind die heteropolaren Combinationskanten entweder den übrigen Polkanten, oder den Höhenlinien der Pyramidenflächen parallel, je nachdem $m' = \frac{3}{2}m$, oder $= m$ ist.

3. Mit einer zweiten Deuteropyramide $m'P2$: dieselbe bildet
   a. eine sechsflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$,
   b. eine Zuschärfung der Mittelkanten, ... $>$ . . .
4. Mit einem dihexagonalen Prisma ∞Pn; sie bildet verticale Zuschärfungen der Mittelecke, die Zuschärfungsflächen auf die Mittelkanten aufgesetzt.
5. Das Protoprisma ∞R bildet verticale Abstumpfungen der Mittelecke.
6. Das Deuteroprisma $\infty P2$ bildet verticale Abstumpfungen der Mittelkanten.
7. Das Pinakoid $0R$ bildet Abstumpfungen der Polecke.

Mittels dieser, in den §§. 140 bis 142 enthaltenen Regeln, und mittels der in den §§. 147 bis 150 folgenden Zonenlehre wird man die meisten rhomboëdrischen Combinationen zu entwickeln vermögen, soweit deren Entwickelung überhaupt von Messungen unabhängig ist.

Sechstes Capitel.

Zonenlehre des Hexagonalsystems.

§. 143. Allgemeine Bemerkung.

Wenn uns im Hexagonalsysteme irgend eine Zone durch zwei Flächen F' und F'' gegeben ist, so können in Bezug auf die relative Lage dieser Flächen folgende zwei Fälle Statt finden:

1. die beiden Flächen liegen über einem und demselben Sextanten, oder auch über zwei Gegensextanten der Basis;
2. die beiden Flächen liegen über zwei Nebensextanten oder auch über zwei Nachbarsextanten der Basis.

Im ersten Falle können wir uns den Sextanten, oder die beiden Sextanten, in welchen die Flächen liegen, zwischen den Axen der y und z eingeschlossen denken, demgemäss beide Flächen auf diese Axen beziehen, und die Zonengleichung aus ihren Parametern unmittelbar ableiten.

Im zweiten Falle, da die Flächen in Nebensextanten oder Nachbarsextanten liegen, werden wir immer den einen Sextanten als den der y und z betrachten können, worauf denn der Nebensextant entweder von den Halbaxen der z und u, oder von den Halbaxen der y und $-u$, der Nachbarsextant dagegen entweder von den Halbaxen der $-y$ und u, oder von den Halbaxen der $-z$ und $-u$ eingeschlossen sein wird. In allen diesen Fällen wird zuvörderst die repräsentative Gleichung derjenigen Fläche, welche, vermöge ihrer Lage, von der Axe der u abhängig ist, nach §. 114 calculativ zu machen sein, bevor man zur Bestimmung der Zonengleichung und zur Entwickelung der Zone verschreiten kann, bei welcher zunächst immer das subsidiarisch eingeführte trimetrische Axensystem der x, y und z festzuhalten ist. Da nun aber die Resultate dieser Entwickelung wiederum in einer der Ableitung und Bezeichnung entsprechenden Weise, und folglich in Bezug auf das tetrametrische Axensystem dargestellt werden müssen, so werden die für irgend eine tautozonale Fläche in den Axen der y und z gefundenen Parameter nur dann ohne weiteres auch als die gesuchten repräsentativen Parameter gelten können, wenn sie beide entweder positiv, oder beide negativ sind, und wenn keiner derselben > 2 ist. Sind aber diese Parameter mit entgegengesetzten Vorzeichen gefunden worden, oder ist einer derselben > 2, so muss derjenige Parameter, welcher > 2, oder überhaupt, welcher grösser als der andere ist, mit einem in die Axe der u fallenden Parameter vertauscht werden, um die betreffende Fläche nach ihrem wahren krystallographischen Zeichen darstellen zu können.

Auch die Bestimmung der Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Flächen kann natürlich zunächst nur in Bezug auf das subsidiarisch eingeführte trimetrische Axensystem gegeben werden. Will man daher für je zwei tautozonale Flächen F und F' von der sogleich mitzutheilenden Formel für tang$W$ Gebrauch machen, so ist ihre Lage sorgfältig zu berücksichtigen, und für den Fall, dass eine derselben von der Axe der u abhängig sein sollte, ihre Gleichung nach §. 114 zu transformiren, um statt ihres repräsentativen Parameters in der Axe der u, ihren calculativen, in der Axe der y oder z gelegenen Parameter zu finden, mit welchem allein die Rechnung bequem ausgeführt werden kann.

Jedenfalls aber müssen wir den allgemeinen Ausdruck von tang$W$ in derjenigen Form aufsuchen, welche ihm für das Hexagonalsystem, unter Voraussetzung des calculativen trimetrischen Axensystems, zukommt. Zu dem Ende gehen wir von dem in §. 42 (S. 56) mitgetheilten Ausdrucke von tang$W$

aus, welcher sich so, wie er dort steht, auf ein triklinoëdrisches Axensystem bezieht, und setzen darin

$$A = 60^\circ,\ B = 90^\circ,\ C = 90^\circ,$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma = 90^\circ,$$

aus welchen Winkeln folgt, dass die in diesem Ausdrucke vorkommenden Grössen A', B' und C' die Werthe

$$A' = \tfrac{1}{4},\ B' = 0,\ C' = 0$$

haben. Führen wir diese Werthe ein, so wird

$$\text{tang} W = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{M^2+N^2+R^2+NR}}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

worin M, N und R die Coëfficienten der Zonengleichung bedeuten, welche durch $k\mu$, $k\nu$ und $k\varrho$ ersetzt werden können, daher sich denn auch

$$\text{tang} W = \frac{2k\sqrt{3}\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2+\nu\varrho}}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

schreiben lässt, wobei für k einer der drei Werthe $\frac{M}{\mu}$, $\frac{N}{\nu}$ oder $\frac{R}{\varrho}$ zu benutzen ist.

Anm. Die **Rationalität** des Verhältnisses der Tangenten tautozonaler Kanten wird nach S. 57 nur dann gewährleistet sein, wenn das Product bc einen rationalen Werth hat. Diess ist aber immer der Fall, weil die in den Nebenaxen liegenden beiden Grundparameter b und c einander gleich sind. Folglich müssen auch im Hexagonalsysteme die Tangenten aller Kanten einer und derselben Zone zu einander in rationalen Verhältnissen stehen.

Wir schreiten nun zur Betrachtung der wichtigsten von denjenigen Zonen, welche in den **holoëdrischen** Combinationen hervorzutreten pflegen, um dann noch den Zonen der Skalenoëder unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden, welche bei der Häufigkeit der **rhomboëdrischen** Combinationen nicht übergangen werden können. Dabei versteht es sich jedoch von selbst, dass alle diese Zonen mehr oder weniger eine ganz allgemeine Geltung haben, und völlig unabhängig von der besonderen Ausbildungsweise des Krystallsystems sind.

A. Wichtigste Zonen in den holoëdrischen Combinationen.

§. 144. Zonen der Axen.

Die wichtigsten Zonen des Hexagonalsystems sind dieselben, welche wir in §. 106 für das Tetragonalsystem kennen gelernt haben, also

a. die Hauptaxenzone,
b. die drei Nebenaxenzonen,
c. die drei Zwischenaxenzonen,
d. die sechs Polkantenzonen einer Protopyramide mP, und
e. die sechs Diagonalzonen einer solchen Pyramide.

Alle diese und noch viele andere Zonen lassen sich als besondere Fälle der Kantenzonen irgend einer dihexagonalen Pyramide betrachten, durch

deren Erörterung daher die Zonenlehre in der grössten Allgemeinheit zu begründen sein würde. An gegenwärtigem Orte beschränken wir uns jedoch auf die Betrachtung der fünf genannten besonderen Zonen.

a. Die Hauptaxenzone ist diejenige einzige Zone, deren Flächen der Hauptaxe parallel sind; sie begreift demnach sämmtliche Prismen, oder alle ∞P*n*, nebst ∞P und ∞P2, durch deren Flächen sie in horizontaler Richtung um das Axensystem verfolgt werden kann, weshalb sie auch die horizontale Zone genannt wird.

Da die Hauptaxe die Zonenlinie darstellt, so werden die Gleichungen der letzteren
$$y=0, \text{ und } z=0,$$
woraus sich denn ergiebt, dass in den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47) $\mu=\infty$, $\nu=0$ und $\varrho=0$ zu setzen ist. Da nun auch zugleich a und a' unendlich gross sind, so erhält die Tangente des Neigungswinkels zweier tautozonaler Flächen F und F' den Werth
$$\tang W=\frac{(bc'-b'c)\sqrt{3}}{2bb'+2cc'-bc'-b'c}$$
in welchen man nur die den Flächen entsprechenden (calculativen) Werthe der Parameter b, c, b' und c' einzusetzen braucht, um den gesuchten Neigungswinkel zu finden.

b. Die Nebenaxenzonen sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer der Nebenaxen parallel sind, weshalb es denn drei dergleichen Zonen giebt, welche man auch die verticalen Zonen des ersten Prismas genannt hat, weil sie in verticaler Richtung über die Flächen des Protoprismas verfolgt werden können. Nehmen wir an, die Axe der u sei die Zonenlinie, wodurch wir den Vortheil gewinnen, mit unserer Betrachtung innerhalb des Sextanten (yz) zu verbleiben, so werden die Gleichungen dieser Zonenlinie
$$x=0, \text{ und } y+z=0.$$
Vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen (S. 47), so ergiebt sich, dass $\mu=0$ und $\varrho=-\nu$ sein muss, woraus denn die Zonengleichung
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0, \text{ oder } b=c$$
folgt. Da wir nun nach §. 116, bei Gleichheit der beiden Parameter b und c, stets voraussetzen, dass sie den Werth 1 haben, so werden auch nur solche Formen, welche unter dem allgemeinen Zeichen *m*P enthalten sind, Flächen in die Zone liefern können; also die sämmtlichen Protopyramiden, das Pinakoid und das Protoprisma, überhaupt alle Formen der Grundreihe, wie diess auch unmittelbar aus der Lage ihrer Flächen gefolgert werden kann.

Um die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen zu finden, haben wir in dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ (S. 235) die Werthe von μ, ν, ϱ, so wie statt k den Werth $\frac{N}{\nu}$ einzusetzen, wodurch zunächst
$$\tang W=\frac{2bb'(ca'-c'a)\sqrt{3}}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

erhalten wird. Da nun aber für sämmtliche Flächen der Zone die Bedingung $b=c=1$ gilt, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\tang W = \frac{2(a'-a)\sqrt{3}}{4aa'+3} = \frac{2(m'-m)\sqrt{3}}{4mm'\mathrm{a}^2+3}$$

welche Werthe unter Berücksichtigung der Vorzeichen von a und a', oder m und m' zu benutzen sind.

c. Die Zwischenaxenzonen sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer der Zwischenaxen parallel sind, weshalb es denn drei solcher Zonen giebt, welche man auch die verticalen Zonen des zweiten Prismas genannt hat, weil sie sich in verticaler Richtung über die Flächen des Deuteroprismas verfolgen lassen. Wählen wir die im Sextanten (uz) liegende Zwischenaxe zur Zonenlinie, so werden die Gleichungen derselben

$$x=0, \text{ und } u-z=0, \text{ oder, nach §. 114,}$$

$$x=0, \text{ und } y+\frac{z}{2}=0$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen (S. 47), so ergiebt sich, dass $\mu=0$, und $\varrho=-2\nu$ sein muss, woraus denn die Zonengleichung

$$\frac{1}{b}-\frac{2}{c}=0, \text{ oder } c=2b$$

folgt. Da nun b, als der kleinste Parameter, den Werth 1 hat, so folgt, dass der andere Parameter den Maximumwerth 2 haben muss, und dass also der Zone nur solche Formen tributär werden können, welche unter dem allgemeinen Zeichen mP2 enthalten sind; also sämmtliche Deuteropyramiden, das Deuteroprisma und das Pinakoid, überhaupt alle Formen der Gränzreihe, wie solches unmittelbar aus der Lage ihrer Flächen erschlossen werden kann.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen folgt aus dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ (S. 235), wenn wir in selbigem die vorstehenden Werthe von μ, ν und ϱ, so wie statt k den Werth $\frac{N}{\nu}$ setzen, zuvörderst in der Form

$$\tang W = \frac{6bb'(ca'-c'a)}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

welche sich jedoch deshalb, weil für sämmtliche tautozonale Flächen $b=1$ und $c=2$ ist, auf den Ausdruck

$$\tang W = \frac{a'-a}{aa'+1} = \frac{(m'-m)\mathrm{a}}{mm'\mathrm{a}^2+1}$$

reducirt, in welchem nur die den beiden Flächen F und F' zukommenden Werthe und Vorzeichen von m und m' einzusetzen sind, um den Winkel zu erhalten.

§. 145. Polkantenzone der Pyramide mP.

Die Polkantenzonen der Protopyramide mP sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer Polkante dieser Pyramide parallel liegen; da nun je zwei sol-

cher Kanten einander parallel sind, so giebt es überhaupt sechs dergleichen Zonen. Wählen wir diejenige Polkante, welche die positiven Halbaxen der x und z verbindet, zur Zonenlinie, so werden die Gleichungen der letzteren

$$y=0, \text{ und } \frac{x}{ma}+z=0,$$

und vergleichen wir diese Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47), so folgt, dass

$$\mu=ma,\ \nu=0,\ \varrho=-1$$

sein muss, woraus sich denn die Zonengleichung

$$\frac{ma}{a}-\frac{1}{c}=0, \text{ oder } mac=a, \text{ oder auch } mc=m'$$

ergiebt, weil jede andere Form unter dem Zeichen m'Pn gedacht werden kann. Nun kann c, oder der in der Axe der z liegende Parameter, entweder $=1$, oder $=n$ sein, wobei b, oder der in der Axe der y liegende Parameter, im ersten Falle $=n$, im zweiten Falle $=1$ ist. Daher werden allgemein diejenigen Formen, welche Flächen in die Zone zu liefern vermögen, entweder unter dem Zeichen mPn, oder unter dem Zeichen mnPn stehen müssen, in welchen m constant ist, n dagegen mit verschiedenen Werthen, und zwar in dem Zeichen mPn mit allen Werthen von 1 bis 2, in dem Zeichen mnPn mit allen Werthen von 1 bis ∞ auftreten kann. Sonach werden also für $c=1$ und $b=n$ die Formen mP2, mPn und mP, für $b=1$ und $c=n$ zunächst die Formen mP, mnPn und 2mP2 Flächen in die Zone liefern können. Im letzteren Falle kann aber n auch >2 werden, und dann sind die Flächen auf die Halbaxe der $-u$ zu beziehen, in welcher ihnen der Parameter $\frac{n}{n-1}$ zukommt; folglich gesellen sich zu den vorigen auch noch Formen von dem Zeichen mnP$\frac{n}{n-1}$, welchem für $n=\infty$ das Prisma ∞P entspricht.

Ueberhaupt also erhalten wir das Resultat, dass

1. die Deuteropyramide mP2,
2. die dihexagonalen Pyramiden mPn,
3. die Protopyramide mP selbst,
4. die dihexagonalen Pyramiden mnPn, mit $n<2$,
5. die Deuteropyramide 2mP2,
6. die dihexagonalen Pyramiden mnP$\frac{n}{n-1}$, mit $n>2$, und
7. das Protoprisma ∞P

diejenigen Formen sind, welche in die Polkantenzone der Pyramide mP Flächen zu liefern vermögen; womit denn die allgemeine Entwickelung der Zone vollendet ist, welche weiterhin, d. h. jenseits der Fläche des Prismas ∞P, denselben Cyclus von Formen in umgekehrter Ordnung durchläuft.

Anm. Da für die Polkantenzone der Grundform $m=1$ ist, so werden P2, Pn, P, mPm mit $m>1$ aber <2, 2P2, mP$\frac{m}{m-1}$ mit $m>2$, und ∞P diejenigen Formen, welche Flächen in diese Zone liefern können. Be-

kanntlich erlangt diese Zone besonders in der Krystallreihe des Quarzes eine sehr reichhaltige Entwickelung.

Um die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen F und F' zu finden, dazu haben wir zuvörderst in dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ (S. 235) die oben stehenden Werthe von μ, ν und ϱ, auch für k den Werth $\frac{R}{\varrho}$ zu setzen, wodurch

$$\text{tang}W = \frac{2cc'(a'b-ab')\sqrt{3}\sqrt{m^2\text{a}^2+1}}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

wird. Da aber für sämmtliche Flächen dieser Zone auch die Bedingung $a=mac$, $a'=mac'$ erfüllt sein muss, so reducirt sich der Ausdruck durch Substitution dieser Werthe von a und a' auf

$$\text{tang}W = \frac{2(bc'-b'c)m\text{a}\sqrt{3}\sqrt{m^2\text{a}^2+1}}{2m^2\text{a}^2(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'}$$

Bei dem Gebrauche dieser Formel ist zu beachten, dass für jede, einer Form $mnP\frac{n}{n-1}$ angehörige Fläche c nicht $=\frac{n}{n-1}$, sondern $=n$ gesetzt werden muss, weil sich jener Parameter auf die Axe der u bezieht, und daher mit dem aequivalenten, in der Axe der z liegenden Parameter zu vertauschen ist.

Anm. Für die Polkantenzone der Grundform ist $m=1$; will man nun den Winkel W bestimmen, welchen irgend eine Fläche dieser Zone mit dem durch die Zonenlinie gehenden primären Hauptschnitte, oder, was dasselbe ist, mit der zu der Zone gehörigen Fläche des Prismas ∞P bildet, so braucht man nur $b'=1$, und $c'=\infty$ zu setzen; dann wird

$$\text{tang}W = \frac{b\sqrt{3}\sqrt{\text{a}^2+1}}{\text{a}(2c-b)}\;.$$

Diess giebt z. B. für die so häufigen Flächen von $mP\frac{m}{m-1}$, indem man $b=1$, und $c=m$ setzt

$$\text{tang}W = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\text{a}^2+1}}{\text{a}(2m-1)}.$$

Für den Qarz ist $\text{a}=1,1$, also $\text{a}^2=1,21$, daher

$$\text{tang}W = -\frac{2,34}{2m-1}$$

wonach sich der Winkel leicht berechnen lässt, den irgend eine der sogenannten Trapezflächen mit der anliegenden Fläche des Prismas ∞P bildet.

§. 146. Diagonalzonen der Pyramide mP.

Die Diagonalzonen der Protopyramide mP sind diejenigen Zonen, deren Flächen den Höhenlinien oder Diagonalen der Flächen dieser Pyramide parallel liegen. Wählen wir die Diagonale derjenigen Fläche, welche in den Sextanten der positiven y und z fällt, und die Gleichung

$$\frac{x}{ma} + y + z = 1$$

hat, so werden die Gleichungen der Zonenlinie

$$y - z = 0, \text{ und } \frac{x}{2ma} + y = 0,$$

und vergleichen wir diese Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie, so ergiebt sich, dass

$$\mu = 2ma, \ \nu = -1, \ \varrho = -1$$

sein muss, woraus die Zonengleichung

$$\frac{2ma}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

folgt. Da nun jede andere Form unter dem allgemeinen Zeichen $m'Pn$ dargestellt werden kann, welchem das Parameter-Verhältniss $m'a : n : 1$ entspricht, so ist in dieser Gleichung $a = m'a$, sowie entweder $b = 1$ und $c = n$, oder auch umgekehrt $b = n$ und $c = 1$ zu setzen, wodurch sie jedenfalls

$$\frac{2m}{m'} - \frac{1}{n} - 1 = 0$$

wird, und nun für alle diejenigen Flächen unmittelbare Giltigkeit hat, welche gleichfalls im Sextanten der $+y$ und $+z$ liegen; alle diese Flächen gehören daher solchen Formen an, deren Zeichen allgemein

$$m'P\frac{m'}{2m-m'}, \text{ oder } \frac{2mn}{n+1}Pn$$

geschrieben werden kann, und welche eine Formenreihe bilden, die mit mP beginnt, und mit $\frac{4}{3}mP2$ endigt, weil alle Werthe von n zwischen 1 und 2 enthalten sein müssen.

Für die im Sextanten der $+z$ und $+u$ liegenden Flächen wird zunächst $b = \frac{n}{n-1}$, und $c = 1$ zu setzen sein, wodurch die Zonengleichung die Form

$$\frac{2m}{m'} - \frac{2n-1}{n} = 0$$

erhält, welcher das allgemeine Zeichen

$$m'P\frac{m'}{2(m'-m)}, \text{ oder } \frac{2mn}{2n-1}Pn$$

entspricht, das uns auf eine Formenreihe verweist, die mit $\frac{4}{3}mP2$ beginnt, und mit $2mP$ endigt, weil die Werthe von n zwischen 2 und 1 enthalten sein müssen.

Jenseits der Fläche der Pyramide $2mP$ ist für die fernerweit folgenden Flächen der Zone $b = -\frac{n}{n-1}$, und $c=n$ zu setzen, was die Zonengleichung

$$\frac{2m}{m'} + \frac{n-2}{n} = 0$$

und das allgemeine Zeichen

$$m'P\frac{2m'}{2m+m'}, \text{ oder } \frac{2mn}{2-n}Pn$$

ergiebt, welches uns auf eine Formenreihe verweist, die mit $2m$P beginnt, und mit ∞P2 endigt, weil die Werthe von n zwischen den Gränzen 1 und 2 liegen.

Hiermit ist die Entwickelung der Zone erschöpft, welche jenseits der Fläche des Deuteroprismas durch dieselben Formen in umgekehrter Reihenfolge fortsetzt. Ueberhaupt aber lehrt uns diese Entwickelung, dass diejenigen Flächen, welche in die Diagonalzone einer Protopyramide mP fallen, successiv folgenden Formen angehören:

1. der Protopyramide mP selbst,
2. den dihexagonalen Pyramiden $\frac{2mn}{n+1}$Pn,
3. der Deuteropyramide $\frac{4}{3}m$P2,
4. den dihexagonalen Pyramiden $\frac{2mn}{2n-1}$Pn,
5. der Protopyramide $2m$P,
6. den dihexagonalen Pyramiden $\frac{2mn}{2-n}$Pn, und
7. dem Deuteroprisma ∞P2.

Anm. Mit dieser Zone ist auch zugleich die Polkantenzone der Pyramide mP2 bestimmt worden, weil die Polkante einer jeden Deuteropyramide stets dieselbe Lage hat, wie die Höhenlinie oder Diagonale einer Protopyramide von $\frac{3}{4}$ so grosser Axe. Man braucht daher nur in allen vorstehenden Resultaten statt m die Grösse $\frac{3}{4}m$ einzusetzen, um die Entwickelung der Polkantenzone von mP2 zu erhalten.

Die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen findet sich aus dem allgemeinen Ausdrucke von tang$W$ (S. 235), durch Substitution der oben stehenden Werthe von μ, ν und ϱ und des Werthes $\frac{N}{\nu}$ oder $\frac{R}{\varrho}$,

$$\tang W = \frac{2bb'(c'a-ca')\sqrt{3}\sqrt{4m^2a^2+3}}{2aa'(2bb'+2cc'-bc'-b'c)+3bb'cc'}$$

welche Formel noch einiger Vereinfachung fähig ist, jedenfalls aber ihrem Zwecke entspricht, sobald man nur auf die verschiedenen Werthe von b, c, b' und c', sowie auf die Vorzeichen derselben achtet, wie solche durch die Lage der beiden Flächen in diesem oder jenem Sextanten bedingt werden.

B. Wichtigste Zonen in den rhomboëdrischen Combinationen.

§. 147. Kantenzonen der Skalenoëder; Zonen der längeren Polkanten von $\frac{mPn}{2}$.

Bei der Wichtigkeit der rhomboëdrischen Combinationen gewinnen auch die durch sie bedingten Zonen eine grössere Bedeutung. Als die wichtigsten

derselben stellen sich aber die dreierlei Kantenzonen der Skalenoëder heraus, welche zugleich viele andere Zonen in sich begreifen, und bisweilen eine recht reichhaltige Ausbildung zeigen. Wollen wir nun diese Zonen in ihrer ganzen Vollständigkeit erfassen, so ist es rathsam, bei ihrer Betrachtung zuvörderst die primitive Ableitung und Bezeichnung der Skalenoëder zu Grunde zu legen, und dann die so gefundenen Resultate für die secundäre Bezeichnung einzurichten.

Wir denken uns also ein Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$, und stellen uns die Aufgabe, die Zonen seiner dreierlei Kanten, nämlich der längeren Polkanten, der kürzeren Polkanten und der Mittelkanten zu entwickeln.

Zonen der längeren Polkanten. Wählen wir die im Sextanten (yz) gelegene Polkante zur Zonenlinie, so werden die Gleichungen derselben

$$y - z = 0, \text{ und } \frac{nx}{ma(n+1)} + y = 0;$$

vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie, so folgt, dass

$$\mu = \frac{ma(n+1)}{n}, \ \nu = -1, \ \varrho = -1$$

zu setzen ist, daher sich denn die Zonengleichung in der Form

$$\frac{ma(n+1)}{na} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

herausstellt. Da nun jede Fläche der Zone allgemein auf eine Form $m'Pn'$ bezogen werden kann, so wird jedenfalls $a = m'a$ zu nehmen sein, während b und c mit verschiedenen Werthen einzuführen sind.

1. Für alle in den Sextanten (yz) fallende Flächen nämlich kann allgemein entweder $b = 1$ und $c = n'$, oder $b = n'$ und $c = 1$ sein; für sie gilt daher die Zonengleichung
$$\frac{m(n+1)}{m'n} - 1 - \frac{1}{n'} = 0, \quad \text{oder } m' = \frac{m(n+1)n'}{(n'+1)n};$$
die gesuchten Formen sind allgemein Skalenoëder von analoger Stellung; da aber auch die Gränzwerthe von n', nämlich 1 und 2, zu berücksichtigen sind, so ergiebt sich, dass

   das Rhomboëder von analoger Stellung aus $\frac{m(n+1)}{2n}P$,

   die Skalenoëder von analoger Stellung aus $\frac{m(n+1)n'}{(n'+1)n}Pn'$, und

   die Deuteropyramide $\frac{2m(n+1)}{3n}P2$

   diejenigen drei Arten von Formen sein werden, welche in den ersten Sextanten tautozonale Flächen liefern können.

2. Jenseits der Fläche der Deuteropyramide fallen die ferneren tautozonalen Flächen in den Sextanten der z und u, in welcher letzteren Halbaxe

ihr Parameter n' enthalten ist; daher wird in der Zonengleichung $c=1$, und $b=\frac{n'}{n'-1}$ zu setzen sein, wodurch sich die Ableitungszahl

$$m'=\frac{m(n+1)n'}{(2n'-1)n}$$

bestimmt. Die betreffenden Formen sind allgemein Skalenoëder von antiloger Stellung; da aber auch die Gränzwerthe $n'=2$, und $n'=1$ berücksichtigt werden müssen, so werden überhaupt

die Deuteropyramide $\frac{2m(n+1)}{3n}$P2,

die Skalenoëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(n+1)n'}{(2n'-1)n}Pn'$, und

das Rhomboëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(n+1)}{n}$P

diejenigen Formen sein, welche zunächst in dem Nebensextanten tautozonale Flächen liefern können.

3. In demselben Sextanten sind aber auch jenseits der Fläche des Rhomboëders noch andere tautozonale Flächen möglich, für welche der in die Axe der u fallende Parameter $=1$, und der in die Axe der z fallende Parameter $=n'$ ist. Für solche Flächen wird statt des ersteren Parameters der in die Halbaxe der $-y$ fallende Parameter $\frac{n'}{n'-1}$ einzuführen, und daher in der Zonengleichung

$$b'=-\frac{n'}{n'-1},\ c'=n'$$

zu setzen sein, wodurch sich die Ableitungszahl

$$m'=\frac{m(n+1)n'}{(2-n')n}$$

bestimmt. Die gesuchten Formen sind allgemein wiederum Skalenoëder von antiloger Stellung mit $\frac{m\text{P}n}{2}$; weil jedoch auch die Gränzwerthe von n' eine Berücksichtigung erfordern, so folgt, dass jenseits der Fläche

des Rhomboëders von antiloger Stellung aus $\frac{m(n+1)}{n}$P,

die Skalenoëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(n+1)n}{(2-n')n}$Pn', und

das Deuteroprisma ∞P2

diejenigen Formen sein werden, welche noch Flächen in die Zone der längeren Polkanten von $\frac{m\text{P}n}{2}$ zu liefern vermögen. Jenseits der prismatischen Fläche lässt sich die Zone durch denselben Cyclus von Formen in umgekehrter Ordnung weiter verfolgen.

Anm. Diese Zone ist natürlich keine andere, als die Zone der secundären Polkanten der Pyramide mPn, und folglich für $n=1$ die Diagonalzone der

Pyramide mP, daher denn auch die vorstehenden Resultate auf die in §. 146 gefundenen zurückkommen, wenn man in ihnen $n = 1$ setzt.

§. 148. Fortsetzung: Zonen der kürzeren Polkanten von $\frac{mPn}{2}$.

Die Entwickelung der Zone einer kürzeren Polkante des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ wird auf ganz ähnliche Weise zu geben sein. Nehmen wir an, diejenige kürzere Polkante, welche die Zonenlinie darstellt, falle in den Sextanten der positiven y und z, so wird die repräsentative Gleichung einer ihrer beiden Flächen

$$\frac{x}{ma} + y - \frac{u}{n} = 1,$$

für welche sich nach S. 188 die calculative Gleichung

$$\frac{x}{ma} + y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

ergiebt. Combiniren wir diese Gleichung mit der Gleichung $y - z = 0$, als der des ersten secundären Hauptschnitts, so erhalten wir die Gleichungen der Zonenlinie:

$$\frac{nx}{ma(2n-1)} + y = 0, \text{ und } y - z = 0.$$

Vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen S. 47, so folgt, dass

$$\mu = \frac{ma(2n-1)}{n}, \quad \nu = -1, \quad \varrho = -1$$

sein muss, weshalb sich denn die Zonengleichung in der Form

$$\frac{ma(2n-1)}{na} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

herausstellt. Da nun jede andere Form unter dem allgemeinen Zeichen $m'Pn'$ vorgestellt werden kann, so ist in dieser Gleichung jedenfalls $a = m'a$ zu setzen, während sich für b und c verschiedene Werthe geltend machen.

1. Für irgend eine in den ersten Sextanten (yz) fallende Fläche kann nämlich allgemein entweder $b = 1$ und $c = n'$, oder auch $b = n'$ und $c = 1$ sein, was in beiden Fällen dasselbe Resultat, nämlich die Zonengleichung

$$\frac{m(2n-1)}{m'n} - 1 - \frac{1}{n'} = 0,$$

oder die Ableitungszahl

$$m' = \frac{m(2n-1)n'}{(n'+1)n}$$

liefert. Die Form, welcher die Fläche angehört, wird allgemein ein Skalenoëder von antiloger Stellung mit $\frac{mPn}{2}$ sein; da jedoch auch die Gränzwerthe von n' zu berücksichtigen sind, so werden überhaupt

das Rhomboëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(2n-1)}{2n}P$,

die Skalenoëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(2n-1)n'}{(n'+1)n}Pn'$, und

die Deuteropyramide $\frac{2m(2n-1)}{3n}P2$

diejenigen Formen sein, welche im ersten Sextanten tautozonale Flächen liefern können.

2. Die weiterhin, jenseits der Pyramidenfläche folgenden Flächen, welche allgemein Skalenoëdern von analoger Stellung angehören werden, fallen einerseits in den Nebensextanten der $+y$ und $-u$, in welcher letzteren Nebenaxe anfangs ihr Parameter n' liegt, statt dessen der auf die Axe der z bezügliche Parameter einzuführen ist. Für diese Flächen ist also in der Zonengleichung

$$b' = 1,\ c = \frac{n'}{n'-1}$$

zu setzen, wodurch sich die Ableitungszahl

$$m' = \frac{m(2n-1)n'}{(2n'-1)n}$$

ergiebt; daher werden denn, unter Berücksichtigung der Gränzwerthe von n',

abermals die Deuteropyramide $\frac{2m(2n-1)}{3n}P2$,

die Skalenoëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2n-1)n'}{(2n'-1)n}Pn'$, und

das Rhomboëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2n-1)}{n}P$

diejenigen Formen sein, welche zunächst noch Flächen in die Zone liefern.

3. Die jenseits der Rhomboëderfläche folgenden tautozonalen Flächen endlich, welche abermals allgemein Skalenoëdern von analoger Stellung angehören werden, fallen zwar noch einerseits in den Sextanten der $+y$ und $-u$, jedoch so, dass sie in der Axe der u ihren Parameter 1, in der Axe der y ihren Parameter n' haben, weshalb denn für sie statt des ersten Parameters der auf die Halbaxe der $-z$ bezügliche Parameter in Rechnung zu bringen ist. Setzen wir also in der Zonengleichung

$$b = n',\ \text{und}\ c' = -\frac{n'}{n'-1}$$

so bestimmt sich die Ableitungszahl

$$m' = \frac{m(2n-1)n'}{(2-n')n}$$

und so ergiebt sich, unter Berücksichtigung der Gränzwerthe von n', dass jenseits der Fläche

des Rhomboëders von analoger Stellung aus $\frac{m(2n-1)}{n}P$,

die Skalenoëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2n-1)n'}{(2-n')n}Pn'$, und

das Deuteroprisma $\infty P2$

diejenigen Formen sein werden, welche gleichfalls tautozonale Flächen zu liefern vermögen.

Hiermit ist die Entwickelung der Zone beendigt, welche sich jenseits der Fläche des Prismas $\infty P2$ durch dieselben Flächen in umgekehrter Reihenfolge weiter fortzieht, und überhaupt, nach viermaliger Durchlaufung derselben Flächenreihe in zweimal entgegengesetzter Ordnung auf ihren Anfangspunct zurückkommt.

§. 149. Fortsetzung; Zonen der Mittelkanten des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$.

Wählen wir diejenige Mittelkante des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$, welche mit der positiven Halbaxe der y zum Durchschnitte kommt, zur Zonenlinie, so werden die Gleichungen der letzteren

$$\frac{nx}{m\mathrm{a}(2-n)}+\frac{z}{2}=0, \text{ und } y+\frac{z}{2}=0,$$

woraus denn folgt, dass

$$\mu=\frac{m\mathrm{a}(2-n)}{n}, \ \nu=1, \ \varrho=-2,$$

und dass sich die Zonengleichung allgemein in der Form

$$\frac{m\mathrm{a}(2-n)}{na}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}=0$$

herausstellt. Da nun jede andere Form unter dem Zeichen $m'Pn'$ gedacht werden kann, so ist jedenfalls $a=m'\mathrm{a}$ zu setzen, während sich die Werthe von b und c, nach Maassgabe der Lage der betreffenden Flächen, verschieden bestimmen.

1. Für viele Flächen wird $b=1$, und $c=n'$ sein, folglich die Ableitungszahl

$$m'=\frac{m(2-n)n'}{(2-n')n}$$

werden; diese Flächen gehören allgemein Skalenoëdern von analoger Stellung, für die Gränzwerthe von n' aber dem Prisma $\infty P2$ und einem Rhomboëder an, weshalb denn überhaupt

das Deuteroprisma $\infty P2$,

die Skalenoëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2-n)n'}{(2-n')n}Pn'$ und

das Rhomboëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2-n)}{n}P$

diejenigen Formen sind, welche zunächst Flächen in die Mittelkantenzone liefern können.

2. Jenseits der so eben bestimmten Rhomboëderfläche folgen andere Flächen, für welche anfangs $b = n'$, und $c = 1$ zu setzen ist, daher sich für sie die Ableitungszahl

$$m' = \frac{m(2-n)n'}{(2n'-1)n}$$

bestimmt. Auch diese Flächen gehören noch Skalenoëdern von **analoger** Stellung mit $\frac{mPn}{2}$ an, mit Ausnahme der beiden, für welche die Gränzwerthe von n' gelten, weshalb denn überhaupt

abermals das analoge Rhomboëder aus $\frac{m(2-n)}{n}$P,

die Skalenoëder von analoger Stellung aus $\frac{m(2-n)n'}{(2n'-1)n}Pn'$, und

die Deuteropyramide $\frac{2m(2-n)}{3n}$P2

diejenigen Formen werden, welche die nächsten tautozonalen Flächen liefern.

3. Jenseits der Fläche dieser Deuteropyramide folgen nun noch die Flächen anderer Skalenoëder von **antiloger** Stellung, deren Parameter n' in die Axe der u fällt, während ihr Parameter 1 noch in der Axe der z liegt; für sie ist also statt n' der in die Axe der y fallende Parameter $\frac{n'}{n'-1}$ einzuführen. Setzen wir diesen Werth statt b, und 1 stat c in die Zonengleichung, so bestimmt sich die Ableitungszahl

$$m' = \frac{m(2-n)n'}{(n'+1)n}$$

aus welcher sich, unter Berücksichtigung der Gränzwerthe von n', die Folgerung ergiebt, dass

abermals die Deuteropyramide $\frac{2m(2-n)}{3n}$P2,

die Skalenoëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(2-n)n'}{(n'+1)n}$Pn', und

das Rhomboëder von antiloger Stellung aus $\frac{m(2-n)}{2n}$P

diejenigen Formen sind, welche gleichfalls Flächen in die Zone liefern werden.

Mit dieser Rhomboëderfläche ist die Entwickelung der Zone vollendet, indem solche jenseits derselben in umgekehrter Reihenfolge durch alle bereits bestimmte Flächen bis in eine Fläche von ∞P2 zurückläuft, um dann, nach nochmaliger Wiederholung derselben Flächenkette, auf ihren Anfangspunct zurück zu gelangen.

§. 150. Kantenzonen des Skalenoëders mRn, bei Anwendung der secundären Bezeichnung.

Dem primitiven Zeichen $\frac{mPn}{2}$ eines Skalenoëders entspricht nach §. 128 das secundäre Zeichen $\frac{m(2-n)}{n}R\frac{n}{2-n}$, und dem secundären Zeichen $\mu R\nu$ das primitive Zeichen $\mu\nu P\frac{2\nu}{\nu+1}$. Wollen wir also die Resultate der vorhergehenden drei Paragraphen so darstellen, wie es die secundäre Bezeichnung erfordert; so haben wir

1. in allen diesen Resultaten mn für m, und $\frac{2n}{n+1}$ für m zu setzen;
2. in den dadurch umgestalteten, aber noch immer der primitiven Ableitung entsprechenden Zeichen $m'Pn'$ der Skalenoëder $m' = \mu\nu$, und $n' = \frac{2\nu}{\nu+1}$ zu setzen;

durch die erste Substitution wird das gegebene Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$, durch die zweite Substitution wird das gesuchte Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$ auf sein secundäres Zeichen zurückgeführt.

A. Zonen der längeren Polkanten des Skalenoëders mRn.

Die Ableitungszahl m' derjenigen drei Skalenoëder, welche in §. 147 als die allgemeinen Resultate der Entwickelung dieser Zonen hervortreten, ist mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{m(n+1)}{n}$ behaftet. Setzen wir in diesem Factor mn statt m, und $\frac{2n}{n+1}$ statt n, so verwandelt er sich in $\frac{1}{2}m(3n+1)$, und so erhalten wir für die, in die Zone der längeren Polkanten von mRn fallenden drei Skalenoëder zunächst die umgestalteten Zeichen *):

$$\frac{m(3n+1)n'}{2(n'+1)}Pn',\ -\frac{m(3n+1)n'}{2(2n'-1)}Pn' \text{ und } -\frac{m(3n+1)n'}{2(2-n')}Pn'.$$

Setzen wir nun successiv ein jedes dieser Zeichen $=\mu\nu P\frac{2\nu}{\nu+1}$, so gilt zuvörderst für alle drei $n'=\frac{2\nu}{\nu+1}$, und so bestimmt sich, durch Substitution dieses Werthes von n',

für das erste Skalenoëder: $\mu\nu = \frac{m(3n+1)\nu}{3\nu+1}$

*) Der Deutlichkeit wegen und zur Ersparung des Raumes ist der Divisor 2, als Zeichen der Hemiëdrie, weggelassen worden.

für das zweite Skalenoëder: $\mu\nu = \dfrac{m(3n+1)\nu}{3\nu-1}$

für das dritte Skalenoëder: $\mu\nu = \frac{1}{4}m(3n+1)\nu$

Da nun aber das Zeichen $\mu\nu P\frac{2\nu}{\nu+1}$ mit dem secundären Zeichen $\mu R\nu$ aequivalent ist, so gelangen wir, indem wir n' statt ν schreiben, und die Gränzwerthe dieses n', welche 1 und ∞ sind, sogleich mit berücksichtigen, auf folgende Entwickelung.

Die Zone der längeren Polkante von mRn geht durch eine Fläche
des Rhomboëders $\frac{1}{4}m(3n+1)R$,
der Skalenoëder $\dfrac{m(3n+1)}{3n'+1}Rn'$, einschliesslich mRn,
der Deuteropyramide $\frac{1}{3}m(3n+1)P2$,
der Skalenoëder $-\dfrac{m(3n+1)}{3n'-1}Rn'$,
des Rhomboëders $-\frac{1}{2}m(3n+1)R$,
der Skalenoëder $-\frac{1}{2}m(3n+1)Rn'$ und
des Deuteroprismas $\infty P2$.

B. Zonen der kürzeren Polkanten des Skalenoëders mRn.

Die Ableitungszahl m' derjenigen drei Skalenoëder, welche in §. 148 als die allgemeinen Resultate der Entwickelung dieser Zonen hervortreten, ist mit dem gemeinschaftlichen Factor $\dfrac{2n-1}{n}$ behaftet. Setzen wir in diesem Factor mn statt m, und $\dfrac{2n}{n+1}$ statt n, so verwandelt er sich in $\frac{1}{2}m(3n-1)$, und so erhalten wir für die, in die Zone der kürzeren Polkanten von mRn fallenden drei Skalenoëder zunächst die umgestalteten Zeichen:

$$-\frac{m(3n-1)n'}{2(n'+1)}Pn',\quad \frac{m(3n-1)n'}{2(2n'-1)}Pn' \text{ und } \frac{m(3n-1)n'}{2(2-n')}Pn'.$$

Setzen wir nun abermals ein jedes dieser Zeichen $=\mu\nu P\frac{2\nu}{\nu+1}$, und verfahren wir übrigens ganz so wie vorher, so gelangen wir endlich auf folgende Entwickelung:

Die Zone der kürzeren Polkante von mRn geht durch eine Fläche
des Rhomboëders $-\frac{1}{4}m(3n-1)R$,
der Skalenoëder $-\dfrac{m(3n-1)}{3n'+1}Rn'$
der Deuteropyramide $\frac{1}{3}m(3n-1)P2$,
der Skalenoëder $\dfrac{m(3n-1)}{3n'-1}Rn'$, einschliesslich mRn,
des Rhomboëders $\frac{1}{2}m(3n-1)R$,
der Skalenoëder $\frac{1}{2}m(3n-1)Rn'$ und
des Deuteroprismas $\infty P2$.

C. Zonen der Mittelkanten des Skalenoëders mRn.

Die Ableitungszahl m' derjenigen drei Skalenoëder, welche in §. 149 als die allgemeinen Resultate der Entwickelung dieser Zonen hervortreten, ist mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{m(2-n)}{n}$ behaftet. Setzen wir in diesem Factor mn statt m, und $\frac{2n}{n+1}$ statt n, so verwandelt er sich natürlich in m, und so erhalten wir für die, in die Zone der Mittelkante des Skalenoëders mRn fallenden drei Skalenoëder zunächst die umgestalteten Zeichen

$$\frac{mn'}{2-n'}Pn', \ \frac{mn'}{2n'-1}Pn' \text{ und } -\frac{mn'}{n'+1}Pn'.$$

Setzen wir nun wiederum ein jedes dieser Zeichen $= \mu\nu P\frac{2\nu}{\nu+1}$, und verfahren wir ausserdem ganz so, wie oben unter A, so gelangen wir endlich auf folgende Entwickelung:

Die Zone der Mittelkante von mRn geht durch je eine Fläche
des Deuteroprismas $\infty P2$,
der Skalenoëder mRn', einschliesslich mRn,
des Rhomboëders mR,
der Skalenoëder $\frac{2m}{3n'-1}Rn'$,
der Deuteropyramide $\frac{4}{3}mP2$,
der Skalenoëder $-\frac{2m}{3n'+1}Rn'$, und
des Rhomboëders $-\frac{1}{2}mR$.

Wir haben alle drei Zonen nur durch eine von den vier Flächenketten verfolgt, aus denen eigentlich eine jede derselben in ihrer Vollständigkeit besteht, weil sich in den übrigen drei Flächenketten dieselben Flächen, nur in umgekehrter Reihenfolge, wiederholen.

§. 151. Zonen des Rhomboëders mR.

An jedem Rhomboëder mR sind besonders die Kantenzonen und die Diagonalzonen von Wichtigkeit. Die ersteren sind natürlich nur einer Art, weil je zwei Polkanten und je zwei Mittelkanten einander parallel laufen; unter den Diagonalzonen aber versteht man diejenigen, deren Flächen den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen parallel sind; sie fallen also mit den Kantenzonen des Rhomboëders $-2mR$ zusammen. Beide Arten von Zonen lassen sich unmittelbar aus denen in §. 150 für die Skalenoëder mRn gefundenen Resultaten ableiten, indem man $n=1$ setzt; denn die Polkanten des Rhomboëders mR entsprechen den kürzeren Polkanten, und die Klinodiagonalen seiner Flächen entsprechen den längeren Polkanten des Skalenoëders mRn.

A. Die Kantenzonen des Rhomboëders mR sind zu drei vorhanden, und jede derselben besteht aus vier identischen Flächenketten, welche in entgegengesetzten Richtungen an einander geschlossen sind. Als die Endglieder jeder Kette erscheinen die Abstumpfungsflächen einer Polkante und einer Mittelkante. Jede Kette zerfällt aber wiederum in drei Flächengruppen, welche allgemein gewissen Skalenoëdern angehören, und durch bestimmte singuläre Flächen von einander getrennt werden. Da die Mittelkanten des Rhomboëders mR dieselbe Lage haben, wie jene des Skalenoëders mRn, und da es gleichgiltig ist, ob wir die Kantenzonen auf die Polkanten, oder auf die Mittelkanten beziehen, so ist die Entwickelung dieser Zonen eigentlich schon in den, §. 150 unter C stehenden Resultaten gegeben; genau dieselbe Entwickelung erhalten wir aus den ebendaselbst unter B stehenden Resultaten, wenn wir $n = 1$ setzen.

Gehen wir also von der Polkante des Rhomboëders aus, so erhalten wir folgende Entwickelung:

Die Kantenzone des Rhomboëders mR geht durch eine Fläche:
des Rhomboëders $-\frac{1}{2}m$R,
der Skalenoëder $-\frac{2m}{3n'+1}$Rn',
der Deuteropyramide $\frac{2}{3}m$P2,
der Skalenoëder $\frac{2m}{3n'-1}$Rn',
des Rhomboëders mR selbst,
der Skalenoëder mRn', und
des Deuteroprismas ∞P2.

B. Die Diagonalzonen des Rhomboëders mR sind ebenfalls zu drei vorhanden, deren jede abermals aus vier Ketten besteht, welche in entgegengesetzter Richtung an einander geschlossen sind; die Endglieder jeder Kette bilden eine Fläche des Rhomboëders mR selbst und eine Fläche des Deuteroprismas. Jede Kette zerfällt aber wiederum in drei Gruppen, welche verschiedenen Skalenoëdern angehören, und durch die Flächen bestimmter singulärer Formen getrennt werden. Gehen wir von einer Fläche des Rhomboëders aus, so erhalten wir aus denen in §. 150 unter A stehenden Resultaten, indem wir $n = 1$ setzen, folgende Entwickelung:

Die Diagonalzone des Rhomboëders mR geht durch eine Fläche:
des Rhomboëders mR selbst,
der Skalenoëder $\frac{4m}{3n'+1}$Rn',
der Deuteropyramide $\frac{4}{3}m$P2,
der Skalenoëder $-\frac{4m}{3n'-1}$Rn',
des Rhomboëders $-2m$R,
der Skalenoëder $-2m$Rn', und
des Deuteroprismas ∞P2.

Wir beschliessen hiermit die Zonenlehre, indem solche durch die mitgetheilten Betrachtungen hinreichend erläutert worden sein dürfte, um auch die Entwickelung einer jeden anderen Zone vornehmen zu können.

Siebentes Capitel.

Transformation der Axen, und Zwillingskrystalle des Hexagonalsystems.

§. 152. Beziehung des Hexagonalsystems auf ein isogonales dreizähliges Axensystem.

Es wurde bereits oben S. 186 erwähnt, dass mehre Krystallographen das Hexagonalsystem nicht auf das, in seiner holoëdrischen Ausbildungsweise so entschieden angezeigte tetrametrische Axensystem, sondern auf ein schiefwinkeliges trimetrisches Axensystem beziehen, dessen drei Axen gegen einander gleich geneigt und gleich gross, überhaupt vollkommen gleichwerthig sind. Da diese Ansicht für die Rechnung manche Erleichterung gewährt, und von einem so ausgezeichneten Krystallographen wie *Miller*, selbst für das praktische Bedürfniss der Mineralogie, in Anwendung gebracht worden ist, so verdient sie wohl, etwas näher in Betrachtung gezogen zu werden.

Um uns dieses Axensystem nach seiner Lage leicht vorstellen zu können, dazu bedarf es nur der Bemerkung, dass seine drei Axen allemal den Polkanten desjenigen Rhomboëders parallel liegen, welches als Grundform gewählt worden ist; in den holoëdrischen Krystallreihen, denen freilich die Rhomboëder fehlen, bestimmt daher das aus der Grundpyramide P abzuleitende Rhomboëder die Lage der Axen.

Indem wir nun das tetrametrische Axensystem, als das eigentliche und ursprünglich gegebene zu Grunde legen, und in solchem ein Rhomboëder der ersten Art, von dem Parameter-Verhältnisse a : 1 : 1, als diejenige Form wählen, deren Flächen die Coordinat-Ebenen des neuen Axensystems liefern sollen, so werden wir, durch Anwendung der in §. 44 mitgetheilten Rechnung, zur Transformation unsers Axensystems, und zur Beziehung aller Formen auf das neue, isogonal-trimetrische Axensystem gelangen.

Die drei Flächen F', F'' und F''', deren Centro-Parallelflächen die neuen Coordinat-Ebenen darstellen, sind also die Flächen des Rhomboëders R, und es werden daher die calculativen Gleichungen dieser Coordinat-Ebenen

für F' $\frac{x}{a} + y + z = 0$, für F'' $\frac{x}{a} - y = 0$, für F''' $\frac{x}{a} - z = 0$.

Die Gleichungen ihrer Durchschnittslinien L, L' und L'', als der drei neuen Axen, bestimmen sich demnach

für L $\frac{x}{a} - y = 0$, und $\frac{z}{2} + \frac{x}{a} = 0$,

für L' $\frac{x}{a}+\frac{y}{2}=0$, und $z-\frac{x}{a}=0$,

für L'' $\frac{x}{a}-y=0$, und $z-\frac{x}{a}=0$,

woraus sich denn für die Grössen M, N, R, M' u. s. w. (S. 58) die folgenden Werthe ergeben:

$$M=a,\ N=1,\quad R=-2,$$
$$M'=a,\ N'=-2,\ R'=1,$$
$$M''=a,\ N''=1,\quad R''=1.$$

Da nun unser ursprüngliches Axensystem ein schiefwinkeliges ist, in welchem $\alpha=60^0$, $\beta=90^0$, $\gamma=90^0$,
so folgt hieraus, nach S 59, dass für irgend eine, in selbigem durch die Parameter a, b und c gegebene Fläche F die in den drei neuen Axen L, L' und L'' erforderlichen Parameter a_1, b_1 und c_1 die nachstehenden Werthe haben müssen:

$$a_1=\frac{abc\sqrt{a^2+3}}{abc+ca-2ab}$$

$$b_1=\frac{abc\sqrt{a^2+3}}{abc-2ca+ab}$$

$$c_1=\frac{abc\sqrt{a^2+3}}{abc+ca+ab}$$

Der gemeinschaftliche irrationale Factor $\sqrt{a^2+3}$ ist hierbei ohne alle Bedeutung, und kann daher ausfallen, weil es nur auf das Verhältniss der Parameter ankommt, und weil es lediglich der schiefe Neigungswinkel der Axen (oder auch der Coordinat-Ebenen) ist, durch welchen das neue Axensystem charakterisirt wird. Auch sind die Werthe von a_1, b_1 und c_1 ganz unabhängig von dem Grundparameter a, wie sich schon daraus ergiebt, dass in jedem besonderen Falle $a=m$a gesetzt werden muss, wodurch a eliminirt wird. Uebrigens sind die oberen drei Halbaxen als positive, die unteren dagegen als negative Halbaxen zu denken, und zwar fällt die positive Halbaxe L in den Sextanten der $-z$ und $-u$, die positive Halbaxe L' in den Sextanten der $+u$ und $-y$, und die positive Halbaxe L'' in den Sextanten der $+y$ und $+z$.

Bezeichnen wir also diese drei neuen Axen als die Axen der x', y' und z', so wird eine Fläche F, welche in dem eigentlich hexagonalen Axensysteme durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben ist, in dem neuen, isogonal-trimetrischen Axensysteme durch die Gleichung

$$(abc+ca-2ab)x'+(abc-2ca+ab)y'+(abc+ca+ab)z'=abc$$

bestimmt werden.

§. 153. Fortsetzung; Reduction der verschiedenen Formen auf das isogonale Axensystem.

Wir wollen nun zusehen, welche Parameter die verschiedenen holoëdrischen Formen des Hexagonalsystems in dem isogonalen Axensysteme erhalten werden. Da eine jede solche Form allgemein als eine dihexagonale Pyramide mPn vorgestellt werden kann, so haben wir zunächst diese zu berücksichtigen.

1. Reduction einer dihexagonalen Pyramide mPn. Es folgt aus den Symmetrie-Verhältnissen des isogonalen Axensystems, dass diese Form in ihm nicht mehr als ein Inbegriff von lauter isoparametrischen Flächen, also auch gar nicht mehr als eine einfache Gestalt hervortreten kann, sondern als eine Combination derjenigen beiden Skalenoëder aufgefasst werden muss, welche aus ihr abzuleiten sind.

Für das eine dieser Skalenoëder, dessen im Sextanten der positiven y und z liegende Flächen obere sind, hat die eine dieser Flächen die Gleichung

$$\frac{x}{m\mathrm{a}} + y + \frac{z}{n} = 1;$$

folglich ist für sie $a = m\mathrm{a}$, $b = 1$ und $c = n$, und setzen wir diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir

$$a_1 = \frac{mn}{mn+n-2m},$$

$$b_1 = \frac{mn}{n-2mn+m},$$

$$c_1 = \frac{mn}{n+mn+m};$$

alle zwölf Flächen des Skalenoëders haben dieselben Parameterwerthe, nur vertauschen solche ihre Lage in den verschiedenen Axen.

Für das andere Skalenoëder, dessen im Sextanten der positiven y und z liegende Flächen untere sind, hat die eine dieser Flächen die Gleichung

$$-\frac{x}{m\mathrm{a}} + y + \frac{z}{n} = 1;$$

folglich gilt für sie $a = -m\mathrm{a}$, $b = 1$, und $c = n$, und setzen wir diese Werthe in die Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir für ihre obere Gegenfläche:

$$a_1 = \frac{mn}{n-mn+2m},$$

$$b_1 = \frac{mn}{n+2mn-m},$$

$$c_1 = \frac{mn}{n-mn-m};$$

wiederum haben alle zwölf Flächen dieses Skalenoëders dieselben Parameter, indem solche nur ihre Lage in den Axen vertauschen.

2. Reduction einer Protopyramide mP. Eine jede solche Pyramide zerfällt in dem isogonalen Axensysteme in ihre beiden Rhomboëder, welche verschiedene Parameter-Verhältnisse, und daher auch verschiedene Zeichen erfordern, obgleich sie complementäre Formen sind. Wir erhalten diese Parameter, indem wir in den unter Nr. 1 gefundenen Werthen $n = 1$ setzen.

Es wird also für das Rhomboëder $\frac{m\text{P}}{2}$ oder mR:

$$a_1 = \frac{m}{1-m}, \ b_1 = \frac{m}{1-m}, \ c_1 = \frac{m}{2m+1};$$

und es wird für das Rhomboëder $-\frac{m\text{P}}{2}$ oder $-m$R:

$$a_1 = \frac{m}{1+m}, \ b_1 = \frac{m}{1+m}, \ c_1 = \frac{m}{1-2m}.$$

Daher gilt z. B. für das Grundrhomboëder R das Parameter-Verhältniss $\infty : \infty : 1$, für das Gegenrhomboëder $-R$ aber das Verhältniss $-1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, wie diess auch die *Miller*'schen Zeichen 100 und $\bar{1}22$ ausdrücken.

3. Reduction einer Deuteropyramide mP2. Für diese Pyramiden findet keine Zerfällung in zwei Formen von verschiedenen Parameter-Verhältnissen Statt. Setzen wir nämlich in den unter Nr. 1 stehenden allgemeinen Ausdrücken von a_1, b_1 und c_1 den Werth $n = 2$, so gelangen wir für beide Flächen auf dieselben drei Parameter

$$a_1 = m, \ b_1 = \frac{2m}{2-3m}, \ c_1 = \frac{2m}{2+3m}.$$

4. Reduction der Prismen und des Pinakoides. Setzen wir $m = \infty$, so erhalten wir für die dihexagonalen Prismen ∞Pn lauter isoparametrische Flächen, weshalb denn auch diese Prismen als einfache Formen gegeben sind; die Parameter werden z. B. für die erste Fläche:

$$a_1 = \frac{n}{n-2}, \ b_1 = -\frac{n}{2n-1}, \ c_1 = \frac{n}{n+1}.$$

Dasselbe gilt für die beiden Prismen ∞P und ∞P2, von welchen das erstere die Parameter -1, -1 und $\frac{1}{2}$, das zweite die Parameter ∞, -1 und 1 erfordert. Das Pinakoid endlich hat das Parameter-Verhältniss 1 : 1 : 1.

Anm. Aus vorstehenden Resultaten ergeben sich unmittelbar die krystallographischen Zeichen, mit welchen *Miller* die Formen des Hexagonalsystems bezeichnet, indem er jedes Parameter-Verhältniss auf seinen einfachsten Ausdruck bringt, und dann die inversen Grössen seiner Glieder neben einander schreibt. Bei der Berechnung der Formen spielt natürlich der constante Neigungswinkel der Axen eine wichtige Rolle. Uebrigens ersieht man aus der ganzen hier mitgetheilten Transformation der Axen, dass sich solche zwar ziemlich ungezwungen an die rhomboëdrische Hemiëdrie des Hexagonalsystems anschliesst, dessenungeachtet aber bleibt es ein Uebelstand, dass sie die complementären hemiëdrischen Formen mit ganz verschiedenen Zeichen hervortreten lässt, woraus sich denn bei ihrer Anwendung auf den holoëdrischen Formencomplex der noch grössere Uebelstand ergiebt, dass die wich-

tigsten einfachen Formen, nämlich die Protopyramiden und die dihexagonalen Pyramiden, als Combinationen dargestellt werden müssen. Es ist diess ein neuer Grund, welcher, zugleich mit den oben S. 186 angeführten Gründen, uns die Beziehung der hexagonalen Formen auf dieses trimetrische Axensystem für die praktische Krystallographie nicht zweckmässig erscheinen lässt.

§. 154. Gewöhnliche Zwillingskrystalle des Hexagonalsystems; Transposition der Axen.

In den holoëdrischen Krystallreihen des Hexagonalsystems gehören Zwillingskrystalle zu den Seltenheiten; häufiger erscheinen sie in den rhomboëdrischen sowie in den tetartoëdrischen Krystallreihen. Viele von diesen Zwillingskrystallen sind solche mit parallelen Axensystemen, bei denen sich in der Verwachsung beider Individuen ein Streben der Natur zur Reproduction der holoëdrischen, oder auch der hemiëdrischen Stammformen offenbart. Da nun dergleichen Zwillingskrystalle sowohl an und für sich, als auch nach den gegenseitigen Beziehungen der Formen ihrer Individuen sehr leicht zu beurtheilen sind, so bedürfen sie auch keiner allgemeinen Betrachtung. Dagegen sind die Zwillinge mit geneigten Axensystemen, welche besonders in den rhomboëdrischen Krystallreihen zu den recht gewöhnlichen Erscheinungen gehören, nicht ohne Weiteres nach ihren Verhältnissen zu erkennen, weshalb wir uns mit ihnen etwas ausführlicher beschäftigen müssen. Fast allen diesen Zwillingen liegt das Gesetz zu Grunde, dass die Fläche irgend eines Rhomboëders mR die Zwillingsfläche ist. Da nun aber dieses Rhomboëder bald ein positives, bald ein negatives sein kann, und da auch für alle übrigen Formen deren hemiëdrische Gegenkörper berücksichtigt werden müssen, so erscheint es zweckmässig, die Betrachtung dieser Zwillingskrystalle so einzuleiten, dass dabei anfangs eine holoëdrische Ausbildung vorausgesetzt wird.

Wir wollen also einstweilen annehmen, dass eine Fläche der Grundpyramide P die Zwillingsfläche sei, wodurch die Allgemeinheit der Aufgabe keineswegs beeinträchtigt wird, weil wir nur nöthig haben, in den Endresultaten statt a das Product m'a zu schreiben, um solchen für die Fläche irgend einer Protopyramide m'P Giltigkeit zu verschaffen.

Die Gleichung der Zwillingsfläche wird hiernach

$$\frac{x}{\mathrm{a}} + y + z = 1.$$

Legen wir nun die in §. 50 (S. 69 f.) für das triklinoëdrische Axensystem vollzogene Transposition der Axen zu Grunde, so haben wir in gegenwärtigem Falle

$$a = \mathrm{a}, \quad b = 1, \quad c = 1,$$
$$A' = \tfrac{1}{2}, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$
$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0,$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\tfrac{3}{4}}, \quad \sin\beta = 1, \quad \sin\gamma = 1$$

zu setzen, und folglich die S. 69 stehenden Grössen p, q und s mit den Werthen

$$p = \tfrac{3}{4}, \quad q = \tfrac{1}{2}\mathrm{a}, \quad s = \tfrac{1}{2}\mathrm{a}$$

die S. 73 stehenden Grössen μ, ν und ϱ aber mit den Werthen

$$\mu = \frac{3-4a^2}{8}, \quad \nu = -\frac{3}{8a}, \quad \varrho = -\frac{3}{8a}$$

einzuführen. Demgemäss erhalten die Axen der x', y' und z' des Individuums II innerhalb des Individuums I folgende Gleichungen:

die Axe der x': $\frac{x}{3-4a^2} - \frac{y}{4a} = 0$, und $y - z = 0$;

die Axe der y': $\frac{x}{2a} + y = 0$, und $\frac{z}{2a} - \frac{x}{3} = 0$;

die Axe der z': $\frac{x}{3} - \frac{y}{2a} = 0$, und $z + \frac{x}{2a} = 0$.

In diesen Gleichungen haben wir die Grundlage für alle ferneren Betrachtungen gewonnen.

§. 155. Transposition einer Fläche des Individuums II auf das Individuum I.

Nachdem die Axen des Individuums II als Linien innerhalb des Axensystems I bestimmt worden sind, so bildet die Transposition irgend einer beliebigen Fläche eine leicht zu lösende Aufgabe.

Ist uns nämlich am Individuum II irgend eine Fläche F' durch die Gleichung

$$\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} + \frac{z'}{c'} = 1$$

gegeben, so haben wir nach §. 49 (S. 67) diejenigen Parameter a_1, b_1 und c_1 zu bestimmen, welche derselben Fläche in den Axen der x, y und z des Individuums I zukommen. Diese Bestimmung geschieht in folgender Weise. Nennen wir X', Y' und Z' die Durchschnittspuncte der Fläche F' mit den Axen der x', y' und z', so gelten zuvörderst für den Punct X', wie für jeden Punct der Axe der x', im Axensysteme I die zu Ende von §. 154 stehenden Gleichungen dieser Axe, vermöge welcher

$$x = \frac{(3-4a^2)y}{4a}, \text{ und } z = y$$

sein muss. Die Centrodistanz irgend eines Punctes derselben Axe ist aber nach S. 189 allgemein:

$$D = \sqrt{x^2+y^2+z^2+yz},$$

oder, nach Substitution der vorstehenden Werthe von x und z,

$$D = \frac{3+4a^2}{4a} y.$$

Da uns nun die Centrodistanz des Punctes X' durch den Parameter a' gegeben ist, so gilt für diesen Punct $D = a'$; folglich werden die Coordinaten des Punctes X', wenn wir solche mit p, q und s, statt mit x, y und z bezeichnen,

$$p = \frac{(3-4a^2)a'}{3+4a^2}, \quad q = s = \frac{4aa'}{3+4a^2}$$

Bringen wir dasselbe Verfahren für die beiden Puncte Y' und Z' in Anwendung, so finden wir für den Punct Y' die Coordinaten:

$$p' = \frac{6ab'}{4a^2+3},\quad q' = -\frac{3b'}{4a^2+3},\quad s' = \frac{4a^2b'}{4a^2+3},$$

und endlich für den Punct Z' die Coordinaten:

$$p'' = \frac{6ac'}{4a^2+3},\quad q'' = \frac{4a^2c'}{4a^2+3},\quad s'' = -\frac{3c'}{4a^2+3}.$$

Die in dem Individuum II gegebene Fläche F' geht nun aber durch die drei Puncte X', Y' und Z', deren so eben gefundene Coordinaten p, q, s, p' u. s. w. sich auf das Axensystem des Individuums I beziehen. Substituiren wir also in den zu Ende von §. 18 stehenden Ausdrücken die vorstehenden Werthe dieser Coordinaten, so erhalten wir für dieselbe Fläche ihre neuen, in dem Axensysteme I giltigen Parameter, nämlich:

$$a_1 = \frac{a'b'c'(4a^2+3)}{4a'(b'+c')a - b'c'(4a^2-3)}$$

$$b_1 = \frac{a'b'c'(4a^2+3)}{4a'b'a^2+3c'(2b'a-a')}$$

$$c_1 = \frac{a'b'c'(4a^2+3)}{4c'a'a^2+3b'(2c'a-a')}$$

welche Werthe mit denen in meinem Lehrbuche der Krystallographie (II, S. 294) mitgetheilten, und auf einem etwas anderen Wege gefundenen Werthen wesentlich übereinstimmen.

Da nämlich in vorstehenden Ausdrücken statt a das Product m'a gesetzt werden muss, sobald das allgemeinere Zwillingsgesetz berücksichtigt werden soll, dass die Zwillingsfläche eine Fläche der Pyramide m'P ist, während für die transponirte Fläche selbst jedenfalls $a' = m$a gesetzt werden kann, so lassen sich dieselben Ausdrücke auch folgendermaassen schreiben:

$$a_1 = \frac{mb'c'(4m'^2a^2+3)a}{4mm'(b'+c')a^2 - b'c'(4m'^2a^2-3)}$$

$$b_1 = \frac{mb'c'(4m'^2a^2+3)}{4mm'^2b'a^2+3c'(2m'b'-m)}$$

$$c_1 = \frac{mb'c'(4m'^2a^2+3)}{4mm'^2c'a^2+3b'(2m'c'-m)}$$

in welchen man nur n' und r' statt b' und c' zu schreiben braucht, um die erwähnten Formeln zu erhalten.

Man ersieht aus diesen Ausdrücken auf den ersten Blick, dass die transponirte Fläche F' des Individuums II einer krystallographisch-möglichen Fläche des Individuums I entsprechen muss, weil für den Werth von a_1 der Factor von a, und weil jeder der beiden Werthe von b_1 und c_1 nothwendig rational sein wird, sobald nur a^2 eine rationale Zahl ist; was ja immer der Fall sein muss, wenn a entweder eine rationale Zahl oder eine Quadratwurzel ist.

§. 156. Transposition eines Skalenoëders des Individuums II auf das Individuum I.

Wir wollen nun die gefundenen allgemeinen Resultate auf die Zwillingskrystalle rhomboëdrischer Krystallreihen anwenden. Um dabei unsrer Einbildungskraft ein Anhalten zu bieten, und uns leichter orientiren zu können, dazu mag die nachstehende Figur dienen, welche einen mit Juxtaposition beider Individuen gebildeten Zwillingskrystall darstellt, wie er am Kalkspathe für die Combination $\frac{3P\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot -\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ vorkommen kann; doch lassen wir sowohl das Rhomboëder, als auch die beiden Skalenoëder ganz allgemein als irgend ein $\frac{m'P}{2}$, als ein $\frac{mPn}{2}$ und ein $-\frac{mPn}{2}$ gelten.

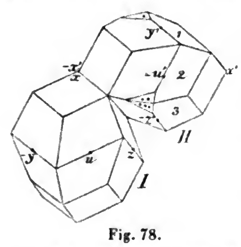


Fig. 78.

Es handelt sich nun zunächst darum, für die Flächen des in der Figur vorherrschenden, und mit dem Zwillingsrhomboëder $\frac{m'P}{2}$ in analoger Stellung befindlichen Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ des Individuums II die aequivalenten Flächen am Individuum I zu bestimmen. Eine einfache Betrachtung lehrt, dass die Flächen dieses Skalenoëders nach ihrer Transposition auf das Individuum I daselbst dreierlei verschiedenen Formen angehören, oder gewissermaassen drei verschiedene Partialformen bilden müssen.

Die erste dieser Partialformen besteht aus den beiden Flächen, von denen die eine mit 1, die andere mit z' bezeichnet ist, so wie aus den hinteren Gegenflächen derselben. Die zweite Partialform begreift die beiden Flächen, von denen die eine mit 2, die andere mit $-u'$ bezeichnet ist, nebst ihren beiden Gegenflächen. Die dritte Partialform endlich wird von den mit 3 und mit y' bezeichneten Flächen, und deren Gegenflächen gebildet. Die Puncte y', $-u'$ und $-z'$ bezeichnen uns die Austrittspuncte der gleichnamigen Halbaxen des Individuums II. Die Bestimmung der drei Partialformen im Individuum I hängt nun offenbar ab von der Transposition der drei Flächen 1, 2 und 3.

1. Erste Partialform. Ihre mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + y' + \frac{z'}{n} = 1;$$

also ist in den zu Ende von §. 155 stehenden Ausdrücken für a_1, b_1 und c_1

$$b' = 1, \text{ und } c' = n$$

zu setzen; man erhält so, mit Vernachlässigung des gemeinschaftlichen Factors $mn(4m'^2a^2+3)$,

$$a_1 = \frac{\mathrm{a}}{4mm'(n+1)\mathrm{a}^2 - n(4m'^2\mathrm{a}^2 - 3)}$$

$$b_1 = \frac{1}{4mm'^2\mathrm{a}^2 + 3n(2m' - m)}$$

$$c_1 = \frac{1}{4mnm'^2\mathrm{a}^2 + 3(2m'n - m)}$$

In jedem besondern Falle müssen diese Werthe, eben so wie die für die beiden anderen Partialformen folgenden Werthe, einer weiteren Discussion unterworfen werden, um aus ihnen das eigentliche krystallographische Zeichen der betreffenden Partialform ableiten zu können.

2. Zweite Partialform. Ihre mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} - u' - \frac{z'}{n} = 1, \text{ oder, nach S. 188,}$$

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} + \frac{(n-1)y'}{n} - \frac{z'}{n} = 1;$$

folglich ist in den zu Ende von §. 155 stehenden Ausdrücken für a_1, b_1 und c_1

$$b' = \frac{n}{n-1}, \text{ und } c' = -n$$

zu setzen; dadurch erhalten sie, wenn der gemeinschaftliche Factor mn $(4m'^2\mathrm{a}^2+3)$ unterdrückt wird, die Werthe:

$$a_1 = \frac{-\mathrm{a}}{4mm'(2-n)\mathrm{a}^2 + n(4m'^2\mathrm{a}^2 - 3)}$$

$$b_1 = \frac{-1}{4mm'^2\mathrm{a}^2 - 3(2m'n - mn + m)}$$

$$c_1 = \frac{1}{4mm'^2(n-1)\mathrm{a}^2 + 3(2m'n + m)}$$

welche abermals in jedem Falle noch einer weiteren Discussion zu unterwerfen sind.

3. Dritte Partialform. Ihre mit 3 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} - \frac{u'}{n} - z' = 1, \text{ oder, nach S. 188,}$$

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} - \frac{(n-1)y'}{n} - z' = 1;$$

folglich ist in den zu Ende von §. 155 stehenden Ausdrücken für a_1, b_1 und c_1

$$b' = -\frac{n}{n-1}, \text{ und } c' = -1$$

zu setzen, wodurch solche die nachstehenden Werthe erhalten:

$$a_1 = \frac{-\mathrm{a}}{4mm'(2n-1)\mathrm{a}^2 + n(4m'^2\mathrm{a}^2 - 3)}$$

$$b_1 = \frac{1}{3(2m'n + mn - m) - 4mnm'^2\mathrm{a}^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{3n(2m'+m)-4mm'^2(n-1)a^2}$$

welche gleichfalls noch einer weiteren Discussion bedürfen.

Anm. Diese Discussion der Werthe von a_1, b_1 und c_1, welche sonach für alle drei Partialformen einzutreten hat, betrifft zunächst die Ausdrücke von b_1 und c_1, also die beiden Parameter in den Axen der y und z. Hat man nämlich in solche die den gegebenen Formen entsprechenden Werthe von m, n, m' und a eingesetzt, so werden ihre Werthe entweder mit gleichen, oder mit entgegengesetzten Vorzeichen hervortreten. Beide Fälle erfordern ein verschiedenes Verfahren.

1. Die Werthe von b_1 und c_1 haben gleiche Vorzeichen.

Dann dividirt man mit dem kleineren derselben alle drei Grössen a_1, b_1 und c_1, wodurch solche auf das Verhältniss $pa : q : 1$ gebracht werden, in welchem also

$$p \text{ entweder } = \frac{a_1}{ac_1} \text{ oder} = \frac{a_1}{ab_1}$$

$$q \text{ entweder } = \frac{b_1}{c_1} \text{ oder} = \frac{c_1}{b_1}$$

sein wird, je nachdem $c_1 <$ oder $> b_1$ ist. Der Quotient q wird sich dann jedenfalls > 1, aber entweder $<$, oder $=$, oder > 2 herausstellen. In den beiden ersteren Fällen ist er unmittelbar, im letzten Falle dagegen ist $\frac{q}{q-1}$ die gesuchte (und dann in die Axe der u fallende) Ableitungszahl, während p jedenfalls die in die Hauptaxe fallende Ableitungszahl darstellt. Uebrigens wird die gesuchte Partialform im ersten Falle einem Skalenoëder von analoger, im letzten Falle einem Skalenoëder von antiloger Stellung entsprechen, je nachdem bei positivem a_1 die Werthe von b_1 und c_1 positiv, oder negativ sind.

2. Die Werthe von b_1 und c_1 haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Sind sie in diesem Falle gleich gross, was selten vorkommen wird, so gehört die Partialform einer Deuteropyramide von der Ableitungszahl $\frac{2a_1}{ab_1}$. Sind sie dagegen ungleich, so bestimmt man zuvörderst den in die Axe der u fallenden Parameter, welcher durch den Ausdruck

$$d_1 = \frac{b_1c_1}{b_1+c_1}$$

gegeben ist, in dem jedoch beide Grössen b_1 und c_1 positiv zu nehmen sind. Natürlich muss d_1 immer $< b_1$, und auch $< c_1$ sein, weshalb denn der kleinste Parameter 1 jedenfalls in die Axe der u fallen wird, und es kommt nur noch darauf an, die der Ableitung und Bezeichnung wirklich entsprechenden Parameter zu finden. Zu dem Ende dividirt man die drei Grössen, nämlich a_1, die kleinere von b_1 und c_1, sowie d_1 selbst durch d_1, wodurch solche auf das Verhältniss $pa : q : 1$ gebracht werden, in welchem also

$$p = \frac{(b_1+c_1)a_1}{ab_1c_1}, \text{ und}$$

$$q = \frac{b_1+c_1}{b_1}, \text{ oder auch } = \frac{b_1+c_1}{c_1}$$

sein wird, je nachdem $c_1 <$ oder $> b_1$ ist. Dann sind p und q die gesuchten

Ableitungszahlen, und zwar ist die gefundene Form ein Skalenoëder von analoger oder antiloger Stellung, je nachdem bei negativem $a_1\ c_1 <$ oder $> b_1$ ist.

§. 157. Fortsetzung.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir uns mit der Transposition eines Skalenoëders von analoger Stellung mit dem Zwillings-Rhomboëder beschäftigt. Ein in verwendeter oder antiloger Stellung befindliches Skalenoëder, von welchem drei Flächen des Individuums II in Figur 78 durch die Zuschärfungsflächen der Mittelecke des vorwaltenden Skalenoëders angedeutet sind, giebt ganz ähnliche Resultate. Auch seine Flächen gruppiren sich in drei Partialformen; die erste dieser Formen ist diejenige, deren eine vordere Fläche in der Figur mit einem Puncte bezeichnet ist; die zweite Partialform besteht aus der mit zwei Puncten bezeichneten Fläche und deren correlaten Flächen; die dritte Partialform endlich wird von der mit drei Puncten bezeichneten Fläche und ihren correlaten Flächen gebildet.

Eine aufmerksame Betrachtung lehrt sogleich, dass diese drei Flächen, welche sich auf die negative Halbaxe der x' beziehen, in Bezug auf die Nebenaxen der y', u' und z' eine ganz analoge Lage haben, wie die vorher betrachteten drei Flächen 1, 2 und 3; der wesentliche Unterschied besteht eben nur darin, dass für sie der Parameter ma negativ zu nehmen ist, während solcher für die Flächen 1, 2 und 3 positiv war. Wir gelangen daher unmittelbar auf die Parameter, welche diesen Flächen im Individuum I zukommen, wenn wir in den für die Flächen 1, 2 und 3 gefundenen Ausdrücken von a_1, b_1 und c_1 die Zahl m mit negativem Werthe einführen, wobei es allerdings nicht übersehen werden darf, dass der in diesen Ausdrücken vernachlässigte gemeinschaftliche Factor $mn(4m'^2\mathrm{a}^2+3)$ gleichfalls mit m behaftet ist. Auf diese Weise ergeben sich denn folgende Resultate.

1. Erste Partialform; für sie werden die Parameter im Individuum I:

$$a_1 = \frac{\mathrm{a}}{4mm'(n+1)\mathrm{a}^2+n(4m'^2\mathrm{a}^2-3)}$$
$$b_1 = \frac{1}{4mm'^2\mathrm{a}^2-3n(2m'+m)}$$
$$c_1 = \frac{1}{4mnm'^2\mathrm{a}^2-3(2m'n+m)}$$

2. Zweite Partialform; die ihr im Individuum I entsprechenden Parameter sind:

$$a_1 = \frac{\mathrm{a}}{n(4m'^2\mathrm{a}^2-3)-4mm'(2-n)\mathrm{a}^2}$$
$$b_1 = \frac{-1}{4mm'^2\mathrm{a}^2+3(2m'n+mn-m)}$$
$$c_1 = \frac{1}{4mm'^2(n-1)\mathrm{a}^2-3(2m'n-m)}$$

3. Dritte Partialform; sie erfordert im Individuum I die Parameter

$$a_1 = \frac{a}{n(4m'^2a^2-3)-4mm'(2n-1)a^2}$$

$$b_1 = \frac{-1}{4mnm'^2a^2+3(2m'n-mn+m)}$$

$$c_1 = \frac{-1}{4m(n-1)m'^2a^2+3n(2m'-m)}$$

Auch diese Parameter müssen in jedem besonderen Falle einer ähnlichen Discussion unterworfen werden, wie solche in der Anmerkung zu §. 156 erörtert worden ist, bevor man das wahre krystallographische Zeichen derjenigen Form aufstellen kann, auf welche die eine oder die andere dieser Partialformen zu beziehen ist.

Anm. Will man alle diese Resultate so darstellen, wie es die secundäre Bezeichnung erfordert, so hat man zuvörderst in den Werthen von a_1, b_1 und c_1 statt m die Grösse mn, und statt n die Grösse $\frac{2n}{n+1}$ einzusetzen, wodurch solche für das Zeichen mRn, als dasjenige des zu transponirenden Skalenoëders, eingerichtet werden. Dann hat man in allen Fällen, da die transponirte Form selbst einem Skalenoëder $\frac{\mu P\nu}{2}$ angehört, aus den Ableitungszahlen desselben die Werthe $\mu\left(\frac{2-\nu}{\nu}\right)$ und $\frac{\nu}{2-\nu}$ zu bestimmen, um auch dieses gefundene Skalenoëder auf sein secundäres Zeichen zu bringen.

§. 158. Transposition eines Rhomboëders mR.

Setzen wir in den Resultaten der §§. 156 und 157 $n=1$, so gelangen wir auf die Transposition der Flächen eines Rhomboëders $\frac{mP}{2}$ oder mR, wie folgt.

I. Das Rhomboëder mR befindet sich in analoger Stellung mit dem Zwillings-Rhomboëder. Da für dasselbe die zweite und die dritte der in §. 156 bestimmten Partialformen coincidiren, so gruppiren sich seine Flächen nur noch in zwei Partialformen, von denen die erste ein Flächenpaar, die zweite die beiden anderen Flächenpaare begreift.

1. Für die erste Partialform wird

$$a_1 = \frac{a}{8mm'a^2-(4m'^2a^2-3)},$$

$$b_1 = c_1 = \frac{1}{6m'+m(4m'^2a^2-3)};$$

folglich entsprechen ihr im Individuum I zwei Flächen des Rhomboëders

$$\frac{6m'+m(4m'^2a^2-3)}{8mm'a^2-(4m'^2a^2-3)}R$$

welches analoge oder antiloge Stellung gegen das Zwillings-Rhomboëder haben

wird, je nachdem $8mm'a^2 >$ oder $<$ als $4m'^2a^2-3$ ist; sind beide Grössen einander gleich, so gehören die Flächen dem Prisma ∞R; ist dagegen die im Zähler stehende Grösse $=0$, so liefert das Pinakoid die Parallelflächen.

2. Für die zweite Partialform wird

$$a_1 = \frac{-a}{4mm'a^2+4m'^2a^2-3}$$
$$b_1 = \frac{1}{6m'-4mm'^2a^2}$$
$$c_1 = \frac{1}{6m'+3m}$$

Diese Werthe bedürfen noch einer weiteren Discussion, wie solche in der Anmerkung zu §. 156 angedeutet worden ist.

Anm. Beispielsweise wollen wir diese Discussion für gegenwärtigen Fall durchführen.

Da b_1 und c_1 beide positiv sind, so lange $mm'a^2 < \frac{3}{2}$ ist, und da $c_1 < b_1$ ist, so haben wir zuvörderst alle drei Parameter mit c_1 zu dividiren, und erhalten so:

$$p = \frac{6m'+3m}{4mm'a^2+4m'^2a^2-3},$$
$$q = \frac{6m'+3m}{6m'-4mm'^2a^2}.$$

Nun kann der Werth von q entweder $<$, oder $=$, oder > 2 sein, woraus sich denn ergiebt, dass die zweite Partialform

für $q<2$ einem antilogen Skalenoëder $\mp pPq$,
für $q=2$ der Deuteropyramide $pP2$,
für $q>2$ dem analogen Skalenoëder $\pm pP\frac{q}{q-1}$

angehören wird.

Wenn $mm'a^2 = \frac{3}{2}$ ist, so wird $b_1 = \infty$, und dann entspricht die Partialform zwei Flächenpaaren des Rhomboëders mR selbst, welches also dann das sogenannte inverse Rhomboëder des Zwillings-Rhomboëders sein muss.*)

Wenn endlich $mm'a^2 > \frac{3}{2}$ ist, so wird b_1 negativ, und die Ableitungszahlen desjenigen Skalenoëders pPq, welches die Parallelflächen der zweiten Partialform liefert, werden

$$p = \frac{4mm'^2a^2+3m}{4mm'a^2+4m'^2a^2-3}$$
$$\text{und } q = \frac{4mm'^2a^2+3m}{6m'+3m}$$

II. Das Rhomboëder mR befindet sich in antiloger Stellung zu dem Zwillings-Rhomboëder. Auch in diesem Falle coincidiren die zweite und die dritte der in §. 157 bestimmten Partialformen, weshalb sich denn die Flächen des Rhomboëders abermals nur zu zwei Partialformen gruppiren, deren eine aus einem Flächenpaare, die andere aus zwei Flächenpaaren besteht.

*) Vergl. mein Lehrbuch der Krystallographie, I, S. 438.

1. Für die **erste** dieser Partialformen wird

$$a_1 = \frac{a}{8mm'a^2 + 4m'^2a^2 - 3}$$

$$b_1 = c_1 = \frac{1}{m(4m'^2a^2 - 3) - 6m'}$$

folglich entsprechen ihren Flächen zwei Flächen des Rhomboëders

$$\frac{m(4m'^2a^2 - 3) - 6m'}{8mm'a^2 + 4m'^2a^2 - 3}R$$

welches analoge oder antiloge Stellung gegen das Zwillings-Rhomboëder haben wird, je nachdem $4mm'^2a^2 >$ oder $< 6m' + 3m$ ist.

2. Für die **zweite** Partialform, welche von zwei Flächenpaaren gebildet wird, gilt

$$a_1 = \frac{a}{4m'^2a^2 - 3 - 4mm'a^2}$$

$$b_1 = \frac{-1}{4mm'^2a^2 + 6m'}$$

$$c_1 = \frac{-1}{6m' - 3m}$$

welche Werthe einer ähnlichen Discussion unterworfen werden müssen, wie solche in der Anmerkung zu 1, 2 gegeben worden ist, um das eigentliche krystallographische Zeichen der gesuchten Form bestimmen zu können.

§. 159. Transposition einer Deuteropyramide mP2.

Setzen wir in den Resultaten der §§. 156 und 157 $n = 2$, so gelangen wir zur Bestimmung der Parallelflächen einer von dem Individuum II auf das Individuum I transponirten Deuteropyramide mP2. Dabei ergiebt sich, was auch die unmittelbare Anschauung lehrt, dass eine solche Pyramide in drei Partialformen zerfällt, deren jede von zwei Flächenpaaren gebildet wird.

1. **Erste** Partialform; für ihre Flächen gelten die Parameter:

$$a_1 = \frac{a}{12mm'a^2 - 8m'^2a^2 + 6}$$

$$b_1 = \frac{1}{2mm'^2a^2 + 3(2m' - m)}$$

$$c_1 = \frac{2}{8mm'^2a^2 + 3(4m' - m)}$$

2. **Zweite** Partialform; für ihre Flächen bestimmt sich:

$$a_1 = \frac{-a}{2(4m'^2a^2 - 3)}$$

$$b_1 = \frac{-1}{4mm'^2a^2 - 3(4m' - m)}$$

$$c_1 = \frac{1}{4mm'^2a^2 + 3(4m' + m)}$$

3. Dritte Partialform; ihre Parameter haben die Werthe:

$$a_1 = \frac{-a}{6mm'a^2+4m'^2a^2-3}$$

$$b_1 = \frac{2}{3(4m'+m)-8mm'^2a^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{3(2m'+m)-2mm'^2a^2}$$

Alle diese Werthe müssen noch einer weiteren Discussion unterworfen werden, bevor sich die krystallographischen Zeichen der gesuchten Formen bestimmen lassen.

§. 160. Transposition der Prismen und des Pinakoides.

I. Setzen wir endlich in den Resultaten der §§. 156 und 157 $m = \infty$, indem wir dabei das in dem unterdrückten gemeinschaftlichen Factor aller Zähler vorkommende m mit berücksichtigen, so gelangen wir auf die Parallelflächen eines von dem Individuum II auf das Individuum I transponirten dihexagonalen Prismas ∞Pn. Auch dieses zerfällt in drei Partialformen, deren Flächen sich bestimmen, wie folgt.

1. Erste Partialform; für sie gelten allgemein die Parameter:

$$a_1 = \frac{a}{4m'(n+1)a^2},$$

$$b_1 = \frac{1}{4nm'^2a^2-3},$$

$$c_1 = \frac{1}{4m'^2a^2-3n};$$

da nun $b_1 < c_1$ ist, so entspricht die gesuchte Form vier Flächen des Skalenoëders aus

$$\frac{4nm'^2a^2-3}{4m'(n+1)a^2} P \frac{4nm'^2a^2-3}{4m'^2a^2-3n}.$$

2. Zweite Partialform; ihre Parameter haben die Werthe:

$$a_1 = \frac{-a}{4m'(2-n)a^2}$$

$$b_1 = \frac{-1}{4m'^2a^2+3(n-1)}$$

$$c_1 = \frac{1}{4m'^2a^2(n-1)+3}$$

welche Werthe in jedem besonderen Falle einer weiteren Discussion bedürfen, um das gesuchte krystallographische Zeichen bestimmen zu können.

3. Dritte Partialform; die Parameter derselben werden:

$$a_1 = \frac{-a}{4m'(2n-1)a^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{3(n-1)-4nm'^2a^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{3n-4m'^2a^2(n-1)}$$

von welchen Werthen Dasselbe gilt, wie vorher.

II. Den Flächen des Protoprismas ∞P entsprechen allgemein zwei Flächen eines Rhomboëders, und zwei Flächenpaare eines Skalenoëders;

das Rhomboëder hat das allgemeine Zeichen

$$\frac{4m'^2a^2-3}{8m'a^2}R\ ;$$

für die Flächen des Skalenoëders gelten die Parameter

$$a_1 = \frac{a}{4m'a^2}\ ,\quad b_1 = -\frac{1}{4m'^2a^2}\ ,\quad c_1 = \frac{1}{3}\ ;$$

da nun b_1 und c_1 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so werden die Ableitungszahlen dieses Skalenoëders pPq

$$p = \frac{4m'^2a^2+3}{4m'a^2}$$

$$\text{und } q = \frac{4m'^2a^2+3}{3}\ ,\quad \text{oder auch}$$

$$= \frac{4m'^2a^2+3}{4m'^2a^2}$$

je nachdem $b_1 <$ oder $> c_1$ ist.

III. Den Flächen des Deuteroprismas $\infty P2$ entsprechen zwei Flächenpaare irgend eines Skalenoëders, und ein Flächenpaar von ihm selbst.

Für das Skalenoëder gelten allgemein die Parameter

$$a_1 = \frac{a}{12m'a^2}\ ,\quad b_1 = \frac{1}{8m'^2a^2-3}\ ,\quad c_1 = \frac{1}{4m'^2a^2-6}\ ;$$

welche Werthe einer weiteren Discussion unterworfen werden müssen, um in jedem Falle das entsprechende Zeichen aufzufinden.

IV. Das Pinakoid endlich findet seine Parallelfläche jedenfalls in einem Flächenpaare des Rhomboëders

$$\frac{6m'}{4m'^2a^2-3}R,$$

welches sich für $m'^2a^2 = \frac{3}{4}$ in das Prisma ∞R verwandelt.

Vierter Abschnitt.

Rhombisches System.

Erstes Capitel.

Holoëdrische Formen des rhombischen Systems.

§. 161. Axensystem und Elemente desselben.

Das rhombische Krystallsystem ist dasjenige, dessen Formen auf drei rechtwinkelige, aber durchaus ungleiche und ungleichwerthige Axen bezogen werden müssen. In ihm wird also das Maximum der Ungleichheit erreicht, welches im Gebiete der orthoëdrischen Formen überhaupt durch eine verschiedene Grösse und Bedeutung der Axen eintreten kann. Denn eine jede Axe behauptet ihren besonderen Werth, ist daher einzig in ihrer Art, und keine derselben hat an und für sich eine eminente Bedeutung. Hieraus folgt denn auch, dass keine derselben als eine absolute Hauptaxe charakterisirt ist, und dass die Formen einer und derselben rhombischen Krystallreihe sowohl nach dieser, als auch nach jener Axe aufrecht gestellt werden können, ohne dass jedoch diese verschiedenen Stellungen als gleichwerthig und gleichgiltig zu betrachten sind, wie im Tesseralsysteme, weil eine jede derselben eine andere Erscheinungsweise der Formen bedingt. Die Hauptaxe ist also arbiträr, sie ist theoretisch willkürlich, und ihre Wahl bleibt dem Ermessen des Beobachters anheimgestellt; nur wird diejenige Axe, welche einmal zur Hauptaxe gewählt wurde, auch als solche consequent beizubehalten sein.

Anm. In der Praxis gestaltet sich die Sache meist anders, weil uns theils in der vorherrschenden Ausbildungsweise, theils in gewissen physischen Eigenschaften der Krystalle, wie z. B. in den Verhältnissen der Spaltbarkeit, oft hinreichende Argumente gegeben sind, welche uns bei der Wahl der Hauptaxe leiten können. Dennoch aber bleibt nicht selten der Willkür ein Spielraum nach dieser oder nach jener Richtung, und daraus ist es erklärlich, dass die Krystallreihe einer und derselben rhombischen Mineralspecies von verschiedenen Beobachtern bald in dieser, bald in jener Stellung dargestellt worden ist.

Indem wir also eine der Axen willkürlich als Hauptaxe bestimmen, werden die beiden anderen Axen zu Nebenaxen, welche, weil sie in der jedesmaligen Grundform die Diagonalen der rhombischen Basis bilden, durch die Namen der Makrodiagonale und Brachydiagonale unterschieden werden können. Die Hauptaxe gilt uns immer als die Axe der x, die Makrodiagonale als die Axe der y, und die Brachydiagonale als die Axe der z. Wir nennen die Ebene durch die beiden Nebenaxen die Basis, die beiden Ebenen durch die Hauptaxe und je eine der Nebenaxen die Hauptschnitte des

Axensystems, und unterscheiden letztere als makrodiagonalen und brachydiagonalen Hauptschnitt, je nachdem sie in die grössere oder kleinere Diagonale der Grundform fallen. Endlich lassen sich auch Zwischenaxen einführen, welche den Seiten des, durch die Diagonalen der Grundform bestimmten Rhombus parallel, aber von geringerer Bedeutung sind.

§. 162. Verschiedene Parameter-Verhältnisse.

Eine unmittelbare Folge der Ungleichwerthigkeit aller drei Axen ist es, dass in dem rhombischen Systeme weder das Verhältniss dreier gleicher Parameter, noch auch das Verhältniss zweier gleicher Parameter gegen einen ungleichen vorkommen kann, sondern dass in ihm lediglich das Verhältniss dreier ungleicher Parameter angetroffen wird. Jede Axe fordert ihren besonderen Parameter, und jeder Parameter kann seine Lage nur in den beiden Halbaxen derjenigen Axe vertauschen, in welcher er einmal gegeben ist; woraus denn nothwendig folgt, dass 8 das Maximum der Flächenzahl sein wird, dessen eine Form des rhombischen Systemes fähig ist.

Dieses Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit der Parameter lässt sich in seiner endlichen Form allgemein durch $a : b : c$, oder, wenn a, b und c die Grundparameter sind, durch ma : rb : sc darstellen, welches letztere Verhältniss jedoch immer auf die Form ma : nb : c, oder ma : b : nc gebracht werden kann. Dabei setzen wir ein für alle Mal voraus, dass a oder ma den in die Hauptaxe, b oder rb den in die Makrodiagonale, und c oder sc den in die Brachydiagonale fallenden Parameter bedeute. Alle Formen, welche durch ein solches endliches Parameter-Verhältniss bestimmt werden, sind ihrer allgemeinen Configuration nach gleichartig.

In vielen Formen ist nun $r = s$, und dann erscheint es zweckmässig, diese beiden Ableitungszahlen $= 1$ zu setzen, und alle Verschiedenheiten auf m zu übertragen, um der Hauptaxe wenigstens für die Ableitung und Bezeichnung eine ähnliche Bedeutung zu verschaffen, wie in den beiden vorhergehenden Krystallsystemen. Bei dieser Voraussetzung wird m nach Befinden auch bis auf den Werth 0 herabsinken können, wodurch das Verhältniss 0a : b : c erreicht wird, welches mit dem Verhältnisse a : ∞b : ∞c gleichbedeutend ist.

Ausserdem kann das allgemeine endliche Verhältniss ma : rb : sc auf dreierlei Weise in ein Gränzverhältniss übergehen, je nachdem entweder m, oder r, oder s den Werth ∞ erhält, was deshalb, weil jede Axe eine singuläre ist, auf drei verschiedene Verhältnisse

∞a : rb : sc, ma : ∞b : sc, und ma : rb : ∞c

gelangen lässt, welche eben so viele, ihrer Gestalt nach zwar gleichartige, ihrer Lage nach aber verschiedene Gruppen von Formen liefern.

Endlich kann dasselbe allgemeine Verhältniss noch dadurch auf dreierlei Weise bis an seine Gränze gedrängt werden, dass zugleich zwei der Zahlen

m, *r* und *s* den Werth ∞ erhalten, was abermals auf drei verschiedene Verhältnisse

$$\infty a : \infty b : c,\ \ \infty a : b : \infty c,\ \text{und}\ a : \infty b : \infty c$$

gelangen lässt, denen wiederum drei gleichartige, aber ihrer Lage nach verschiedene Formen entsprechen. Da jedoch für das letztere Verhältniss bereits das gleichbedeutende Verhältniss 0a : b : c eingeführt worden ist, so kommen nur noch die beiden ersteren in Berücksichtigung.

Anm. Es sind also wiederum sieben verschiedene Parameter-Verhältnisse, denen eben so viele verschiedene Arten von Formen entsprechen. Als das allgemeinste dieser Verhältnisse giebt sich offenbar das endliche Verhältniss $a : b : c$ oder $ma : rb : sc$ zu erkennen, weil man nur für *m*, *r* und *s* gewisse Gränzwerthe zu setzen braucht, um aus ihnen alle übrigen Verhältnisse abzuleiten. Gerade so werden sich auch die durch dieses Verhältniss bestimmten Formen als die allgemeinsten Formen herausstellen, als diejenigen Formen, in deren Verhältnissen die Bedingungen für die Möglichkeit aller übrigen Formen gegeben sind.

§. 163. Holoëdrische Formen des rhombischen Systems.

Denen im vorhergehenden Paragraphen bestimmten Parameter-Verhältnissen entsprechen nun folgende sieben Arten von holoëdrischen Formen.

1. Rhombische Pyramiden; sie sind von 8 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren Mittelkanten in der Ebene der Basis liegen, und bilden die einzige Art von geschlossenen holoëdrischen Formen des Systems. Ihre Flächen haben das endliche Parameter-Verhältniss $a : b : c$, oder $ma : rb : sc$, wobei für *m* alle mögliche zwischen 0 und ∞ liegende Werthe vorkommen können. Jede Pyramide hat vier längere schärfere, und vier kürzere stumpfere Polkanten, sowie zwei spitzere und zwei stumpfere Mittelecke, welche beiderlei Begränzungs-Elemente nach ihrer Lage in denen durch die Grundform bestimmten Hauptschnitten ganz allgemein als makrodiagonale und brachydiagonale Polkanten und Mittelecke unterschieden werden. Es giebt möglicherweise eine unendliche Manchfaltigkeit von rhombischen Pyramiden, nach Maassgabe der verschiedenen Werthe von a, b und c, und von *m*, *r* und *s*; auch unterscheidet man wohl solche gleichfalls als spitze und als stumpfe Pyramiden, je nachdem die Hauptaxe *m*a grösser oder kleiner als die grössere der beiden Nebenaxen ist.

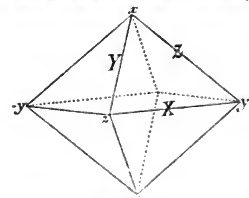


Fig. 79.

Alle übrigen holoëdrischen Formen des rhombischen Systems sind offene Formen, und erscheinen einestheils als prismatische Formen von rhombischen Querschnitten, anderntheils als Pinakoide, d. h. als einzelne, den Coordinat-Ebenen parallele Flächenpaare.

Die prismatischen Formen sind aber dreierlei, je nachdem ihre Flächen der einen oder der anderen Axe parallel laufen; sie erscheinen daher

theils als verticale Prismen, theils als zweierlei verschiedene horizontale Prismen. Für die Uebersicht und Unterscheidung dieser Formen gewährt es nun eine grosse Erleichterung, sie auch in der Nomenclatur zu unterscheiden; nach dem Vorgange von *Breithaupt* gebrauchen wir daher das Wort Prisma lediglich für die verticalen Prismen, nennen ein jedes horizontale Prisma ein Doma, und unterscheiden diese Domen als Makrodomen und Brachydomen, je nachdem sie der Makrodiagonale oder der Brachydiagonale der Grundform parallel sind.

2. Die Prismen sind also von 4, der Hauptaxe parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhombus ist, und welche in der Richtung der Hauptaxe eine indefinite Ausdehnung und gar keine selbständige Begränzung haben. Ihre Seitenkanten werden nach ihrem Winkelmaasse als scharfe und stumpfe, nach ihrer Lage als makrodiagonale und brachydiagonale unterschieden.

3. Die Makrodomen sind von 4, der Makrodiagonale parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhombus ist, und welchen in der Richtung der Makrodiagonale, als ihrer Längsaxe, jede bestimmte Ausdehnung und selbständige Begränzung abgeht. Ihre horizontal liegenden Kanten werden nach ihrem Winkelmaasse als scharfe und stumpfe, nach ihrer Lage als Polkanten und Mittelkanten unterschieden.

4. Die Brachydomen sind von 4, der Brachydiagonale parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhombus ist, und welche in der Richtung der Brachydiagonale, als ihrer Längsaxe, von indefiniter Ausdehnung und ohne selbständige Begränzung sind. Ihre Kanten werden eben so unterschieden, wie jene der Makrodomen.

Die Pinakoide sind ebenfalls dreierlei, je nachdem ihre Flächen dem einen oder dem anderen Hauptschnitte parallel sind; wir unterscheiden daher

5. die Basis oder das Basopinakoid, dessen Flächen der Basis,
6. das Makropinakoid, dessen Flächen dem makrodiagonalen Hauptschnitte, und
7. das Brachypinakoid, dessen Flächen dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallel liegen.

Anm. Die Prismen, die Domen und die Pinakoide können natürlich für sich allein gar nicht vorkommen, so dass die Combination mit einander oder mit irgend anderen Formen eine nothwendige Bedingung ihrer Erscheinung ist. Die Prismen und Domen bedingen die säulenförmigen, die Pinakoide dagegen die tafelförmigen Krystalle des Systems,

§. 164. Grundform; Ableitung und Bezeichnung der holoëdrischen Formen.

Als Grundform muss in jeder rhombischen Krystallreihe irgend eine wirklich vorhandene, oder wenigstens eine durch andere Formen angezeigte Pyramide gewählt werden. Für diese Grundform, welche wir mit P bezeichnen, wird ferner eine ihrer Axen als Hauptaxe zu wählen, und da-

durch die Stellung des Axensystems sowie die Unterscheidung der Makrodiagonale und der Brachydiagonale zu bestimmen sein. Dann liefert uns die halbe Hauptaxe den Parameter a, die halbe Makrodiagonale den Parameter b, die halbe Brachydiagonale den Parameter c, und das Verhältniss dieser drei Grundparameter a : b : c ist es, welches allen Ableitungen zu Grunde liegt.

Da nun alle drei Axen ungleichwerthig sind, so werden solche, als veränderliche Grössen gedacht, von einander unabhängige veränderliche Grössen darstellen; d. h. jede Axe wird für sich allein der Veränderung zu unterwerfen sein. Betrachten wir nun zuvörderst die Hauptaxe als veränderlich, indem wir sie mit einer Zahl m multipliciren, welche theils grösser, theils kleiner als 1 sein, und einerseits bis ∞ wachsen, anderseits bis 0 abnehmen kann, so erhalten wir durch Anwendung desselben Verfahrens, welches bereits oben in den §§. 88 und 118 vorausgesetzt wurde, den vollständigen Inbegriff aller derjenigen Pyramiden, welche dieselbe Figur der Basis haben, wie die Grundform P, und wegen ihres unmittelbaren Zusammenhanges mit P, so wie deshalb, weil sie die ersten Resultate der Ableitung sind, füglich Protopyramiden genannt werden können. Alle diese Pyramiden lassen sich wieder in einer Reihe von der Form

$$\text{0P} \ldots\ldots \underset{}{\overset{m<1}{m\text{P}}} \ldots\ldots \text{P} \ldots\ldots \overset{m>1}{m\text{P}} \ldots\ldots \infty\text{P}$$

zusammenstellen, deren eines Gränzglied das Protoprisma ∞P, deren anderes Gränzglied die Basis oder das Basopinakoid 0P ist.

Aus jedem Gliede mP dieser Grundreihe lassen sich nun ferner einerseits durch Vergrösserung der Brachydiagonale bei constanter Makrodiagonale, anderseits durch Vergrösserung der Makrodiagonale bei constanter Brachydiagonale, verschiedene andere Formen ableiten, so dass die weiteren Ableitungen nach zwei Richtungen auseinander gehen, je nachdem diese oder jene Nebenaxe als veränderlich gedacht wird. Nennen wir n diejenige Zahl, welche als Factor einer dieser Nebenaxen eingeführt wird, und stets > 1 sein muss, aber bis ∞ wachsen kann, so liefert uns jeder endliche Werth von n eine neue Pyramide, welche entweder in der Richtung der Brachydiagonale, oder in der Richtung der Makrodiagonale über mP selbst in die Länge gestreckt sein wird, während sie mit dieser Pyramide im ersteren Falle den makrodiagonalen, im anderen Falle den brachydiagonalen Hauptschnitt gemein hat. Wir unterscheiden diese beiderlei Pyramiden, welche aus einer und derselben Protopyramide mP abgeleitet werden können, durch die Namen der Brachypyramiden und Makropyramiden, um es auszudrücken, durch welcher Diagonale Vervielfachung sie erhalten worden sind.*) In der Bezeichnung aber lassen sie sich sehr einfach dadurch unterscheiden, dass über das Grundelement P die prosodischen Zeichen der Kürze und Länge gesetzt werden, weil es ja doch die Diagonalen der Grundform sind, auf welche

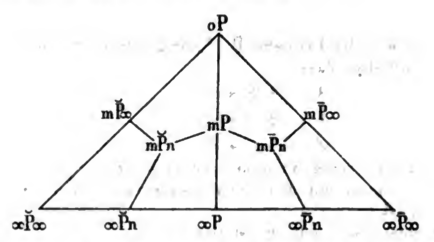
*) Richtiger würde es allerdings sein, sie Brachydiagonal- und Makrodiagonal-Pyramiden zu nennen. Da aber in der Nomenclatur sehr viel auf mögliche Kürze ankommt, so erlauben wir uns diese Abkürzung.

sich der Factor n bezieht. Sonach wird $m\breve{P}n$ das allgemeine Zeichen einer Brachypyramide, und $m\bar{P}n$ das allgemeine Zeichen einer Makropyramide.

Je grösser der Werth von n wird, um so mehr wird sich die abgeleitete Pyramide in der Richtung derjenigen Diagonale verlängern, deren Namen sie führt; für $n = \infty$ aber verwandelt sich die Pyramide in ein horizontales Prisma oder in ein Doma, dessen Längsaxe die gleichnamige Diagonale ist. Daher werden $m\breve{P}\infty$ und $m\bar{P}\infty$ die allgemeinen Zeichen der Brachydomen und Makrodomen.

Da diese Ableitung aus jedem Gliede der Grundreihe vorzunehmen ist, so wird sie auch für das Protoprisma ∞P geltend zu machen sein, aus welchem sie uns auf zwei Reihen von Prismen, auf Brachyprismen $\infty\breve{P}n$, und auf Makroprismen $\infty\bar{P}n$ gelangen lässt, als deren Gränzglieder sich das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$, und das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$ herausstellen.

Anm. Hiermit sind denn alle Ableitungen erschöpft, deren Resultate sich auf verschiedene Weise in einem Schema zusammenstellen lassen, um eine vollständige und wohlgeordnete Uebersicht derselben zu erlangen. Eines der einfachsten Schemen ist das nachstehende trianguläre.



Die Grundreihe der Protopyramiden steht hier in der Höhenlinie des Dreieckes, und theilt somit das ganze Schema in zwei Hälften, von denen die eine die makrodiagonalen, die andere die brachydiagonalen Formen begreift, deren allgemeine Repräsentanten $m\bar{P}n$ und $m\breve{P}n$ in der Mitte der beiden Dreieckshälften stehen. Die Grundlinie des Dreiecks begreift die sämmtlichen Prismen, einschliesslich der beiden verticalen Pinakoide; die rechte Dreieckseite begreift sämmtliche Makrodomen, die linke Dreieckseite sämmtliche Brachydomen, welche beide in der Basis 0P ihre Gränze erreichen.

§. 165. Berechnung der rhombischen Pyramiden.

Wir können die Berechnung der rhombischen Pyramiden ganz allgemein und ohne Rücksicht auf die besondere Stellung und Benennung derselben durchführen, indem wir zunächst die Grundform P von dem Parameter-Verhältnisse a : b : c berechnen; denn was von dieser gilt, das gilt auch mutatis mutandis von jeder anderen Pyramide. Zuvörderst müssen wir uns aber über die Sig-

natur der verschiedenen Elemente verständigen, welche überhaupt einen Gegenstand unsrer Rechnungen bilden sollen.

Es sind nun besonders die Kantenlinien, die Hauptschnittwinkel und die Kantenwinkel, deren Berechnung auch in praktischer Hinsicht einige Wichtigkeit erlangt. Wir bezeichnen in jeder Pyramide*)

die Mittelkanten mit X,
die brachyd. Polkanten mit Y,
die makrod. Polkanten mit Z;

ferner bezeichnen wir den Neigungswinkel
der Kantenlinie X gegen die Brachydiagonale mit δ,
- - - - - Makrodiagonale mit ε,
- - Y - - Hauptaxe mit ϑ,
- - - - - Brachydiagonale mit η,
- - Z - - Makrodiagonale mit τ,
- - - - - Hauptaxe mit ι.

Diese sechs Winkel, welche wir die Hauptschnittwinkel nennen, sind natürlich paarweise complementär, so dass

$$\delta + \varepsilon = 90^0,\ \vartheta + \eta = 90^0,\ \tau + \iota = 90^0;$$

desungeachtet ist es nützlich, sie durch besondere Buchstaben zu unterscheiden.

1. Kantenlinie der Pyramide P. Es folgt aus der Rechtwinkeligkeit der Axen unmittelbar, dass

$$X = \sqrt{b^2+c^2},$$
$$Y = \sqrt{c^2+a^2},$$
$$Z = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Diese Ausdrücke gelten allgemein für jede andere Pyramide, wenn man die betreffenden Parameter mit den ihnen zukommenden Ableitungszahlen multiplicirt; daher ist

für jede Protopyramide mP, ma statt a,
für jede Makropyramide $m\bar{P}n$, ma statt a, und nb statt b,
für jede Brachypyramide $m\breve{P}n$, ma statt a, und nc statt c

zu setzen, um die Länge ihrer Kantenlinien zu finden.

2. Hauptschnittwinkel der Pyramide P.

a. Als Functionen der Kantenwinkel:

$$\cos\delta = \frac{\cos Y}{\sin X},\ \cos\varepsilon = \frac{\cos Z}{\sin X},$$
$$\cos\vartheta = \frac{\cos Z}{\sin Y},\ \cos\eta = \frac{\cos X}{\sin Y},$$
$$\cos\tau = \frac{\cos X}{\sin Z},\ \cos\iota = \frac{\cos Y}{\sin Z}.$$

---

*) Um die Signatur dieser Begränzungs-Elemente in nähere Beziehung zu der Signatur der Elemente des Axensystems zu bringen, geben wir in diesem und den folgenden Krystallsystemen den Buchstaben X, Y und Z eine andere Bedeutung, als bisher.

b. Als Functionen der Parameter:

$$\tang\delta = \frac{b}{c}, \quad \tang\varepsilon = \frac{c}{b},$$

$$\tang\vartheta = \frac{c}{a}, \quad \tang\eta = \frac{a}{c},$$

$$\tang\tau = \frac{a}{b}, \quad \tang\iota = \frac{b}{a};$$

in welchen Ausdrücken wiederum
für jede Protopyramide mP, ma statt a,
für jede Makropyramide $m\bar{P}n$, ma statt a, und nb statt b,
für jede Brachypyramide $m\breve{P}n$, ma statt a, und nc statt c
zu setzen ist, um die Hauptschnittwinkel dieser Pyramiden aus ihren Parametern zu berechnen.

3. Kantenwinkel der Pyramide P.

a. Als Functionen der Hauptschnittwinkel:

$$\tang X = \frac{\tang\tau}{\sin\varepsilon} = \frac{\tang\eta}{\sin\delta},$$

$$\tang Y = \frac{\tang\delta}{\sin\eta} = \frac{\tang\iota}{\sin\vartheta},$$

$$\tang Z = \frac{\tang\vartheta}{\sin\iota} = \frac{\tang\varepsilon}{\sin\tau}.$$

b. Als Functionen der Parameter:

$$\cos X = \frac{bc}{\sqrt{K}}, \quad \cos Y = \frac{ca}{\sqrt{K}}, \quad \cos Z = \frac{ab}{\sqrt{K}},$$

worin $K = a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2$. Hieraus folgen die Proportionen:

$$\cos X : \cos Y = b : a$$
$$\cos Z : \cos X = a : c$$
$$\cos Y : \cos Z = c : b$$

Die Cosinus der ganzen Kantenwinkel endlich werden:

$$\cos 2X = \frac{b^2c^2 - a^2b^2 - c^2a^2}{K},$$

$$\cos 2Y = \frac{c^2a^2 - b^2c^2 - a^2b^2}{K},$$

$$\cos 2Z = \frac{a^2b^2 - c^2a^2 - b^2c^2}{K}$$

In allen diesen Ausdrücken hat man abermals
für irgend eine Protopyramide mP, ma statt a,
für jede Makropyramide $m\bar{P}n$, ma statt a, und nb statt b,
für jede Brachypyramide $m\breve{P}n$, ma statt a, und nc statt c
einzusetzen, um die Kantenwinkel dieser Pyramiden aus ihren Parametern zu berechnen.

§. 166. Berechnung der prismatischen Formen.

Die Kantenlinien bilden in den Prismen und Domen keinen Gegenstand der Berechnung, weshalb wir es bei ihnen nur noch mit den Winkeln zu thun haben. Da nun in den verticalen Prismen X, in den Makrodomen Y, und in den Brachydomen Z ein rechter Winkel ist, so folgt daraus, dass die noch übrigen Kantenwinkel dieser prismatischen Formen mit ihren Hauptschnitwinkeln identisch sind.

1. Winkel des Protoprismas ∞P; sie ergeben sich aus den in §. 165 gefundenen Winkeln, wenn man in den betreffenden Ausdrücken ∞a statt a setzt; man findet so:

$$\tang Y = \tang \delta = \frac{b}{c},$$

$$\tang Z = \tang \varepsilon = \frac{c}{b},$$

$$\text{also } Y + Z = 90^0;$$

$$\cos Y = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},\ \cos Z = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

$$\cos 2Y = -\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2},\ \cos 2Z = -\cos 2Y.$$

Für jedes Makroprisma $\infty\bar{P}n$ ist nb statt b, und für jedes Brachyprisma $\infty\breve{P}n$ nc statt c zu setzen.

2. Winkel des ersten Makrodomas $\bar{P}\infty$; sie folgen aus den in §. 165 gefundenen Ausdrücken, wenn darin ∞b statt b gesetzt wird; man erhält so:

$$\tang X = \tang \eta = \frac{a}{c},\qquad \tang Z = \tang \vartheta = \frac{c}{a},$$

$$\text{also } Z + X = 90^0;$$

$$\cos X = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\qquad \cos Z = \frac{a}{\sqrt{c^2+a^2}};$$

$$\cos 2X = \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2},\ \cos 2Z = -\cos 2X.$$

Für jedes andere Makrodoma $m\bar{P}\infty$ ist ma statt a zu setzen.

3. Winkel des ersten Brachydomas $\breve{P}\infty$; man erhält sie aus den in §. 165 gefundenen Winkeln, indem man ∞c statt c einführt;

$$\tang X = \tang \tau = \frac{a}{b},$$

$$\tang Y = \tang \iota = \frac{b}{a},$$

$$\text{also } X + Y = 90^0;$$

$$\cos X = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos Y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos 2X = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2},\ \cos 2Y = -\cos 2X.$$

Für irgend ein anderes Brachydoma $m\breve{P}\infty$ ist wiederum ma statt a zu setzen.

Zweites Capitel.

Hemiëdrische und sonstige meroëdrische Ausbildung des rhombischen Systems.

§. 167. Sphenoidische Hemiëdrie.

Da die allgemeinsten Formen des rhombischen Systems, die rhombischen Pyramiden, nur von acht Flächen gebildet werden, so lässt sich auch die Hemiëdrie, als eine rings um das Axensystem symmetrisch eintretende Meroëdrie, nur in der einzigen Modalität denken, dass diese Pyramiden mit ihren abwechselnden einzelnen Flächen zur Ausbildung gelangt sind. Sie verwandeln sich dadurch in rhombische Sphenoide, weshalb denn auch diese Hemiëdrie die sphenoidische Hemiëdrie genannt werden kann.

Die rhombischen Sphenoide sind von 4 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren im Zickzack auf- und absteigende Mittelkanten sich als zwei längere stumpfere, und zwei kürzere schärfere unterscheiden, während ihre zwei Polkanten horizontal liegen. Ihre drei centralen Querschnitte sind dieselben Rhomben, wie jene der holoëdrischen Stammform.

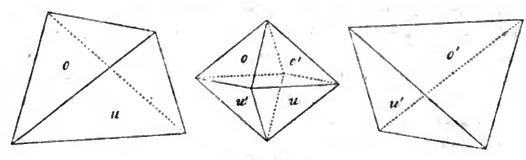


Fig. 80.

Jede Pyramide liefert natürlich zwei complementäre Sphenoide, welche nicht nur eine Verschiedenheit der Stellung, sondern auch eine sehr wesentliche, durch keine Stellungs-Aenderung aufzuhebende Verschiedenheit der Gestaltung zeigen, indem sie sich zu einander wie ein paar rechts und links gebildete Körper verhalten. Sie sind also enantiomorph, und werden demgemäss durch Vorsetzung der Buchstaben *d* und *l* zu unterscheiden sein, so dass z. B. $d\frac{mP}{2}$ und $l\frac{mP}{2}$ die allgemeinen Zeichen der beiden aus derselben Protopyramide mP abgeleiteten Sphenoide werden.

Die prismatischen Formen des Systems erleiden durch diese Hemiëdrie zwar keine wesentliche Gestaltveränderung, weil ihnen, wie sich leicht erkennen lässt, ihre volle Flächenzahl bleibt; allein die Bedeutung ihrer Flächen wird dennoch eine ganz verschiedene, so dass die abwechselnden Flächen in den verticalen Prismen als obere und als untere, in den Domen als rechte und linke Flächen zu beurtheilen sind, was in denjenigen Fällen, da eine mit dieser Hemiëdrie behaftete Krystallreihe zugleich nach der

einen oder der anderen Axe dem Hemimorphismus unterworfen ist, auf die Erscheinungsweise der betreffenden prismatischen Formen von wesentlichem Einflusse sein wird, weil solche dann nur noch mit zwei Flächen ausgebildet sein können.

Die drei Pinakoide endlich bleiben bei dieser Hemiëdrie gänzlich unverändert, obgleich sich auch für sie eine verschiedene Bedeutung der Flächen geltend macht.

Anm. Diese Hemiëdrie, welche man bis vor einigen Jahren nur an sehr wenigen Körpern, und zwar besonders ausgezeichnet an den künstlichen Krystallen des Bittersalzes und Zinkvitriols kannte, ist in neuerer Zeit durch die wichtigen Arbeiten von *Pasteur* und *Schabus* *) an vielen künstlich dargestellten Salzen nachgewiesen worden, so dass sie gegenwärtig als eine ziemlich häufig vorkommende Erscheinung betrachtet werden kann. Auch hat *Pasteur* gezeigt, dass sie zugleich mit der circularen Polarisation des Lichtes verbunden ist, wie sich diess auch bei der so entschieden ausgesprochenen Enantiomorphie vermuthen liess. In einigen Fällen sind die betreffenden Krystalle zugleich dem Hemimorphismus unterworfen, wodurch die scheinbare Unregelmässigkeit ihrer Gestaltung nicht wenig gesteigert wird.

§. 168. Berechnung der rhombischen Sphenoide.

Die Berechnung der rhombischen Sphenoide ist eine sehr einfache und gewissermaassen schon gelöste Aufgabe, weil eine leichte geometrische Betrachtung lehrt, dass ihre Kantenlinien doppelt so lang sein müssen, wie die Kantenlinien ihrer holoëdrischen Stammformen, während sich ihre Kantenwinkel als die Supplemente der Winkel dieser letzteren bestimmen. Bezeichnen wir also in dem rhombischen Sphenoide

die Polkanten mit X',
die kürzeren Mittelkanten mit Y',
die längeren Mittelkanten mit Z',

so bestimmen sich die Kantenlinien, wie folgt:

$$X' = 2\sqrt{b^2+c^2} = 2X \text{ in §. 165},$$
$$Y' = 2\sqrt{c^2+a^2} = 2Y \text{ in §. 165},$$
$$Z' = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2Z \text{ in §. 165}.$$

Die Cosinus der Kantenwinkel aber ergeben sich unmittelbar aus §. 165 mit den Werthen:

$$\cos X' = \frac{a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{K}$$
$$\cos Y' = \frac{b^2c^2+a^2b^2-c^2a^2}{K}$$

---

*) *Pasteur* in den Ann. de Chimie et de Physique, 3. série, voll. 31, 38 u, a.; *Schabus* in seiner, von der Kais. Akademie der Wissensch. gekrönten Preisschrift: Bestimmung der Krystallgestalten in chemischen Laboratorien erzeugter Producte, 1855, S. 34, 49, 78 und 85.

$$\cos Z' = \frac{c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2}{K}$$

worin abermals $K = a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2$ ist.

Setzt man in diesen Ausdrücken ∞a statt a, so gelangt man auf die Winkel des verticalen Prismas ∞P; während eben so die Substitution von ∞b für b, oder von ∞c für c auf die Winkel der beiderlei Domen gelangen lässt, wodurch denn die in §. 167 ausgesprochenen Folgerungen über die anderweite Wirkung dieser Hemiëdrie ihre Bestätigung finden.

§. 169. Meroëdrie mit monoklinoëdrischem Formentypus.

Es giebt einige Krystallreihen, wie z. B. jene des Wolframs und des Datolithes, welche zwar durch das Auftreten dreier auf einander rechtwinkeliger Systeme von prismatischen Formen ganz unzweifelhaft als rhombische Krystallreihen charakterisirt werden, dennoch aber in der Ausbildungsweise ihrer Formen einen an das monoklinoëdrische System erinnernden Gestaltungs-Typus zeigen. Bei ihnen macht sich nämlich ausnahmsweise eine Art von Meroëdrie geltend, wie solche in dem genannten Systeme als ein nothwendiges Bildungsgesetz ganz allgemein angetroffen wird.

Diese Meroëdrie, welche sich, bei dem Mangel einer ringsum symmetrischen Ausbildung, nicht füglich auf den Begriff der Hemiëdrie zurückführen lässt, ist darin begründet, dass sich in einem der beiden verticalen Hauptschnitte gleichsam ein Gegensatz der vier Quadranten einsetzt, indem zwei Gegenquadranten die bleibenden, die beiden anderen die verschwindenden Flächen bestimmen. Dadurch wird sowohl für die Pyramiden, als auch für diejenigen prismatischen Formen, deren Längsaxe auf jenem Hauptschnitte normal ist, eine Zerfällung in zwei, von einander unabhängige Partialformen verursacht; jede Pyramide tritt zunächst nur mit zwei gegenüberliegenden Flächenpaaren, als eine Hemipyramide, und jede solche prismatische Form nur mit zwei Gegenflächen, als ein Hemidoma auf. Soll nämlich in der Erscheinungsweise der Formen die Symmetrie nach rechts und links noch erhalten bleiben, so muss nothwendig eine von denjenigen beiden Axen zur Hauptaxe gewählt werden, welche in dem die Meroëdrie bestimmenden Hauptschnitte enthalten sind. Diess sind aber genau die Symmetrie-Verhältnisse des monoklinoëdrischen Systems, daher man von dergleichen rhombischen Krystallreihen sagen kann, dass sie mit monoklinoëdrischem Formentypus ausgebildet sind; sie lassen sich gewissermaassen als solche monoklinoëdrische Krystallreihen betrachten, in welchen der schiefe Neigungswinkel der Axen $= 90^0$ geworden ist, oder richtiger, in welchen die Neigungswinkel zweier Axen eine verschiedene Bedeutung gewonnen haben, ohne dass eine Verschiedenheit ihrer Grösse eingetreten ist.

Um diese eigenthümliche Meroëdrie der rhombischen Formen und Combinationen in der Bezeichnung auszudrücken, dazu kann man sich immerhin der Zeichen $\pm\frac{mPn}{2}$ für die Hemipyramiden, und $\pm\frac{mP\infty}{2}$ für die betreffenden

Hemidomen bedienen, weil ja eine Verwechslung mit der sphenoidischen Hemiëdrie nicht vorkommen kann, sobald bei der Beschreibung der Krystallreihe die Meroëdrie mit monoklinoëdrischem Formentypus als eine Eigenthümlichkeit derselben erwähnt worden ist.

Anm. Man hat dergleichen rhombische Krystallreihen als Beweise für die Richtigkeit der Ansicht angeführt, dass überhaupt alle monoklinoëdrische Krystallreihen auf ähnliche Weise zu betrachten, d. h. als meroëdrische Krystallreihen des rhombischen Systems, gleichsam als hemirhombische Krystallreihen zu deuten seien. Allein die Coëxistenz dreier auf einander rechtwinkeliger Zonen, welche als die Repräsentanten der drei orthoëdrischen Axen in jeder rhombischen Krystallreihe eine so eminente Bedeutung erlangen, und von denen keine durch die so eben erläuterte Meroëdrie eliminirt werden kann: die Coëxistenz dieser drei Zonen wird in den meisten wirklich monoklinoëdrischen Krystallreihen so entschieden vermisst, während solche in einigen wenigen nur in so untergeordneter Weise nachzuweisen ist, dass wir uns schon aus diesem Grunde jener Ansicht nicht anschliessen können. Noch weit auffallender tritt dieser Mangel dreier auf einander rechtwinkeliger Zonen in dem triklinoëdrischen Systeme hervor, welches man eben so als eine tetartoëdrische Ausbildung des rhombischen Systems zu deuten versucht hat, obgleich durch die dabei vorausgesetzte sogenannte Tetartoëdrie jene Zonen durchaus nicht verschwinden könnten.

Drittes Capitel.

Combinationen des rhombischen Systems.

§. 170. Holoëdrische Combinationen des rhombischen Systems.

Da die sphenoidischen Combinationen des rhombischen Systems lediglich durch die eigenthümliche Ausbildungsweise der rhombischen Pyramiden charakterisirt sind, deren Flächen meist untergeordnet aufzutreten pflegen, so hat die Erkennung dieser Combinationen keine Schwierigkeit, während ihre Entwickelung denselben allgemeinen Regeln unterliegt, wie jene der holoëdrischen Combinationen. Demnach haben wir uns nur mit diesen Combinationen zu beschäftigen. Die Entwickelung derselben beruht zunächst auf der Theorie der binären Combinationen, welche nur dann allgemein durchzuführen ist, wenn wir dabei die Combination irgend zweier rhombischer Pyramiden voraussetzen, von denen die eine als vorherrschende, die andere als untergeordnete Form gedacht wird.

Wir können diese beiden Pyramiden vorläufig ganz unbestimmt lassen, ohne ihre besonderen Verhältnisse zu berücksichtigen, bezeichnen sie demnach mit P und P′, und ihre Parameter-Verhältnisse mit $a : b : c$ und $a' : b' : c'$.

Dann lehrt eine einfache Betrachtung, dass die möglichen Combinations-

Erscheinungen und die denselben entsprechenden Bedingungen folgende sind: es bildet die untergeordnete Pyramide P′ an der vorherrschenden Pyramide P

1. eine Zuschärfung der makrodiagonalen Polkanten, wenn $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, und $\frac{a'}{c'} < \frac{a}{c}$;
2. eine Zuschärfung der brachydiagonalen Polkanten, wenn $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$, und $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$, und $a' > a$;
4. eine vierflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, und $\frac{a'}{c'} < \frac{a}{c}$;
5. eine vierflächige Zuspitzung der makrodiagonalen Mittelecke, wenn $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$, und $\frac{b'}{c'} < \frac{b}{c}$;
6. eine vierflächige Zuspitzung der brachydiagonalen Mittelecke, wenn $\frac{a'}{c'} > \frac{a}{c}$, und $\frac{b'}{c'} > \frac{b}{c}$.

In diesen sechs Fällen sind alle möglichen Verhältnisse der binären rhombischen Combinationen enthalten, und es ist nur noch zu zeigen, wie diese allgemeinen Regeln für die Combinationen der verschiedenen Arten von Pyramiden zu benutzen sind.

§. 171. Combinationen zweier gleichnamiger Pyramiden.

Bei dem Gebrauche der im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln ist zunächst der Unterschied zu beachten, ob die beiden combinirten Formen gleichnamig oder ungleichnamig sind; ein Unterschied, welcher zwar für die Formen der Grundreihe keine Bedeutung hat, für die übrigen Formen aber sehr wichtig wird. Ferner wird es nöthig, die durch die Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a'}{b'}$ u. s. w. ausgedrückten Bedingungen als Functionen der Ableitungszahlen m, n, m' und n' darzustellen, weil sie nur dadurch eine unseren krystallographischen Zeichen entsprechende Form gewinnen.

Wir wollen nun erst den Fall betrachten, da beide Pyramiden gleichnamig, also entweder Protopyramiden, oder Makropyramiden, oder Brachypyramiden sind.

I. Beide Formen sind Protopyramiden, also mP und m'P.

Dann sind die Combinationskanten horizontal, und m'P bildet an mP entweder

eine vierflächige Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$, oder
eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $m' > m$.

II. Beide Formen sind **Makropyramiden**, also $m\bar{P}n$ und $m'\bar{P}n'$. Dann haben wir

für $m\bar{P}n$ statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : nb : c$,
für $m'\bar{P}n'$ statt $a' : b' : c'$ das Verhältniss $m'a : n'b : c$

einzuführen, und es wird daher

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b}, \text{ wenn } \frac{m'}{n'} >=< \frac{m}{n},$$

$$\frac{a'}{c'} >=< \frac{a}{c}, \text{ wenn } m' >=< m,$$

$$\frac{b'}{c'} >=< \frac{b}{c}, \text{ wenn } n' >=< n.$$

Folglich bildet $m'\bar{P}n'$ an $m\bar{P}n$

1. eine Zuschärfung der makrod. Polk., wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, und $m' < m$;
2. eine Zuschärfung der brachyd. Polk., wenn $m' = m$, und $n' > n$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $n' = n$, und $m' > m$;
4. eine vierfl. Zuspitzung der Polecke, wenn $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$, und $m' < m$; dabei werden die Combinationskanten horizontal, wenn $n' = n$;
5. eine vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke, wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$, und $n' < n$; dabei werden die Combinationskanten parallel den brachydiagonalen Polkanten von $m\bar{P}n$, wenn $m' = m$;
6. eine vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke, wenn $m' > m$, und $n' > n$; dabei werden die Combinationskanten parallel den makrodiagonalen Polkanten von $m\bar{P}n$, wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$.

III. Beide Formen sind Brachypyramiden, also $m\breve{P}n$ und $m'\breve{P}n'$. In diesem Falle haben wir

für $m\breve{P}n$ statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : b : nc$,
für $m'\breve{P}n'$ statt $a' : b' : c'$ das Verhältniss $m'a : b : n'c$

einzuführen, und es wird daher

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b}, \text{ wenn } m' >=< m,$$

$$\frac{a'}{c'} >=< \frac{a}{c}, \text{ wenn } \frac{m'}{n'} >=< \frac{m}{n},$$

$$\frac{b'}{c'} >=< \frac{b}{c}, \text{ wenn } n' <=> n.$$

Folglich bildet $m'\breve{P}n'$ an $m\breve{P}n$

1. eine Zuschärfung der makrod. Polk., wenn $m' = m$, und $n' > n$;
2. eine Zuschärfung der brachyd. Polk., wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, und $m' < m$;
3. eine Zuschärfung der Mittelkanten, wenn $n' = n$, und $m' > m$;

4. eine vierfl. Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < m$, und $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$; dabei werden die Combinationskanten horizontal, wenn $n' = n$;
5. eine vierfl. Zuspitzung der makrod. Mittelecke, wenn $m' > m$, und $n' > n$; dabei werden die Combinationskanten parallel den brachydiagonalen Polkanten von $m\bar{P}n$, wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$;
6. eine vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke, wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$, und $n' < n$; wobei die Combinationskanten den makrodiagonalen Polkanten von $m\bar{P}n$ parallel werden, wenn $m' = m$.

§. 172. Combinationen zweier ungleichnamiger Pyramiden.

Wenn die beiden Pyramiden ungleichnamig sind, so ist die vorherrschende entweder eine Makropyramide, oder eine Brachypyramide.

I. Die vorherrschende Form ist eine Makropyramide $m\bar{P}n$, die untergeordnete eine Brachypyramide $m'\breve{P}n'$.

In diesem Falle haben wir

für $m\bar{P}n$ statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : nb : c$,
für $m'\breve{P}n'$ statt $a' : b' : c'$ das Verhältniss $m'a : b : n'c$

einzuführen, und es wird daher

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b}, \text{ wenn } m' >=< \frac{m}{n},$$

$$\frac{a'}{c'} >=< \frac{a}{c}, \text{ wenn } \frac{m'}{n'} >=< m,$$

$$\frac{b'}{c'} >=< \frac{b}{c}, \text{ wenn } \frac{1}{n'} >=< n.$$

Da nun aber sowohl n als n' stets > 1 ist, so muss $\frac{1}{n'}$ stets $< n$, und folglich auch $\frac{b'}{c'}$ stets $< \frac{b}{c}$ sein, wodurch denn die möglichen Combinations-Verhältnisse auf Nr. 1, 4 und 5 beschränkt werden.

II. Die vorherrschende Form ist eine Brachypyramide $m\breve{P}n$, die untergeordnete eine Makropyramide $m'\bar{P}n'$.

In diesem Falle haben wir

für $m\breve{P}n$ statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : b : nc$,
für $m'\bar{P}n'$ statt $a' : b' : c'$ das Verhältniss $m'a : n'b : c$

einzuführen, und es wird daher

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b}, \text{ wenn } \frac{m'}{n'} >=< m,$$

$$\frac{a'}{c'} >=< \frac{a}{c}, \text{ wenn } m' >=< \frac{m}{n},$$

$$\frac{b'}{c'} > = < \frac{b}{c}, \text{ wenn } n' > = < \frac{1}{n}.$$

Da nun n und n' stets > 1 sind, so muss auch n' stets $> \frac{1}{n}$ sein, woraus denn folgt, dass nur noch die Bedingung $\frac{b'}{c'} > \frac{b}{c}$ vorkommen kann, wodurch die möglichen Combinations-Verhältnisse auf Nr. 2, 4 und 6 beschränkt werden.

Hieraus ergeben sich für die Combinationen zweier ungleichnamiger Formen überhaupt folgende Regeln.

Die Flächen der untergeordneten Form $m'Pn'$ erscheinen jedenfalls paarweise an denjenigen Polkanten der vorherrschenden Form mPn, welche mit dieser letzteren gleichnamig sind, (also z. B. die Flächen einer Brachypyramide an den makrodiagonalen Polkanten einer Makropyramide, und umgekehrt), und bilden

1. eine Zuschärfung dieser Polkanten, wenn $m' = \frac{m}{n}$,
2. eine vierfl. Zuspitzung der Polecke, wenn $m' < \frac{m}{n}$,
3. eine vierfl. Zuspitz. der Mittelecke, wenn $m' > \frac{m}{n}$, und zwar sind die Combinationskanten parallel mit den anderen Polkanten von mPn, wenn $\frac{m'}{n'} = m$ ist.

Anm. Aus den in diesen drei Paragraphen mitgetheilten Regeln wird man sich leicht auch diejenigen ableiten können, welche für die Combinationen von Pyramiden mit prismatischen Formen, oder für die Combinationen der verschiedenen prismatischen Formen unter einander gelten, wobei natürlich der die Erscheinungsweise der Combination darstellende wörtliche Ausdruck angemessene Veränderungen erleiden wird. Ist z. B. die vorherrschende Form eine Pyramide, die untergeordnete dagegen ein Prisma oder ein Doma, so wird jede Kantenzuschärfung in eine Kantenabstumpfung, und jede vierflächige Zuspitzung eines Eckes in eine Zuschärfung desselben übergehen. Ist aber die vorherrschende Form z. B. ein verticales Prisma, so wird ein solches Prisma durch jede Pyramide mit einer vierflächigen Zuspitzung, durch jedes Doma mit einer Zuschärfung, durch die Basis mit zwei geraden Endflächen behaftet werden, dagegen durch andere (verticale) Prismen Zuschärfungen, und durch die verticalen Pinakoide Abstumpfungen seiner makrodiagonalen oder brachydiagonalen Seitenkanten erleiden.

Viertes Capitel.

Zonenlehre des rhombischen Systems.

§. 173. Allgemeine Betrachtung über die Zonen dieses Systems.

Wenn schon in den bisher betrachteten Krystallsystemen die Entwickelung der Combinationen in der Zonenlehre ein sehr wichtiges Hilfsmittel vorfand, so erlangt diese Lehre eine noch weit grössere Bedeutung für die Combinationen des rhombischen Systems und der klinoëdrischen Krystallsysteme, in welchen die immer kleinere Flächenzahl der einzelnen Formen nicht nur gewöhnlich eine zahlreichere Ausbildung von Formen überhaupt, sondern auch eine grössere Anzahl von gegenseitigen Durchschnitten, und somit eine vielseitigere Entfaltung der Zonen zur Folge hat. Dieselbe Ursache bedingt es übrigens, dass die gleichartigen oder gleichnamigen Zonen grösstentheils in einer geringeren Anzahl vorhanden sind, als diess in den bisherigen Krystallsystemen der Fall war.

Die Zonenlehre ist für die drei klinoëdrischen Krystallsysteme wesentlich dieselbe, wie für das rhombische System, weil alle diese Systeme trimetrisch und zugleich anisometrisch sind, weil die Flächenzahl der einzelnen (vollständig vorausgesetzten) Formen in ihnen allen genau dieselbe ist, und weil die Gesetze der zonalen Gruppirung der Flächen von den Neigungswinkeln der Axen völlig unabhängig sind. Die Zonenlehre des rhombischen Systems gilt daher auch für die folgenden Krystallsysteme, in welchen nur zum Theil eine Verschiedenheit der Benennung der Zonen eintritt, während ausserdem Alles unverändert bleibt. Mit der Darstellung der Zonen des rhombischen Systems wird also auch zugleich jene der drei klinoëdrischen Krystallsysteme gewonnen, für welche wir deshalb auch grösstentheils auf gegenwärtiges Capitel verweisen können.

Die gewöhnlichen Zonen des rhombischen Systems sind sehr einfach, und zeigen eine gewisse Gleichförmigkeit ihrer Verhältnisse, so dass die wesentliche Verschiedenheit derselben meist nur in dem verschiedenen Namen der Zonenlinie liegt, während sie übrigens von ganz ähnlichen Gesetzen beherrscht werden. Diese gewöhnlichen Zonen sind nämlich folgende:

1. die Zone der Hauptaxe,
2. die Zone der Makrodiagonale,
3. die Zone der Brachydiagonale,
4. die Mittelkantenzonen der Pyramiden,
5. die makrodiagonalen Polkantenzonen der Pyramiden, und
6. die brachydiagonalen Polkantenzonen der Pyramiden.

Ausser diesen Zonen können freilich noch sehr viele andere zur Ausbildung gelangen, deren Entwickelung in jedem besonderen Falle mit Leichtigkeit nach der allgemeinen Regel des §. 38 zu geben sein wird.

Dass die Tangenten tautozonaler Kanten in einer jeden rhombischen Krystallreihe rationale Verhältnisse haben müssen, diess ergiebt sich unmittelbar aus den S. 55 mitgetheilten Betrachtungen, durch welche es als die Bedingung dieser Rationalität der Tangenten-Verhältnisse erkannt wurde, dass die Grundparameter a, b und c der betreffenden Krystallreihe entweder durch Quadratwurzeln, oder durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können. Da nun diess immer möglich ist, so wird uns auch jene Rationalität in allen Fällen verbürgt sein, wie sie denn auch in allen Fällen empirisch durch unsere Winkelmessungen, so wie theoretisch durch die zonale Verknüpfung der Flächen dargethan wird.

§. 174. Zonen der drei Axen.

Die den drei Axen entsprechenden Zonen sind natürlich eine jede einzig in ihrer Art, und so leicht zu beurtheilen, dass es dabei gar nicht der Anwendung der Zonengleichung bedarf.

1. Zone der Hauptaxe. Sie begreift alle diejenigen Flächen, welche der Hauptaxe parallel sind; folglich das Protoprisma ∞P, die sämmtlichen Makroprismen $\infty \bar{P} n$ und Brachyprismen $\infty \breve{P} n$, sowie die beiden verticalen Pinakoide $\infty \bar{P} \infty$ und $\infty \breve{P} \infty$.

Da die Zonenlinie in diesem Falle die Gleichungen $y = 0$ und $z = 0$ hat, und $a = a' = \infty$ ist, so gilt für den Neigungswinkel W irgend zweier tautozonaler Flächen F und F' dieser Zone, wenn für k der Werth $\frac{M}{\mu}$ eingeführt wird, nach S. 55 der allgemeine Ausdruck

$$\tang W = \frac{bc' - b'c}{bb' + cc'}$$

in welchen man nur die, durch das krystallographische Zeichen beider Flächen gegebenen Werthe der Parameter b und c, b' und c', unter Berücksichtigung ihrer durch die Lage der Flächen bestimmten Vorzeichen einzusetzen hat, um den gesuchten Winkel zu finden.

Anm. Es sei z. B. die Fläche F die vordere rechte Fläche des Makroprismas $\infty \bar{P} n$, die Fläche F' die vordere linke Fläche des Brachyprismas $\infty \breve{P} n'$, so gilt

für F: $b = n\mathrm{b}$, $c = \mathrm{c}$,

für F': $b' = -\mathrm{b}$, $c' = n'\mathrm{c}$,

und es wird daher

$$\tang W = -\frac{(nn' + 1)\mathrm{bc}}{n\mathrm{b}^2 - n'\mathrm{c}^2}$$

welcher Werth lehrt, dass dieser Winkel nur dann ein rechter werden kann, wenn sich $n : n' = \mathrm{c}^2 : \mathrm{b}^2$ verhält.

2. Zone der Makrodiagonale. Diese Zone begreift alle diejenigen Flächen, welche der Makrodiagonale der Grundform parallel sind; folglich das Basopinakoid $0P$, die sämmtlichen Makrodomen $m\bar{P}\infty$, und das Makropinakoid $\infty \bar{P} \infty$.

Da die Zonenlinie in diesem Falle die Gleichungen $x=0$ und $z=0$ hat, und $b=b'=\infty$ ist, so gilt für den Neigungswinkel W irgend zweier tautozonaler Flächen F und F' dieser Zone, nach Einführung des Werthes $\frac{N}{\nu}$ von k, der allgemeine Ausdruck

$$\text{tang}W=\frac{ca'-c'a}{aa'+cc'}$$

aus welchem sich in jedem gegebenen Falle durch Einsetzung der besonderen Werthe der Parameter a und c, a' und c', unter gehöriger Beachtung ihrer Vorzeichen, der gesuchte Winkel bestimmen lässt.

Anm. Ist z. B. F eine Fläche des ersten (d. h. des zur Grundform gehörigen) Makrodomas $\bar{P}\infty$, und F' die analog liegende Fläche irgend eines anderen Makrodomas, so gilt

für F: $a=\text{a}$, $c=\text{c}$,
für F': $a'=m\text{a}$, $c'=\text{c}$,

folglich bestimmt sich dann

$$\text{tang}W=\frac{(m-1)\text{ca}}{m\text{a}^2+\text{c}^2}$$

wonach sich der Neigungswinkel jeder makrodomatischen Fläche gegen die analog liegende Fläche des ersten Makrodomas berechnen lässt.

3. Zone der Brachydiagonale. Sie begreift alle diejenigen Flächen, welche der Brachydiagonale der Grundform parallel sind; folglich das Basopinakoid 0P, die sämmtlichen Brachydomen $m\breve{P}\infty$, und das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$.

Da nun die Zonenlinie die Gleichungen $x=0$ und $y=0$ hat, während $c=c'=\infty$ ist, so ergiebt sich für den Neigungswinkel W irgend zweier Flächen F und F' dieser Zone, aus dem S. 55 stehenden allgemeinen Ausdrucke von tang$W$, nach Einführung des Werthes $k=\frac{R}{\varrho}$, der Werth

$$\text{tang}W=\frac{ab'-a'b}{aa'+bb'},$$

mittels dessen sich abermals in jedem einzelnen Falle, aus den bekannten Ableitungszahlen und der bekannten Lage der beiden Flächen, ihr Winkel berechnen lässt.

Anm. Ist z. B. F eine Fläche des ersten (d. h. des zur Grundform gehörigen) Brachydomas $\breve{P}\infty$, und F' die analog liegende Fläche irgend eines anderen Brachydomas $m\breve{P}\infty$, so wird

für F: $a=\text{a}$, $b=\text{b}$,
für F': $a'=m\text{a}$, $b'=\text{b}$,

und folglich

$$\text{tang}W=-\frac{(m-1)\text{ab}}{m\text{a}^2+\text{b}^2}$$

wonach sich die Neigungswinkel aller brachydomatischen Flächen gegen die analog liegende Fläche des ersten Brachydomas berechnen lassen.

§. 175. Mittelkantenzonen der Pyramiden.

Bei der Betrachtung derjenigen Zonen, welche sich allgemein als die Kantenzonen der Pyramiden bezeichnen lassen, brauchen wir zunächst nur irgend eine unbestimmte Pyramide zu berücksichtigen, weil sich die so gefundenen Resultate sehr leicht in derjenigen Form darstellen lassen, welche ihnen für irgend eine bestimmte Pyramide zukommt. Von jeder Art dieser Zonen giebt es allemal nur zwei, weil jede Art der Kanten nur in der Zahl vier vorhanden ist, von denen je zwei einander parallel sind.

Zonen der Mittelkanten. Sie begreifen alle diejenigen Flächen, welche der Mittelkante einer Pyramide parallel sind. Für irgend eine, durch das Parameter-Verhältniss $a : b : c$ bestimmte Pyramide sind die Gleichungen der einen, auf den Mittelpunct transportirten Mittelkante

$$x = 0, \text{ und } \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

welche, verglichen mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47), uns lehren, dass in vorliegendem Falle

$$\mu = 0, \ \nu = b, \ \varrho = -c$$

sein muss, woraus sich für irgend eine Fläche F' von den Parametern a', b' und c' die Zonengleichung

$$\frac{b}{b'} - \frac{c}{c'} = 0, \text{ oder } bc' = b'c$$

ergiebt; folglich wird für alle tautozonale Flächen dasselbe Verhältniss der Nebenaxen erfordert. Aus dieser allgemeinen Bedingung lassen sich nun folgende besondere Resultate ableiten:

Diejenigen Formen, welche in die Zone der Mittelkante irgend einer Pyramide Flächen zu liefern vermögen, sind:

1. wenn die Zonenlinie eine Mittelkante von P ist, die Basis 0P, alle Protopyramiden mP und das Protoprisma ∞P;
2. wenn die Zonenlinie eine Mittelkante von $\bar{\text{P}}n$ ist, alle mögliche Makropyramiden $m\bar{\text{P}}n$ mit gleichem Werthe von n, das Makroprisma $\infty\bar{\text{P}}n$, und die Basis 0P;
3. wenn die Zonenlinie eine Mittelkante von $\breve{\text{P}}n$ ist, alle mögliche Brachypyramiden $m\breve{\text{P}}n$ mit gleichem Werthe von n, das Brachyprisma $\infty\breve{\text{P}}n$, und die Basis 0P.

In diesen Sätzen ist die Entwickelung der Mittelkantenzonen gegeben. Was die Tangente des Neigungswinkels W irgend zweier tautozonaler Flächen F' und F'' betrifft, so folgt solche aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{a'a''b'b''+c'c''a'a''+b'b''c'c''},$$

wenn wir in selbigem $\mu = 0$, $\nu = b$, $\varrho = -c$, und für k einen der beiden Werthe $\frac{N}{\nu}$ oder $\frac{R}{\varrho}$ setzen, hierauf den ganzen Ausdruck durch $b'b''$ oder

durch $c'c''$ dividiren, und statt $\frac{c'c''}{b'b''}$ oder $\frac{b'b''}{c'c''}$ die aus der Zonengleichung folgenden Werthe $\frac{c^2}{b^2}$ oder $\frac{b^2}{c^2}$ einführen; auf diese Weise bestimmt sich zuvörderst

$$\tang W = \frac{(c'a''-c''a')b\sqrt{b^2+c^2}}{a'a''(b^2+c^2)+c'c''b^2}$$

$$= -\frac{(a'b''-a''b')c\sqrt{b^2+c^2}}{a'a''(b^2+c^2)+b'b''c^2}.$$

Diese noch sehr allgemein ausgedrückten Werthe gehen endlich dadurch, dass man $a'=m\mathrm{a}$, $a''=m'\mathrm{a}$, $b'=b''=\mathrm{b}$, und $c'=c''=\mathrm{c}$ setzt, in den für die Flächen irgend zweier Protopyramiden mP und m'P aus der Mittelkantenzone der Grundform giltigen Werth

$$\tang W = \frac{(m'-m)\mathrm{abc}\sqrt{\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2}}{mm'(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2\mathrm{c}^2}$$

über, welcher uns, bei gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen von m und m', den Winkel irgend zweier tautozonaler Flächen aus der Mittelkantenzone der Grundform liefert.

Setzt man in demselben Ausdrucke von tang$W$ nb statt b, so gilt derselbe für die Mittelkantenzone irgend einer Makropyramide $m\bar{\mathrm{P}}n$; setzt man dagegen nc statt c, so bezieht er sich auf die Mittelkantenzone irgend einer Brachypyramide $m\breve{\mathrm{P}}n$.

§. 176. Makrodiagonale Polkantenzonen der Pyramiden.

Die makrodiagonalen Polkantenzonen einer Pyramide sind diejenigen Zonen, deren Flächen einer der makrodiagonalen Polkanten derselben Pyramide parallel liegen. Hat nun diese Pyramide das Parameter-Verhältniss $a:b:c$, so werden die Gleichungen einer ihrer makrodiagonalen Polkanten

$$z=0, \text{ und } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0;$$

und vergleichen wir diese mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47), so folgt, dass in gegenwärtigem Falle

$$\mu=a,\quad \nu=-b,\quad \varrho=0$$

sein muss, weshalb denn für irgend eine Fläche F' mit den Parametern a', b' und c' die Zonengleichung

$$\frac{a}{a'}-\frac{b}{b'}=0, \text{ oder } ab'=a'b$$

wird, welche uns lehrt, dass für alle tautozonale Flächen dasselbe Grössen-Verhältniss zwischen der Hauptaxe und Makrodiagonale Statt finden muss. Aus dieser ganz allgemeinen Bedingung ergeben sich denn folgende besondere Regeln.

Diejenigen Formen, welche Flächen in die makrodiagonalen Polkantenzonen irgend einer Pyramide liefern können, sind:

1. wenn die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Protopyramide mP ist:
   das Brachydoma $m\breve{P}\infty$,
   alle Brachypyramiden $m\breve{P}n$,
   die Protopyramide mP selbst,
   alle Makropyramiden von der Zeichenform $mn\bar{P}n$, und
   das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$;
2. wenn die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Makropyramide $m\bar{P}n$ ist:
   das Brachydoma $\frac{m}{n}\breve{P}\infty$,
   alle Brachypyramiden von der Zeichenform $\frac{m}{n}\breve{P}n'$,
   die Protopyramide $\frac{m}{n}P$,
   alle Makropyramiden von der Zeichenform $\frac{mn'}{n}\bar{P}n'$, mit $n' < n$,
   die Makropyramide $m\bar{P}n$ selbst,
   alle Makropyramiden von der Zeichenform $\frac{mn'}{n}\bar{P}n'$, mit $n' > n$, und
   das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$.
3. wenn die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Brachypyramide $m\breve{P}n$ ist:
   das Brachydoma $m\breve{P}\infty$,
   alle Brachypyramiden $m\breve{P}n'$, mit $n' > n$,
   die Brachypyramide $m\breve{P}n$ selbst,
   alle Brachypyramiden $m\breve{P}n'$, mit $n' < n$,
   die Protopyramide mP,
   alle Makropyramiden von der Zeichenform $mn'\bar{P}n'$, und
   das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$.

Hiermit ist die Entwickelung dieser Zonen vollständig erschöpft.

Die Tangente des Neigungswinkels W irgend zweier tautozonaler Flächen F' und F'' folgt aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{a'a''b'b''+c'c''a'a''+b'b''c'c''}$$

wenn man in selbigem $\mu = a$, $\nu = -b$, $\varrho = 0$, sowie für k einen der beiden Werthe $\frac{M}{\mu}$ oder $\frac{N}{\nu}$ setzt, hierauf Zähler und Nenner mit $a'a''$ oder mit $b'b''$ dividirt, und endlich statt $\frac{b'b''}{a'a''}$ oder $\frac{a'a''}{b'b''}$ die aus der Zonengleichung folgenden Werthe $\frac{b^2}{a^2}$ oder $\frac{a^2}{b^2}$ einführt. Auf diese Weise erhält man:

$$\tang W = \frac{(b'c''-b''c')a\sqrt{a^2+b^2}}{c'c''(a^2+b^2)+b'b''a^2} \text{ oder}$$

$$= -\frac{(c'a''-c''a')b\sqrt{a^2+b^2}}{c'c''(a^2+b^2)+a'a''b^2}.$$

Diese beiden völlig aequivalenten Ausdrücke erhalten noch eine verschiedene Form nach Maassgabe der besonderen Bedeutung der Zonenlinie.

1. Ist die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Protopyramide mP, so ist $a = m$a und $b =$ b, und es wird

$$\text{tang}W = \frac{(b'c''-b''c')m\text{a}\sqrt{m^2\text{a}^2+\text{b}^2}}{c'c''(m^2\text{a}^2+\text{b}^2)+b'b''m^2\text{a}^2} \text{ oder}$$

$$= -\frac{(c'a''-c''a')\text{b}\sqrt{m^2\text{a}^2+\text{b}^2}}{c'c''(m^2\text{a}^2+\text{b}^2)+a'a''\text{b}^2}.$$

2. Ist die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Makropyramide $m\bar{P}n$, so ist $a = m$a, und $b = n$b, und es wird

$$\text{tang}W = \frac{(b'c''-b''c')m\text{a}\sqrt{m^2\text{a}^2+n^2\text{b}^2}}{c'c''(m^2\text{a}^2+n^2\text{b}^2)+b'b''m^2\text{a}^2} \text{ oder}$$

$$= -\frac{(c'a''-c''a')n\text{b}\sqrt{m^2\text{a}^2+n^2\text{b}^2}}{c'c''(m^2\text{a}^2+n^2\text{b}^2)+a'a''n^2\text{b}^2}.$$

3. Ist die Zonenlinie die makrodiagonale Polkante einer Brachypyramide $m\breve{P}n$, so ist $a = m$a, $b =$ b, und so gelten für tang$W$ dieselben Werthe, wie vorher unter 1.

Man hat nun in jedem besonderen Falle nur statt a', b' und c', statt a'', b'' und c'' die, den beiden Flächen vermöge ihres krystallographischen Zeichens und ihrer Lage zukommenden Parameterwerthe einzuführen, um den gesuchten Neigungswinkel zu finden.

§. 177. Brachydiagonale Polkantenzonen der Pyramiden.

Die brachydiagonalen Polkantenzonen einer Pyramide sind diejenigen beiden Zonen, deren Flächen einer der brachydiagonalen Polkanten derselben parallel sind. Lassen wir diese Pyramide einstweilen noch unbestimmt, so sind die Gleichungen einer ihrer brachydiagonalen Polkanten

$$y = 0, \text{ und } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

aus welchen sich durch eine Vergleichung mit den allgemeinen Gleichungen der Zonenlinie (S. 47) ergiebt, dass

$$\mu = a, \; \nu = 0, \; \varrho = -c$$

sein muss, weshalb denn für irgend eine Fläche F' mit den Parametern a', b' und c' die Zonengleichung

$$\frac{a}{a'} - \frac{c}{c'} = 0, \text{ oder } c'a = ca'$$

wird, welche uns lehrt, dass alle tautozonale Flächen dasselbe Verhältniss der Hauptaxe zur Brachydiagonale haben müssen. Aus dieser allgemeinen Bedingung lassen sich nun folgende besondere Regeln ableiten.

Diejenigen Formen, welche Flächen in die brachydiagonalen Polkantenzonen irgend einer Pyramide liefern können, sind:

1. wenn die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer **Protopyramide** mP ist:
   das Makrodoma $m\bar{P}\infty$,
   alle Makropyramiden $m\bar{P}n$,
   die Protopyramide mP selbst,
   alle Brachypyramiden von der Zeichenform $mn\breve{P}n$, und
   das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$;

2. wenn die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer **Brachypyramide** $m\breve{P}n$ ist:
   das Makrodoma $\frac{m}{n}\bar{P}\infty$,
   alle Makropyramiden von der Zeichenform $\frac{m}{n}\bar{P}n'$,
   die Protopyramide $\frac{m}{n}$P,
   alle Brachypyramiden von der Zeichenform $\frac{mn'}{n}\breve{P}n'$, mit $n' < n$,
   die Brachypyramide $m\breve{P}n$ selbst,
   alle Brachypyramiden von der Zeichenform $\frac{mn'}{n}\breve{P}n'$ mit $n' > n$, und
   das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$;

3. wenn die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer **Makropyramide** $m\bar{P}n$ ist:
   das Makrodoma $m\bar{P}\infty$,
   alle Makropyramiden $m\bar{P}n'$, mit $n' > n$,
   die Makropyramide $m\bar{P}n$ selbst,
   alle Makropyramiden $m\bar{P}n'$, mit $n' < n$,
   die Protopyramide mP,
   alle Brachypyramiden von der Zeichenform $mn'\breve{P}n'$, und
   das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$.

Hiermit ist die allgemeine Entwickelung dieser Zonen vollständig erschöpft.

Die **Tangente** des Neigungswinkels W irgend zweier tautozonaler Flächen F' und F'' findet sich aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\tang W = \frac{k\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2}}{a'a''b'b''+c'c''a'a''+b'b''c'c''}$$

wenn man in selbigem $\mu = a$, $\nu = 0$, $\varrho = -c$, sowie für k einen der beiden Werthe $\frac{M}{\mu}$ oder $\frac{R}{\varrho}$ einführt, hierauf mit $a'a''$ oder mit $c'c''$ dividirt, und endlich statt $\frac{c'c''}{a'a''}$ oder $\frac{a'a''}{c'c''}$ die aus der Zonengleichung folgenden Werthe $\frac{c^2}{a^2}$ oder $\frac{a^2}{c^2}$ einsetzt; man erhält so

$$\tang W = \frac{(b'c''-b''c')a\sqrt{c^2+a^2}}{b'b''(c^2+a^2)+c'c''a^2}$$

$$= -\frac{(a'b''-a''b')c\sqrt{c^2+a^2}}{b'b''(c^2+a^2)+a'a''c^2}$$

Diese beiden allgemeinen und vollkommen aequivalenten Ausdrücke erhalten nun noch je nach der verschiedenen Bedeutung der Zonenlinie folgende verschiedene Formen.

1. Ist die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer Protopyramide mP, so ist $a = m$a, $c =$ c, und es wird

$$\tang W = \frac{(b'c''-b''c')m\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2}}{b'b''(\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2)+c'c''m^2\mathrm{a}^2} \text{ oder}$$

$$= -\frac{(a'b''-a''b')\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2}}{b'b''(\mathrm{c}^2+m\mathrm{a}^2)+a'a''\mathrm{c}^2}.$$

2. Ist die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer Brachypyramide $m\breve{\mathrm{P}}n$, so ist $a = m$a, $c = n$c, und es wird

$$\tang W = \frac{(b'c''-b''c')m\mathrm{a}\sqrt{n^2\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2}}{b'b''(n^2\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2)+c'c''m^2\mathrm{a}^2} \text{ oder}$$

$$= -\frac{(a'b''-a''b')n\mathrm{c}\sqrt{n^2\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2}}{b'b''(n^2\mathrm{c}^2+m^2\mathrm{a}^2)+a'a''n^2\mathrm{c}^2}.$$

3. Ist die Zonenlinie die brachydiagonale Polkante einer Makropyramide $m\bar{\mathrm{P}}n$, so ist $a = m$a, $c =$ c, und so gelten für tang$W$ dieselben Werthe, wie vorher unter 1.

In jedem besonderen Falle hat man nur noch statt a', b' und c' sowie statt a'', b'' und c'' die den beiden Flächen F' und F'' entsprechenden Parameter-Werthe, unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, einzuführen, um den gesuchten Winkel zu erhalten.

Fünftes Capitel.

Vertauschung der Grundform und der Hauptaxe.

§. 178. Vertauschung der Grundform mit Beibehaltung der Hauptaxe.

Zu einer wirklichen Transformation des Axensystems, d. h. zu einer Vertauschung des, in der ganzen Erscheinungsweise der Formen so entschieden angezeigten rechtwinkeligen, trimetrischen Axensystems mit irgend einem anderen Axensysteme dürfte wohl nicht so leicht eine Veranlassung vorkommen; weshalb wir denn auch nicht auf sie eingehen wollen, und für den Fall, da etwa ein theoretisches Interesse zu einer solchen Transformation auffordern sollte, auf die in den §§. 43 ff. gegebene Anleitung verweisen.

Dagegen bieten sich uns hier zwei andere Probleme dar, von denen namentlich das zweite eine öftere Anwendung finden dürfte. Diese Probleme bestehen in einer Vertauschung oder in einer Veränderung der Wahl entweder der Grundform, oder auch der Hauptaxe.

Da nämlich die Grundform einer jeden rhombischen Krystallreihe eine Pyramide, und da die Anzahl dieser Pyramiden in manchen Krystallreihen nicht unbedeutend ist, so kann es wohl bisweilen vorkommen, dass von verschiedenen Beobachtern zwei verschiedene Pyramiden als Grundform einer und derselben Krystallreihe gewählt werden, wodurch denn auch nothwendig für alle übrigen Formen zwei verschiedene Zeichensysteme herbeigeführt werden. Daher dürfte es nicht überflüssig sein, für solche Fälle die Methode anzugeben, nach welcher das eine Zeichensystem in das andere zu übersetzen ist.

Es sei uns also in Bezug auf eine Grundform P, deren Parameter-Verhältniss a : b : c ist, irgend eine Krystallfläche *F* durch ihre Parameter ma, rb und sc gegeben, und es werde verlangt, dass dieselbe Krystallfläche auf eine andere Grundform von dem Parameter-Verhältniss m'a : r'b : s'c bezogen werde.

Bezeichnen wir die gesuchten Factoren der neuen Grundparameter mit μ, ϱ und σ, so muss offenbar

$$m\mathrm{a} = \mu m'\mathrm{a}, \quad r\mathrm{b} = \varrho r'\mathrm{b}, \quad s\mathrm{c} = \sigma s'\mathrm{c}$$

sein, woraus sich denn

$$\mu = \frac{m}{m'}, \quad \varrho = \frac{r}{r'}, \quad \sigma = \frac{s}{s'}$$

ergiebt. Bei der Bildung der neuen krystallographischen Zeichen ist nun vor allen Dingen darauf zu achten, ob r'b $>$ oder $<$ s'c ist, weil es sich danach bestimmt, welche der neuen Nebenaxen als Makrodiagonale oder als Brachydiagonale eingeführt werden muss. Ist $r'\mathrm{b} > s'\mathrm{c}$, so bleiben die Makrodiagonale und die Brachydiagonale ihrer Lage nach unverändert; ist dagegen $r'\mathrm{b} < s'\mathrm{c}$, so vertauschen beide Nebenaxen ihre Bedeutung, oder die anfängliche Makrodiagonale wird jetzt zur Brachydiagonale, und umgekehrt.

Nächstdem sind die Werthe von ϱ und σ zu vergleichen, weil für den kleineren derselben allemal der Werth 1 zu setzen ist, oder weil mit diesem kleineren alle drei Grössen μ, ϱ und σ zu dividiren sind.

Ist also $\frac{s}{s'} < \frac{r}{r'}$, so werden die gesuchten Ableitungszahlen

$$m'' = \frac{ms'}{m's}, \text{ und } n'' = \frac{rs'}{r's},$$

und das neue Zeichen der Fläche *F* entspricht entweder der makrodiagonalen Form $m''\bar{\mathrm{P}}n''$, oder der brachydiagonalen Form $m''\breve{\mathrm{P}}n''$, je nachdem $r'\mathrm{b} >$ oder $< s'\mathrm{c}$ ist.

Ist dagegen $\frac{r}{r'} < \frac{s}{s'}$, so werden die gesuchten Ableitungszahlen

$$m'' = \frac{mr'}{m'r}, \quad \text{und } \frac{sr'}{s'r},$$

und das neue Zeichen der Fläche F entspricht entweder der brachydiagonalen Form $m''\breve{P}n''$, oder der makrodiagonalen Form $m''\bar{P}n''$, je nachdem $r'b > $ oder $< s'c$ ist.

Anm. Wenn wir die Krystallreihe des Topases wie gewöhnlich auf die vorherrschende Pyramide beziehen, so gilt für sie das Verhältniss der Grundparameter a : b : c = 0,4746 : 1 : 0,5282. Einige der gewöhnlichsten Formen sind die Protopyramiden $\frac{2}{3}P$, P und $2P$, das Protoprisma ∞P, die Brachypyramide $\frac{4}{3}\breve{P}2$, das Brachyprisma $\infty\breve{P}2$, die Brachydomen $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$ u. s. w. Wollten wir nun die Pyramide $\frac{4}{3}\breve{P}2$ als Grundform einführen, so würde $m' = \frac{4}{3}$, $r' = 1$, $s' = 2$, und so müssten die beiden Nebenaxen ihre Namen vertauschen, weil 1,0564 > 1 ist. Für jede Protopyramide mP wird dann

$$\mu = \tfrac{3}{4}m,\quad \varrho = 1,\quad \sigma = \tfrac{1}{2},$$

und zwar fällt ϱ in die neue Brachydiagonale, σ in die neue Makrodiagonale. Da nun $\sigma < \varrho$ ist, so wird

$$m'' = \tfrac{3}{2}m,\quad \text{und } n'' = 2,$$

und folglich allgemein $\frac{3}{2}m\breve{P}2$ das neue Zeichen der ursprünglichen Protopyramide mP.

Also gilt für $\frac{2}{3}P$ das neue Zeichen $\breve{P}2$,
- - - P - - - $\frac{3}{2}\breve{P}2$,
- - - $2P$ - - - $3\breve{P}2$,
- - - ∞P - - - $\infty\breve{P}2$.

Für jedes Brachydoma $m\breve{P}\infty$ wird

$$\mu = \tfrac{3}{4}m,\quad \varrho = 1,\quad \sigma = \infty;$$

da nun ϱ nicht nur $< \sigma$, sondern auch $= 1$ ist, so wird allgemein $\frac{3}{4}m\bar{P}\infty$ das neue Zeichen des ursprünglichen Brachydomas $m\breve{P}\infty$;

folglich gilt für $2\breve{P}\infty$ das neue Zeichen $\frac{3}{2}\bar{P}\infty$,
- - - $4\breve{P}\infty$ - - - $3\bar{P}\infty$.

Dieses Beispiel wird hinreichen, um die Uebersetzung der Zeichen zu erläutern, welche durch eine veränderte Wahl der Grundform bei unveränderter Hauptaxe nothwendig gemacht wird.

§. 179. Vertauschung der Hauptaxe bei unveränderter Grundform.

Da eine jede rhombische Pyramide beliebig nach dieser oder jener Axe aufrecht gestellt werden kann (§. 161), so lässt sich auch eine jede rhombische Krystallreihe bald auf diese, bald auf jene Axe als ihre Hauptaxe beziehen; und so sind denn auch wirklich manche der wichtigsten Krystallreihen des Mineralreiches von verschiedenen Mineralogen verschiedentlich betrachtet worden. Da nun jede dieser Betrachtungsarten ein verschiedenes Zeichensystem zur Folge hat, so ist es wichtig, das eine Zeichensystem in das andere übersetzen zu können.

Für eine gegebene aufrechte Stellung der Grundform P sei a die halbe Hauptaxe, b die halbe Makrodiagonale, und c die halbe Brachydiagonale; ferner sei $ma : rb : sc$ das Parameter-Verhältniss irgend einer Fläche F, von der es also unbestimmt gelassen wird, ob sie dieser oder jener Form angehört. Soll nun die Krystallreihe nach einer anderen Axe aufrecht gestellt

werden, so wird die neue Hauptaxe entweder durch b oder durch c gegeben sein, welche zwei Fälle besonders zu betrachten sind.

I. Die ursprüngliche Makrodiagonale b soll die neue Hauptaxe bilden.

In diesem Falle kommt es zunächst auf die Werthe der beiden Axen a und c an, welche von beiden als neue Makrodiagonale einzuführen ist.

A. Ist a > c, so wird a die neue Makrodiagonale, und c die neue Brachydiagonale liefern. Bezeichnen wir also die neuen Grundparameter mit a′, b′ und c′, so würde das Parameter-Verhältniss ma : rb : sc der Fläche F jetzt ra′ : mb′ : sc′ zu schreiben sein. Da nun die kleinere der beiden Ableitungszahlen m und s mit dem Werthe 1 einzuführen ist, so bestimmt sich die besondere Form des neuen Zeichens der Fläche F wesentlich durch das Verhältniss von m und s.

Ist $m > s$, so dividirt man das ganze Verhältniss durch s, und so entspricht das neue Zeichen der Fläche F allgemein

der makrodiagonalen Form $\frac{r}{s}\bar{P}\frac{m}{s}$;

ist dagegen $m < s$, so dividirt man das ganze Verhältniss durch m, und so gehört die Fläche in ihrem neuen Zeichen allgemein

der brachydiagonalen Form $\frac{r}{m}\breve{P}\frac{s}{m}$.

B. Ist a < c, so wird c die neue Makrodiagonale, und a die neue Brachydiagonale, weshalb denn das Verhältniss ma : rb : sc nun ra′ : sb′ : mc′ geschrieben werden muss. Dann folgt für die Fläche F,

wenn $m > s$, allgemein das Zeichen

der brachydiagonalen Form $\frac{r}{s}\breve{P}\frac{m}{s}$;

wenn $m < s$, allgemein das Zeichen

der makrodiagonalen Form $\frac{r}{m}\bar{P}\frac{s}{m}$.

Hieraus ergeben sich folgende praktische Regeln:

Soll die Makrodiagonale b zur Hauptaxe werden, so gilt

wenn a > c:

für die Form mP das neue Zeichen $\bar{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{1}{m}\breve{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$,

für die Form $m\bar{P}n$ das neue Zeichen $n\bar{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{n}{m}\breve{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$,

für die Form $m\breve{P}n$ das neue Zeichen $\frac{1}{n}\bar{P}\frac{m}{n}$, wenn $m > n$,
. . . . $\frac{1}{m}\breve{P}\frac{n}{m}$, . . . $m < n$.

$$\text{wenn } a < c \begin{cases} \text{für die Form } mP \text{ das neue Zeichen } \breve{P}m, & \text{wenn } m > 1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \frac{1}{m}\bar{P}\frac{1}{m}, & \ldots\; m < 1, \\ \text{für die Form } m\bar{P}n \text{ das neue Zeichen } n\breve{P}m, & \text{wenn } m > 1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \frac{n}{m}\bar{P}\frac{1}{m}, & \ldots\; m < 1, \\ \text{für die Form } m\breve{P}n \text{ das neue Zeichen } \frac{1}{n}\breve{P}\frac{m}{n}, & \text{wenn } m > n, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \frac{1}{m}\bar{P}\frac{n}{m}, & \ldots\; m < n. \end{cases}$$

Diese tabellarische Uebersicht giebt auch Auskunft in allen denjenigen Fällen, da $m = 1$, $= 0$ oder $= \infty$, da $n = 1$, $= m$ oder $= \infty$ ist.

§. 180. Fortsetzung.

II. Die ursprüngliche Brachydiagonale c soll die neue Hauptaxe bilden.

In diesem Falle hängt es von den Werthen der beiden Axen a und b ab, welche von beiden die neue Makrodiagonale bilden soll.

A. Ist $a > b$, so liefert a die neue Makrodiagonale, und b die neue Brachydiagonale. Bezeichnen wir die drei Dimensionen in ihrer neuen Bedeutung wiederum mit a', b' und c', so wird das der Fläche F zukommende ursprüngliche Parameter-Verhältniss $ma : rb : sc$ nunmehr $sa' : mb' : rc'$ geschrieben werden müssen, die besondere Form ihres neuen Zeichens aber wird sich durch das Verhältniss der beiden Ableitungszahlen m und r bestimmen.

Wenn nämlich $m > r$, dann ist das ganze Verhältniss $sa' : mb' : rc'$ durch r zu dividiren, und dann entspricht das neue Zeichen der Fläche F allgemein

der makrodiagonalen Form $\frac{s}{r}\bar{P}\frac{m}{r}$;

wenn aber $m < r$, dann wird dasselbe Verhältniss durch m zu dividiren sein, und das neue Zeichen allgemein

der brachydiagonalen Form $\frac{s}{m}\breve{P}\frac{r}{m}$

angehören.

B. Ist dagegen $a < b$, so bleibt b die Makrodiagonale, während a die neue Brachydiagonale darstellt, weshalb denn das Parameter-Verhältniss ma . $rb : sc$ in der Form $sa' : rb' : mc'$ hervortritt, aus welcher sich ergiebt, dass für die Fläche F,

wenn $m > r$, das neue Zeichen allgemein

der brachydiagonalen Form $\frac{s}{r}\breve{P}\frac{m}{r}$,

wenn $m < r$, das neue Zeichen allgemein

der makrodiagonalen Form $\frac{s}{m}\bar{P}\frac{r}{m}$

angehören wird.

Aus diesen allgemeinen Resultaten lassen sich nun leicht folgende praktische Regeln ableiten:

Soll die Brachydiagonale c zur Hauptaxe werden, so gilt

wenn a > b:

für die Form mP das neue Zeichen $\bar{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{1}{m}\breve{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$,
für die Form $m\bar{P}n$ das neue Zeichen $\frac{1}{n}\bar{P}\frac{m}{n}$, wenn $m > n$,
. . . . $\frac{1}{m}\breve{P}\frac{n}{m}$, . . . $m < n$,
für die Form $m\breve{P}n$ das neue Zeichen $n\bar{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{n}{m}\breve{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$.

wenn a < b:

für die Form mP das neue Zeichen $\breve{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{1}{m}\bar{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$,
für die Form $m\bar{P}n$ das neue Zeichen $\frac{1}{n}\breve{P}\frac{m}{n}$, wenn $m > n$,
. . . . $\frac{1}{m}\bar{P}\frac{n}{m}$, . . . $< n$,
für die Form $m\breve{P}n$ das neue Zeichen $n\breve{P}m$, wenn $m > 1$,
. . . . $\frac{n}{m}\bar{P}\frac{1}{m}$, . . . $m < 1$.

Da diese Regeln auch für die Gränzwerthe von m und n auf das gesuchte Zeichen gelangen lassen, so wird man mittels ihrer in jedem besonderen Falle die Uebersetzung des einen Zeichensystemes in das andere sehr leicht bewerkstelligen können.

Sechstes Capitel.

Zwillingskrystalle des rhombischen Systems.

§. 181. Vorherrschendes Zwillingsgesetz.

Zwillingskrystalle mit parallelen Axensystemen beider Individuen können nur bei sphenoidischer Hemiëdrie, oder bei der in §. 169 erläuterten Meroëdrie vorkommen, und stehen dann immer unter dem allgemeinen Gesetze, dass die hemiëdrischen oder meroëdrischen Formen des einen Individuums die Complemente der gleichnamigen Formen des anderen Individuums

darstellen. Doch gehören dergleichen Zwillinge nicht gerade zu den häufigen Erscheinungen.

Weit häufiger begegnen wir Zwillingskrystallen mit geneigten Axensystemen, unter welchen wiederum die gewöhnlichsten diejenigen sind, in welchen beide Individuen symmetrisch gegen eine Fläche des Protoprismas ∞P liegen. Dieses Gesetz ist in der That als das vorherrschende Zwillingsgesetz des rhombischen Systems zu betrachten, für welches es dieselbe Wichtigkeit erlangt, wie solche denen in §. 82 und §. 109 erläuterten Gesetzen für das tesserale und das tetragonale System zuerkannt werden muss. Wir wollen daher dieses Gesetz, welches auch leicht in noch grösserer Allgemeinheit aufgefasst werden kann, zunächst in Betrachtung ziehen.

Die in §. 47 vorausgesetzte allgemeine Gleichung der Zwillingsfläche

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

erhält in gegenwärtigem Falle, wo $a=\infty\mathrm{a}$, $b=\mathrm{b}$, und $c=\mathrm{c}$ ist, die besondere Form

$$\frac{y}{\mathrm{b}}+\frac{z}{\mathrm{c}}=1.$$

Setzen wir nun die vorstehenden Werthe von a, b und c in die S. 65 stehenden Gleichungen der Axen der x', y' und z', so bestimmen sich solche

für die Axe der x', $y=0$, und $z=0$,

für die Axe der y', $x=0$, und $\frac{y}{b^2-c^2}+\frac{z}{2bc}=0$,

für die Axe der z', $x=0$, und $\frac{y}{2bc}-\frac{z}{b^2-c^2}=0$.

Ist uns aber in dem Individuo II irgend eine Krystallfläche F' durch die Gleichung

$$\frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{c'}=1$$

gegeben, so folgt nach S. 68, dass ihre in dem Axensysteme des Individuums I giltigen Parameter folgende Werthe haben werden:

$$a_1=-a'$$

$$b_1=\frac{b'c'(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)}{2b'\mathrm{bc}-(\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2)c'}$$

$$c_1=\frac{b'c'(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)}{2c'\mathrm{bc}+(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)b'}$$

Da nun aber allgemein $a'=m\mathrm{a}$, $b'=r\mathrm{b}$ und $c'=s\mathrm{c}$ gesetzt werden kann, indem wir es einstweilen noch unbestimmt lassen, ob r oder s den Werth n hat, so lassen sich die vorstehenden Werthe von a_1, b_1 und c_1 auch so schreiben:

$$a_1=-m\mathrm{a}$$

$$b_1=\frac{rs(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{b}}{2r\mathrm{b}^2-s(\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2)}$$

$$c_1=\frac{rs(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{c}}{2s\mathrm{c}^2+r(\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2)}$$

woraus denn ersichtlich ist, dass die transponirte Fläche auch in dem Axensysteme I einer krystallographisch möglichen, d. h. einer solchen Fläche entspricht, deren Parameter rationale Multipla der Grundparameter a, b und c sind.

Anm. Wäre die Zwillingsfläche die Fläche eines Makroprismas $\infty\bar{P}\nu$, oder eines Brachyprismas $\infty\breve{P}\nu$, so braucht man nur im ersteren Falle νb statt b, im zweiten Falle νc statt c zu setzen, um die entsprechenden Werthe von a_1, b_1 und c_1 zu erhalten.

§. 182. Transposition der Protopyramiden *m*P.

Wir wollen nun die allgemeinen Resultate des vorhergehenden Paragraphen zuvörderst für die verschiedenen Pyramiden in Anwendung bringen. Um dabei für unsere Einbildungskraft ein Anhalten zu gewinnen, fassen wir die nachstehende Figur 81 ins Auge, welche die Horizontalprojection eines Zwillingskrystalls darstellt, dessen Individuen von einer Combination des Protoprismas ∞P und dreier Pyramiden gebildet werden. Die vorherrschende dieser Pyramiden ist eine Protopyramide *m*P; die beiden untergeordneten sind eine Makropyramide $m\bar{P}n$, und eine Brachypyramide $m\breve{P}n$, wobei jedoch für *m* verschiedene Werthe zu denken sind, wie diess ja auch die Figur erfordert. Jede dieser Pyramiden des Individuums II zerfällt nun nach ihrer Transposition auf das Individuum I in zwei verschiedene Partialformen, deren jede von vier, in einer Zone liegenden Flächen gebildet wird.

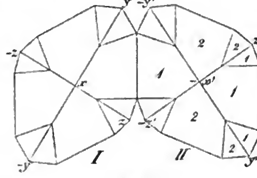


Fig. 81.

Transposition einer Protopyramide *m*P.

Die eine Partialform derselben wird von den mit 1, die andere von den mit 2 bezeichneten Flächen und deren Gegenflächen gebildet, weshalb wir auch nur je eine von diesen Flächen zu transponiren brauchen, um die Partialform zu bestimmen.

1. Erste Partialform. Ihre in Fig. 81 an der positiven Halbaxe der z' anliegende und mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$-\frac{x'}{m\mathrm{a}} + y' + z' = 1$$

folglich gilt für sie $m = -m$, $r = 1$, und $s = 1$. Setzen wir diese Werthe in die zu Ende von §. 181 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir

$$a_1 = m\mathrm{a},\ b_1 = \mathrm{b},\ c_1 = \mathrm{c},$$

woraus denn folgt, dass diese erste Partialform mit vier Flächen derselben Pyramide *m*P identisch ist.

2. Zweite Partialform. Ihre an der positiven Halbaxe z' anliegende mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung:

$$-\frac{x'}{ma} - y' + z' = 1$$

weshalb denn für sie $m = -m$, $r = -1$, und $s = 1$ ist. Substituiren wir diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir

$$a_1 = ma$$
$$b_1 = \frac{(b^2+c^2)b}{3b^2-c^2} = pb$$
$$c_1 = -\frac{(b^2+c^2)c}{3c^2-b^2} = qc.$$

Da nun $p < q$ ist, und da vermöge unsrer Ableitung und Bezeichnung die kleinere dieser beiden Grössen mit dem Werthe 1 genommen werden muss, so sind die vorstehenden Werthe von a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, wodurch

$$a_1 = \frac{m(3b^2-c^2)a}{b^2+c^2} = m'a$$
$$b_1 = b$$
$$c_1 = -\frac{(3b^2-c^2)c}{3c^2-b^2} = n'c$$

wird. Die zweite Partialform entspricht daher allgemein der Brachypyramide

$$\frac{m(3b^2-c^2)}{b^2+c^2}\breve{P}\frac{3b^2-c^2}{3c^2-b^2}$$

welche sich für $b^2 = 3c^2$ in das Brachydoma $2m\breve{P}\infty$ verwandelt, dem sie überhaupt um so näher kommt, je näher die Winkel des Protoprismas ∞P den Werthen von 120° und 60° kommen.

§. 183. Transposition der Makropyramiden $m\bar{P}n$.

Diejenigen Flächen des Individuums II, welche in Fig. 81 paarweise an den Endpuncten der Axe z' erscheinen, gehören einer Makropyramide $m\bar{P}n$ an, und zwar bilden die mit 1 bezeichneten Flächen die eine, die mit 2 bezeichneten Flächen die andere der beiden Partialformen, in welche diese Pyramide nach ihrer Transposition auf das Individuum I zerfällt.

1. Erste Partialform. Ihre, an der positiven Halbaxe z' anliegende und mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$-\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{n} + z' = 1,$$

folglich gilt für sie $m = -m$, $r = n$, $s = 1$. Setzen wir diese Werthe in die zu Ende von §. 181 stehenden allgemeinen Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir zuvörderst

$$a_1 = ma$$
$$b_1 = \frac{n(b^2+c^2)b}{(2n-1)b^2+c^2} = pb$$
$$c_1 = \frac{n(b^2+c^2)c}{(2-n)c^2+nb^2} = qc$$

Da nun p jedenfalls $< q$ ist, und da die kleinere dieser beiden Grössen mit dem Werthe 1 genommen werden muss, so sind alle drei Werthe von a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, wodurch wir erhalten:

$$a_1 = \frac{m(2n-1)b^2+mc^2}{n(b^2+c^2)}a = m'a$$

$$b_1 = b$$

$$c_1 = \frac{(2n-1)b^2+c^2}{(2-n)c^2+nb^2}c = n'c$$

Die erste Partialform entspricht daher vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$, mit vorstehenden Werthen von m' und n'.

2. Zweite Partialform. Ihre an der positiven Halbaxe der z' anliegende und mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$-\frac{x'}{ma} - \frac{y'}{n} + z' = 1$$

folglich gilt für sie $m = -m$, $r = -n$, $s = 1$, und wir brauchen daher in denen für die erste Partialform gefundenen Werthen von a_1, b_1 und c_1 nur n negativ zu nehmen, um die jetzt giltigen Werthe derselben zu erhalten; daher wird

$$a_1 = \frac{m(2n+1)b^2-mc^2}{n(b^2+c^2)}a = m'a$$

$$b_1 = b$$

$$c_1 = -\frac{(2n+1)b^2-c^2}{(2+n)c^2-nb^2}c = -n'c$$

und die zweite Partialform entspricht vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit den vorstehenden Werthen von m' und n'. Für $n = \frac{2c^2}{b^2-c^2}$ verwandelt sich diese Form in das Brachydoma $m'\breve{P}\infty$.

§. 184. Transposition der Brachypyramiden $m\breve{P}n$.

Die in Figur 81 paarweise an den Endpuncten der Axe der y' erscheinenden Flächen des Individuums II gehören einer Brachypyramide $m\breve{P}n$ überhaupt, und zwar die mit 1 bezeichneten Flächen der einen, die mit 2 bezeichneten Flächen der anderen der beiden Partialformen an, in welche diese Pyramide an dem Individuum I zerfällt.

1. Erste Partialform. Ihre an der positiven Halbaxe der y' anliegende, mit 1 bezeichnete Fläche hat in dem Individuum II die Gleichung

$$-\frac{x'}{ma} + y' + \frac{z'}{n} = 1,$$

folglich gilt für sie $m = -m$, $r = 1$, $s = n$. Setzen wir diese Werthe in die zu Ende des §. 181 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir zuvörderst:

$$a_1 = m\mathrm{a}$$
$$b_1 = \frac{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{b}}{(2-n)\mathrm{b}^2+n\mathrm{c}^2} = p\mathrm{b}$$
$$c_1 = \frac{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{c}}{(2n-1)\mathrm{c}^2+\mathrm{b}^2} = q\mathrm{c}$$

Da nun q jedenfalls $< p$ ist, und da die kleinere dieser beiden Grössen mit dem Werthe 1 genommen werden muss, so haben wir sowohl a_1 als auch b_1 und c_1 mit q zu dividiren, und gelangen dadurch auf die unserer Ableitung und Bezeichnung entsprechenden Werthe:

$$a_1 = \frac{m(2n-1)\mathrm{c}^2+m\mathrm{b}^2}{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)}\,\mathrm{a} = m'\mathrm{a}$$
$$b_1 = \frac{(2n-1)\mathrm{c}^2+\mathrm{b}^2}{(2-n)\mathrm{b}^2+n\mathrm{c}^2}\,\mathrm{b} = n'\mathrm{b}$$
$$c_1 = \mathrm{c}$$

aus welchen sich denn ergiebt, dass die erste Partialform vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{\mathrm{P}}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' entspricht.

2. Zweite Partialform. Ihre in Fig. 81 an der positiven Halbaxe der y' anliegende und mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$-\frac{x'}{m\mathrm{a}} + y' - \frac{z'}{n} = 1,$$

folglich gilt für sie $m = -m$, $r = 1$, $s = -n$. Wir haben daher nur nöthig, in denen für die erste Partialform gefundenen Resultaten n mit negativem Vorzeichen einzuführen, um die gesuchten Parameter zu erhalten; so finden wir zuvörderst:

$$a_1 = m\mathrm{a}$$
$$b_1 = -\frac{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{b}}{2+n)\mathrm{b}^2-n\mathrm{c}^2} = -p\mathrm{b}$$
$$c_1 = \frac{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\mathrm{c}}{(2n+1)\mathrm{c}^2-\mathrm{b}^2} = q\mathrm{c}$$

Da nun $p >=< q$ sein wird, je nachdem $(3n+1)\mathrm{c}^2 >=< (n+3)\mathrm{b}^2$ ist, so kommen hier drei verschiedene Fälle zur Unterscheidung.

a. Ist nämlich $p > q$, so sind alle drei Werthe von a_1, b_1 und c_1 mit q zu dividiren, und es wird

$$a_1 = \frac{m(2n+1)\mathrm{c}^2-m\mathrm{b}^2}{n(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)}\,\mathrm{a} = m'\mathrm{a}$$
$$b_1 = -\frac{(2n+1)\mathrm{c}^2-\mathrm{b}^2}{(2+n)\mathrm{b}^2-n\mathrm{c}^2}\,\mathrm{b} = n'\mathrm{b}$$
$$c_1 = \mathrm{c}$$

daher in diesem Falle die zweite Partialform durch vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{\mathrm{P}}n'$ mit den vorstehenden Werthen von m' und n' bestimmt wird.

b. Ist dagegen $p = q$, was allerdings selten vorkommen dürfte, so wird die zweite Partialform von vier Flächen der Protopyramide

$$\frac{m(n+1)}{2n}\mathrm{P}$$

gebildet werden.

c. Ist endlich $p < q$, so sind alle drei Werthe von a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, wodurch sich bestimmt:

$$a_1 = \frac{m(2+n)b^2 - mnc^2}{n(b^2+c^2)} a = m'a$$
$$b_1 = -b$$
$$c_1 = \frac{(2+n)b^2 - nc^2}{(2n+1)c^2 - b^2} c = n'c$$

in welchem Falle daher die zweite Partialform durch vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit den so eben gefundenen Werthen von m' und n' bestimmt wird.

§. 185. Transposition der Prismen, Domen und Pinakoide.

Setzen wir in den Resultaten der §§. 182 bis 184 $m = \infty$, so erhalten wir für die transponirten Prismen des Individuums II folgende Parallelflächen.

Dem Protoprisma ∞P entsprechen im Individuum I

zwei Flächen des Prismas ∞P,

und zwei Flächen des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{3b^2-c^2}{3c^2-b^2}$,

welches letztere sich für $b^2 = 3c^2$ in das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$ verwandelt.

Jedem Makroprisma $\infty\bar{P}n$ entsprechen im andern Individuum:

zwei Flächen des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{(2n-1)b^2+c^2}{(2-n)c^2+nb^2}$

und zwei Flächen des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{(2n+1)b^2-c^2}{(2+n)c^2-nb^2}$.

Jedem Brachyprisma $\infty\breve{P}n$ entsprechen im andern Individuum

zwei Flächen des Makroprismas $\infty\bar{P}\frac{(2n-1)c^2+b^2}{(2-n)b^2+nc^2}$

und zwei Flächen des Makroprismas $\infty\bar{P}\frac{(2n+1)c^2-b^2}{(2+n)b^2-nc^2}$

oder zwei Flächen des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{(2+n)b^2-nc^2}{(2n+1)c^2-b^2}$

je nachdem $(3n+1)c^2 >$ oder $< (n+3)b^2$ ist; sollten diese beiden Grössen einander gleich sein, so gehört das zweite Flächenpaar dem Protoprisma ∞P an.

Setzen wir in den Resultaten des §. 183 $n = \infty$, so gelangen wir auf die Parallelflächen sämmtlicher Makrodomen $m\bar{P}\infty$, welche immer nur einer und derselben Form, nämlich der Brachypyramide

$$\frac{2mb^2}{b^2+c^2}\breve{P}\frac{2b^2}{b^2-c^2}$$

angehören.

Setzen wir eben so in den Resultaten des §. 184 $n = \infty$, so erhalten wir die Parallelflächen sämmtlicher Brachydomen $m\breve{P}\infty$, welche gleichfalls

immer nur **einer** Form angehören werden, die sich jedoch verschiedentlich bestimmt, je nachdem $3c^2 >$ oder $< b^2$ ist; es entsprechen nämlich die Parallelflächen vier Flächen der Makropyramide

$$\frac{2mc^2}{b^2+c^2}\bar{P}\frac{2c^2}{b^2-c^2}, \text{ wenn } 3c^2 > b^2,$$

dagegen vier Flächen der Brachypyramide

$$\frac{m(b^2-c^2)}{b^2+c^2}\breve{P}\frac{b^2-c^2}{2c^2}, \text{ wenn } 3c^2 < b^2.$$

Setzen wir endlich in den für $\infty\bar{P}n$ und $\infty\breve{P}n$ gefundenen Parallelflächen $n=\infty$, so erhalten wir diejenigen, welche den beiden verticalen Pinakoiden entsprechen, nämlich

für das **Makropinakoid** $\infty\bar{P}\infty$

zwei Flächen des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{2b^2}{b^2-c^2}$,

für das **Brachypinakoid** $\infty\breve{P}\infty$

zwei Flächen des Makroprismas $\infty\bar{P}\frac{2c^2}{b^2-c^2}$

oder des Brachyprismas $\infty\breve{P}\frac{b^2-c^2}{2c^2}$,

je nachdem $3c^2 >$ oder $< b^2$ ist.

Hiermit wäre denn die Transposition aller möglichen Formen beendigt.

§. 186. Zwillingskrystalle nach der Fläche eines Brachydomas.

Ausser dem bisher betrachteten herrschenden Zwillingsgesetze kommt noch am häufigsten das Gesetz vor, dass beide Individuen gegen die Fläche irgend eines Brachydomas symmetrisch gestellt sind, weshalb wir auch noch dieses Gesetz in seinen Resultaten verfolgen wollen.

Bezeichnen wir das Brachydoma, welches die Zwillingsfläche liefert, mit $\mu\breve{P}\infty$, so kommt dieser Zwillingsfläche die Gleichung

$$\frac{x}{\mu a}+\frac{y}{b}=1$$

zu, weshalb denn die in §. 47 vorausgesetzten allgemeinen Parameter dieser Fläche die Werthe $a=\mu a$, $b=b$, $c=\infty$ erhalten. Setzen wir diese Werthe in die S. 65 stehenden Gleichungen der Axen der x', y' und z' des Individuums II, so werden solche

für die Axe der x', $\frac{x}{b^2-\mu^2a^2}-\frac{y}{2\mu ab}=0$, und $z=0$;

für die Axe der y', $\frac{x}{2\mu ab}+\frac{y}{b^2-\mu^2a^2}=0$, und $z=0$;

für die Axe der z', $x=0$, und $y=0$.

Ist uns ferner im Individuum II eine Krystallfläche F' durch ihre Para-

meter a', b' und c' gegeben, so folgt nach S. 68, dass dieselbe im Axensysteme des Individuums I folgende Parameter erfordern wird:

$$a_1 = \frac{a'b'(\mu^2 a^2 + b^2)}{2\mu ab a' + (b^2 - \mu^2 a^2)b'}$$

$$b_1 = \frac{a'b'(\mu^2 a^2 + b^2)}{2\mu ab b' + (\mu^2 a^2 - b^2)a'}$$

$$c_1 = -c'$$

Da nun aber für die Fläche F', als eine zu derselben Krystallreihe gehörige Fläche, statt des Parameter-Verhältnisses $a' : b' : c'$ ganz allgemein das Verhältniss $ma : rb : sc$ vorausgesetzt werden kann, so lassen sich die Werthe der Parameter a_1, b_1 und c_1 auch folgendermaassen schreiben:

$$a_1 = \frac{mr(\mu^2 a^2 + b^2)a}{2\mu m a^2 + (b^2 - \mu^2 a^2)r}$$

$$b_1 = \frac{mr(\mu^2 a^2 + b^2)b}{2\mu r b^2 + (\mu^2 a^2 - b^2)m}$$

$$c_1 = -sc$$

womit denn die Grundlage für die Transposition irgend einer Form des Individuums II auf das Individuum I gewonnen ist.

§. 187. Transposition der Protopyramiden mP.

Auch bei diesem Gesetze wird natürlich jede Pyramide des Individuums II nach ihrer Transposition auf das Individuum I in zwei Partialformen zerfallen, deren jede aus vier, in eine Zone fallenden Flächen besteht.

In beistehender Figur mögen die vorwaltenden Flächen einer Protopyramide mP angehören, so wird die eine Partialform von den mit 1 bezeichneten Flächen und deren Gegenflächen, die andere Partialform von den mit 2 bezeichneten Flächen u. s. w. gebildet. Zur näheren Bestimmung dieser Partialformen gelangen wir aber unmittelbar durch Benutzung der allgemeinen Werthe von a_1, b_1 und c_1, welche zu Ende des vorigen Paragraphen gefunden worden sind.

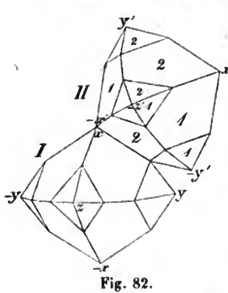


Fig. 82.

1. Erste Partialform. Ihre an der positiven Halbaxe der x' anliegende, mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} - \frac{y'}{b} - \frac{z'}{c} = 1;$$

also gilt für sie $m = m$, $r = -1$, $s = -1$. Setzen wir diese Werthe in die am Ende von §. 186 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir

$$a_1 = -\frac{m(\mu^2 a^2 + b^2)a}{2m\mu a^2 + \mu^2 a^2 - b^2} = m'a$$

$$b_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)b}{2\mu b^2-(\mu^2a^2-b^2)m} = pb$$
$$c_1 = c$$

a. Ist nun $p > 1$, so giebt uns sein Werth unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl n', und die Partialform entspricht vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{P}p$, mit den vorstehenden Werthen von m' und p.

b. Ist dagegen $p < 1$, so sind alle drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, und es bestimmt sich

$$a_1 = \frac{2\mu b^2-(\mu^2a^2-b^2)m}{2m\mu a^2+\mu^2a^2-b^2}\,a = m'a$$
$$b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{2\mu b^2-(\mu^2a^2-b^2)m}{m(\mu^2a^2+b^2)}\,c = n'c,$$

woraus folgt, dass die erste Partialform in diesem Falle vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' angehört.

2. Zweite Partialform. Ihre an der positiven Halbaxe der x' anliegende, mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{b} - \frac{z'}{c} = 1\,;$$

also gilt für sie $m = m$, $r = 1$, $s = -1$. Setzen wir diese Werthe in die am Ende von §. 186 stehenden Ausdrücke, so erhalten wir

$$a_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)a}{2m\mu a^2-\mu^2a^2+b^2} = m'a$$
$$b_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)b}{2\mu b^2+m(\mu^2a^2-b^2)} = pb$$
$$c_1 = c$$

a. Ist also $p > 1$, so gehört die zweite Partialform der Makropyramide $m'\bar{P}p$ mit vorstehenden Werthen von m' und p an.

b. Ist dagegen $p < 1$, so sind alle drei Werthe mit p zu dividiren, und dann wird

$$a_1 = \frac{2\mu b^2+m(\mu^2a^2-b^2)}{2m\mu a^2-\mu^2a^2+b^2}\,a = m'a$$
$$b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{2\mu b^2+m(\mu^2a^2-b^2)}{m(\mu^2a^2+b^2)}\,c = n'c$$

woraus sich ergiebt, dass solchenfalls die zweite Partialform vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' entspricht.

§. 188. Transposition der Makropyramiden $m\bar{P}n$.

Die in Fig. 82 an der negativen Halbaxe der z' anliegenden vier Zuspitzungsflächen gehören irgend einer Makropyramide $m\bar{P}n$ an, und zwar die

mit 1 bezeichnete Fläche der einen, die mit 2 bezeichnete Fläche der andern Partialform, in welche diese Pyramide am Individuum I zerfallen wird.

1. Erste Partialform. Ihre mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} - \frac{y'}{n\mathrm{b}} - \frac{z'}{\mathrm{c}} = 1,$$

folglich gilt für sie $m = m$, $r = -n$, $s = -1$. Setzen wir diese Werthe in die am Ende von §. 186 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir zuvörderst

$$a_1 = -\frac{mn(\mu^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)\mathrm{a}}{2m\mu\mathrm{a}^2-n(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)} = m'\mathrm{a}$$
$$b_1 = \frac{mn(\mu^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)\mathrm{b}}{2n\mu\mathrm{b}^2+m(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)} = p\mathrm{b}$$
$$c_1 = \mathrm{c}.$$

a. Ist nun $p > 1$, so giebt uns sein Werth unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl, und so entspricht die erste Partialform vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{\mathrm{P}}p$ mit vorstehenden Werthen von m' und p.

b. Ist dagegen $p < 1$, so sind alle drei Werthe von a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, und wir erhalten:

$$a_1 = -\frac{2n\mu\mathrm{b}^2+m(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)}{2m\mu\mathrm{a}^2-n(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)}\mathrm{a} = m'\mathrm{a}$$
$$b_1 = \mathrm{b}$$
$$c_1 = \frac{2n\mu\mathrm{b}^2+m(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)}{mn(\mu^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)}\mathrm{c} = n'\mathrm{c}$$

woraus denn folgt, dass solchenfalls die erste Partialform der Brachypyramide $m'\breve{\mathrm{P}}n'$ mit den vorstehenden Werthen von m' und n' angehört.

2. Zweite Partialform. Ihre mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{m\mathrm{a}} + \frac{y'}{n\mathrm{b}} - \frac{z'}{\mathrm{c}} = 1$$

folglich gilt für sie $m = m$, $r = n$ und $s = -1$, woraus sich denn ergiebt, dass wir nur in denen für die erste Partialform gefundenen Resultaten n negativ einzuführen brauchen, um die der zweiten Partialform entsprechenden Werthe zu finden. Demnach wird

$$a_1 = \frac{mn(\mu^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)\mathrm{a}}{2m\mu\mathrm{a}^2+n(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)} = m'\mathrm{a}$$
$$b_1 = \frac{mn(\mu^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)\mathrm{b}}{2n\mu\mathrm{b}^2-m(\mathrm{b}^2-\mu^2\mathrm{a}^2)} = p\mathrm{b}$$
$$c_1 = \mathrm{c}.$$

a. Findet sich nun $p > 1$, so ist sein Werth unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl, und so entspricht die zweite Partialform vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{\mathrm{P}}p$ mit vorstehenden Werthen von m' und p.

b. Bestimmt sich dagegen $p < 1$, so sind alle drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, und wir erhalten

$$a_1 = \frac{2n\mu b^2 - m(b^2-\mu^2a^2)}{2m\mu a^2 + n(b^2-\mu^2a^2)} a = m'a$$

$$b_1 = b$$

$$c_1 = \frac{2n\mu b^2 - m(b^2-\mu^2a^2)}{mn(\mu^2a^2+b^2)} c = n'c;$$

in diesem Falle findet daher die zweite Partialform ihre aequivalenten Flächen in vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n'.

§. 189. Transposition einer Brachypyramide $m\breve{P}n$.

Die in Fig. 82 an der Axe der y' liegenden Zuspitzungsflächen gehören irgend einer Brachypyramide $m\breve{P}n$, und zwar die mit 1 bezeichnete Fläche der ersten, die mit 2 bezeichnete Fläche der zweiten der beiden Partialformen, in welche diese Pyramide bei ihrer Transposition auf das Individuum I zerfällt.

1. Erste Partialform. Ihre mit 1 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} - \frac{y'}{b} - \frac{z'}{nc} = 1,$$

folglich gilt für sie $m = m$, $r = -1$, $s = -n$. Setzen wir diese Werthe in die zu Ende des §. 186 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir, wie in §. 187,

$$a_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)a}{2m\mu a^2+\mu^2a^2-b^2}$$

$$b_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)b}{2\mu b^2 - m(\mu^2a^2-b^2)} = pb$$

$$c_1 = nc$$

a. Ist nun $p > n$, so sind alle drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit n zu dividiren, und so erhalten wir die gesuchten Parameter

$$a_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)a}{n(2m\mu a^2+\mu^2a^2-b^2)} = m'a$$

$$b_1 = \frac{m(\mu^2a^2+b^2)b}{n[2\mu b^2 - m(\mu^2a^2-b^2)]} = n'b$$

$$c_1 = c;$$

woraus sich denn ergiebt, dass die erste Partialform der Makropyramide $m'\bar{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' angehört.

b. Ist dagegen $p < n$, so sind die drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, wodurch sich

$$a_1 = \frac{2\mu b^2 - m(\mu^2a^2-b^2)}{2m\mu a^2+\mu^2a^2-b^2} a = m'a$$

$$b_1 = b$$

$$c_1 = \frac{n[2\mu b^2 - m(\mu^2 a^2 - b^2)]}{m(\mu^2 a^2 + b^2)} c = n'c$$

und die erste Partialform in der Weise bestimmt, dass sie von vier Flächen der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' gebildet wird.

2. Zweite Partialform. Ihre in Fig. 82 an der positiven Halbaxe der y' anliegende und mit 2 bezeichnete Fläche hat im Individuum II die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{b} - \frac{z'}{nc} = 1,$$

folglich gilt für sie $m = m$, $r = 1$, $s = -n$. Setzen wir diese Werthe in die zu Ende von §. 186 stehenden Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so folgt

$$a_1 = \frac{m(\mu^2 a^2 + b^2)a}{2m\mu a^2 - \mu^2 a^2 + b^2}$$

$$b_1 = \frac{m(\mu^2 a^2 + b^2)b}{2\mu b^2 + m(\mu^2 a^2 - b^2)} = pb$$

$$c_1 = nc.$$

a. Ist nun $p > n$, so sind alle drei Grössen mit n zu dividiren, und die gesuchten Parameter werden

$$a_1 = \frac{m(\mu^2 a^2 + b^2)a}{n(2m\mu a^2 - \mu^2 a^2 + b^2)} = m'a$$

$$b_1 = \frac{m(\mu^2 a^2 + b^2)b}{n[2\mu b^2 + m(\mu^2 a^2 - b^2)]} = n'b$$

$$c_1 = c,$$

woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle die zweite Partialform durch vier Flächen der Makropyramide $m'\bar{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' dargestellt wird.

b. Ist dagegen $p < n$, so sind die drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren, wodurch sie folgende Werthe erhalten:

$$a_1 = \frac{2\mu b^2 + m(\mu^2 a^2 - b^2)}{2m\mu a^2 - \mu^2 a^2 + b^2} a = m'a$$

$$b_1 = b$$

$$c_1 = \frac{n[2\mu b^2 + m(\mu^2 a^2 - b^2)]}{m(\mu^2 a^2 + b^2)} c = n'c$$

aus welchen sich ergiebt, dass solchenfalls die zweite Partialform der Brachypyramide $m'\breve{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' entspricht.

Aus allen diesen Resultaten wird sich der Leser leicht diejenigen ableiten können, welche irgend einem Prisma oder Doma, so wie den drei Pinakoiden entsprechen, daher wir zur Ersparung von Raum diese Folgerungen übergehen.

§. 190. Beispiel der Anwendung.

Es bedarf wohl keiner weiteren Erörterung, dass diese Transpositionen der Axen und der Flächen des einen Individuums auf das andere ein grosses

theoretisches Interesse haben; denn sie allein gewähren uns eine Einsicht in den krystallonomischen Zusammenhang, welcher zwischen den Formen beider Individuen Statt findet; sie allein belehren uns darüber, dass in den verwickeltsten Zwillingskrystallen alle Flächen des einen Individuums krystallographisch-möglichen Flächen des anderen Individuums entsprechen. Dieselben Transpositionen haben aber auch ein praktisches Interesse, da sie uns bei der Zeichnung der Zwillingskrystalle wesentliche Dienste leisten. Das theoretische Interesse steigert sich übrigens noch in allen denjenigen Fällen, da die, einer transponirten Fläche entsprechende Fläche am anderen Individuum wirklich ausgebildet ist, was sich in der Coincidenz, oder auch in der gleichzeitigen Spiegelung beider Flächen auf eine sehr bestimmte Weise zu erkennen giebt. In solchen Fällen lässt uns nämlich die Transposition bisweilen auf eine directe, von allen Messungen unabhängige Bestimmung der Grundparameter der betreffenden Krystallreihe gelangen. Wir wollen diess beispielsweise an einer bekannten Zwillingsbildung des Wolframs erläutern.

An diesem Minerale kommen nicht selten Zwillingskrystalle vor, denen das Gesetz: Zwillingsfläche eine Fläche des Brachydomas $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, zu Grunde liegt. Sind nun an den Individuen dieser Zwillinge auch die Flächen der Brachypyramide $2\breve{P}2$ ausgebildet, so erkennt man zuweilen mit der grössten Evidenz, dass zwei von den beiderseitigen Flächen dieser Pyramide genau in eine Ebene fallen, woraus denn folgt, dass die betreffende transponirte Fläche von $2\breve{P}2$ des Individuums II mit einer Fläche derselben Pyramide des Individuums I identisch ist. Untersucht man genauer die Lage der beiderseitigen coincidirenden Flächen, so erkennt man, dass man es hier mit demjenigen Falle zu thun hat, welcher in §. 189 ad 1 erläutert worden ist.

Setzen wir also $\mu = \frac{1}{2}$, $m = 2$, und $n = 2$, so erhalten wir zuvörderst

$$b_1 = \frac{9b^2+4a^2}{15b^2-4a^2}b = pb$$
$$c_1 = 2c.$$

Nun lehrt schon eine ganz rohe Messung der Polkante des Brachydomas $\breve{P}\infty$, ja es lehrt schon der Augenschein, dass $p < 2$ sein muss, weil ausserdem a viel grösser als b sein müsste; folglich gehört die Fläche unter den in §. 189, ad 1, b betrachteten Fall, und die gesuchten Parameter werden für sie, indem wir den gemeinschaftlichen Factor im Zähler von a_1 und c_1 durch N ausdrücken,

$$a_1 = \frac{9Na}{28a^2-9b^2} = m'a$$
$$b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{18Nc}{8a^2+18b^2} = n'c$$

Die Coincidenz der transponirten Fläche mit einer Fläche von $2\breve{P}2$ lehrt aber, dass $m' = n' = 2$ sein muss; daraus folgt denn die Gleichung

$$28a^2 - 9b^2 = 4a^2 + 9b^2,$$
$$\text{oder } a : b = \sqrt{3} : 2 = \tfrac{3}{2} : \sqrt{3}$$

als dasjenige Verhältniss, welches im Wolfram für die Grundparameter a und b nothwendig Statt finden muss. Da nun die Messungen des Protoprismas ∞P sehr nahe mit der Voraussetzung übereinstimmen, dass $c = \sqrt{2}$ ist, so dürfte wohl das Grundverhältniss des Wolframs mit $\tfrac{3}{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ festgestellt sein. *)

Setzt man die Werthe von a und b in diejenigen Ausdrücke, welche in §. 189 ad 2, a für die zweite Partialform einer Pyramide $m\breve{P}n$ gefunden worden sind, so folgt, dass sich in denselben Zwillingskrystallen des Wolframs für diese Partialform der Pyramide $2\breve{P}2$ das Makrodoma $\tfrac{1}{2}\bar{P}\infty$ als die aequivalente Form bestimmt.

Anm. Dieselben Resultate lassen sich auch daraus ableiten, dass in jedem Zwillingskrystalle die in die Zone der Zwillingsaxe fallenden Flächen paarweise coincidiren müssen. Aehnliche Coincidenzen von Flächen kommen bekanntlich in vielen anderen Zwillingskrystallen vor, und werden in den dazu geeigneten Fällen zu einer Bestimmung der Grund-Dimensionen der betreffenden Krystallreihe benutzt werden können.

Fünfter Abschnitt.

Monoklinoëdrisches System.

Erstes Capitel.

Formen des monoklinoëdrischen Systems.

§. 191. Axensystem und Elemente desselben.

Das monoklinoëdrische Krystallsystem ist nach §. 51 dasjenige System, dessen Formen auf ein monoklinoëdrisches Axensystem, d. h. auf ein solches Axensystem bezogen werden müssen, in welchem sich zwei Coordinat-Ebenen unter einem schiefen Winkel C schneiden, während die dritte Ebene auf ihnen beiden rechtwinkelig ist. Für die Axen findet ganz dasselbe Neigungsverhältniss Statt, indem zwei mit einander einen schiefen Winkel $\gamma = C$, mit der dritten Axe dagegen rechte Winkel bilden.

*) Vergl. meine Elemente der Mineralogie 3. Auflage, S. 367 Anm., und 4. Aufl. S. 387 Anm.

Was das Grössenverhältniss der Axen betrifft, so scheint solches immer das der durchgängigen Ungleichheit zu sein, weshalb es allgemein durch $a : b : c$ dargestellt werden kann. Daher gilt denn auch für die Axen dieses Systems, was von jenen des rhombischen Systems bemerkt wurde (§. 161), dass sie als drei singuläre und völlig ungleichwerthige Axen zu betrachten sind, von denen uns keine unmittelbar als Hauptaxe bezeichnet ist. Da jedoch die Coordinat-Ebene durch die beiden schiefwinkeligen Axen die einzige Ebene ist, welche eine symmetrische Halbirung des Axensystems und aller darum möglichen Formen gestattet, und da wir in der Erscheinungsweise der Körper eine Symmetrie zunächst oder mindestens nach rechts und links fordern, so werden die Formen des monoklinoëdrischen Systems nur dann symmetrisch vor uns erscheinen, wenn wir die Ebene der schiefwinkeligen Axen vertical, und auf uns zulaufend denken. Hieraus folgt denn auch, dass nur eine der beiden schiefwinkeligen Axen zur Hauptaxe gewählt werden kann, während die aufrechte Stellung nach der dritten Axe zu keiner symmetrischen Anschauung der Formen gelangen lassen würde. Sonach ist die Hauptaxe zwar wiederum eine Wahlaxe; allein die Wahl kann nur zwischen zweien Axen schwanken, weil die dritte Axe von ihr ausgeschlossen bleibt, obgleich sie gewissermaassen als die einzige absolut bestimmte Linie des ganzen Axensystems charakterisirt ist.

Indem wir also eine der beiden schiefwinkeligen Axen als Hauptaxe gelten lassen, und nach ihr die aufrechte Stellung der Formen bestimmen*), so werden die beiden anderen Axen zu Nebenaxen. Nennen wir nun wiederum die durch diese Nebenaxen gehende Ebene die Basis, oder den basischen Hauptschnitt, so können wir füglich die Nebenaxen selbst durch die beiden Namen der Klinodiagonale und der Orthodiagonale unterscheiden, weil sie die Diagonalen der schiefen rhombischen Basis bilden, und weil für die eine derselben die Neigung gegen die Hauptaxe eben so bezeichnend ist, als für die andere die Rechtwinkeligkeit gegen sie. Die beiden verticalen, durch die Hauptaxe und je eine der Nebenaxen gehenden Coordinat-Ebenen lassen sich dann als klinodiagonaler und orthodiagonaler Hauptschnitt bezeichnen. Uebrigens gilt uns künftig die Hauptaxe als Axe der x, die Klinodiagonale als Axe der y, und die Orthodiagonale als Axe der z.

Anm. Mehre ausgezeichnete Krystallographen und Mineralogen betrachten das monoklinoëdrische System als eine blosse hemiëdrische oder meroëdrische Ausbildungsform des rhombischen Systems. Dadurch wird allerdings für die Berechnung der Formen einige Erleichterung gewonnen, weil der schiefe Neigungswinkel C ein den Calcül etwas erschwerendes Element ist. Allein die Symmetrie-Verhältnisse der monoklinoëdrischen Formen, der Mangel dreier auf

*) Es scheint nicht zweckmässig, wie jetzt oft auch in den Zeichnungen geschieht, die Hauptaxe schief, und die Basis horizontal zu stellen. Denn der Begriff der Hauptaxe ist immer so aufgefasst worden, dass sie diejenige Axe ist, welche, selbst vertical gestellt, die aufrechte Stellung der Formen bestimmt. Die schiefe Lage der Basis ist es, was die klinoëdrischen Krystallsysteme vorzüglich charakterisirt.

einander rechtwinkeliger Pinakoide und dreier dergleichen Systeme von prismatischen Formen, die von der gewöhnlichen Einfachheit oft auffallend abweichenden Ableitungszahlen, die Seltenheit der im rhombischen Systeme so gewöhnlichen Zwillingsgesetze, und manche andere Gründe stehen jener Ansicht entgegen; weshalb denn auch die meisten Krystallographen das monoklinoëdrische System als ein eigenthümliches schiefwinkeliges Krystallsystem anerkennen, wofür sich schon *Kupffer* erklärte, indem er es ein willkürliches Verfahren nannte alle monoklinoëdrische Formen auf ein rhombisches Axensystem zurückführen zu wollen, obgleich solches mathematisch immer möglich ist.*)

§. 192. Vollständige monoklinoëdrische Pyramide.

Die Parameter-Verhältnisse sind im monoklinoëdrischen Systeme wesentlich dieselben, wie im rhombischen Systeme, so dass die in §. 162 mitgetheilten Betrachtungen auch hier ihre Anwendung finden. Denken wir uns nun ein endliches Parameter-Verhältniss $a : b : c$, oder $ma : rb : sc$ gegeben, dessen Glieder sich auf die Axe der x, der y und der z beziehen, und construiren wir uns den vollständigen Inbegriff aller isoparametrischen Flächen, so gelangen wir stets auf eine von acht Dreiecken umschlossene Form, deren Mittelkanten in eine Ebene, nämlich in die Ebene der Basis fallen, also auf eine solche Form, welche eine Pyramide überhaupt, und eine monoklinoëdrische Pyramide insbesondere genannt werden kann.

Diese vollständigen monoklinoëdrischen Pyramiden, welche die einzigen geschlossenen Formen Formen des Systems darstellen würden, unterscheiden sich aber von den rhombischen Pyramiden durch eine sehr auffallende Eigenschaft, welche eine nothwendige Folge des schiefen Neigungswinkels zweier Axen ist: nämlich dadurch, dass sie nicht von lauter gleichen und ähnlichen, sondern von zweierlei verschiedenen Dreiecken gebildet werden, indem diejenigen vier Flächen, welche paarweise über den beiden stumpfen Winkeln C liegen, durch ihre Figur und Grösse von denen über den beiden spitzen Winkeln C liegenden vier Flächen abweichen. Die beiderlei Dreiecke haben zwar zwei Seiten gleich, aber die dritte Seite ungleich, und zwar die über dem stumpfen Winkel C gelegenen eine grössere, die anderen eine kleinere dritte Seite. Die monoklinoëdrischen Pyramiden sind daher keine einfachen Formen, sofern nämlich unter einer einfachen Form eine solche verstanden wird, welche von lauter gleichen und ähnlichen Flächen begränzt wird; sondern sie sind zusammengesetzte, und zwar zweifach zusammengesetzte oder dimerische Formen; sie zerfallen in zwei Partialformen, deren jede von zwei gleichartigen Flächenpaaren gebildet wird, und füglich eine Hemipyramide genannt werden kann. Die eine dieser Hemipyramiden fällt also in die spitzen, die andere in die stumpfen Winkel, welche von dem orthodiagonalen und dem basischen Hauptschnitte gebildet werden; wir nennen jene die positive, diese die nega-

*) Handbuch der rechnenden Krystallonomie, 1831, S. 186.

tive Hemipyramide.*) Eine jede derselben besteht nur aus zwei, einander parallelen Flächenpaaren, welche an und für sich den Raum gar nicht allseitig umschliessen, sondern eine prismatoidische, offene Form darstellen würden.

Dieser zusammengesetzte Charakter der monoklinoëdrischen Pyramiden gewinnt aber noch dadurch eine ganz besondere Bedeutung, dass je zwei correlate oder complementäre Hemipyramiden in der Wirklichkeit keineswegs nothwendig an einander gebunden, sondern vielmehr völlig unabhängig von einander sind; dass also bald nur die eine, bald nur die andere zur Ausbildung gelangt ist, und dass es zu den minder häufigen Erscheinungen gehört, beide zugleich und im völligen Gleichgewichte ausgebildet anzutreffen.

Anm. Diese Zerfällung der monoklinoëdrischen Pyramiden in zwei verschiedene und nicht nothwendig coëxistirende Partialformen ist eine ganz besondere, in der verschiedenen Lage und Figur ihrer beiderlei Flächen begründete Meroëdrie, von welcher im rhombischen Systeme nur seltene Beispiele bekannt sind. Für die Combinationen des monoklinoëdrischen Systems wird aber durch diese, auch gewisse prismatische Formen betreffende Meroëdrie eine ganz eigenthümliche Erscheinungsweise bedingt, welche sie auf den ersten Blick von den Combinationen des rhombischen Systems unterscheiden lässt, selbst wenn der Winkel C einem rechten Winkel sehr nahe kommen und die schiefe Basis fast horizontal erscheinen sollte.

§. 193. Uebersicht der Formen des monoklinoëdrischen Systems.

Das monoklinoëdrische System überhaupt lässt aber folgende Arten von Formen erkennen.

1. Pyramiden von dem so eben geschilderten Charakter, welche also, wenn beide Partialformen zugleich und im Gleichgewichte ausgebildet sind, als vollständige monoklinoëdrische Pyramiden erscheinen. Jede solche Pyramide zerfällt aber in eine positive und eine negative Hemipyramide, welche von einander unabhängig sind. Denken wir die schiefe Basis gegen uns zufallend oder nach vorn geneigt, so erscheint das vordere Glied der positiven Hemipyramide unterhalb, jenes der negativen Hemipyramide oberhalb der Basis, wie in beistehender Figur. Die vollständige Pyramide hat dreierlei Polkanten, nämlich vier gleiche orthodiagonale, und zwei kürzere schärfere, sowie zwei längere stumpfere klinodiagonale Polkanten, welche letzteren als die charakteristischen und besonders wichtigen Kanten der einzelnen Hemipyramiden zu betrachten sind; ausserdem sind noch vier gleiche Mittelkanten vorhanden.

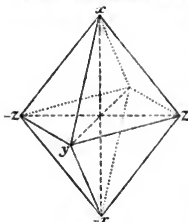


Fig. 83.

*) Die umgekehrte Benennung würde vielleicht noch vortheilhafter sein.

Der basische und der orthodiagonale Hauptschnitt sind Rhomben, der klinodiagonale Hauptschnitt dagegen ist ein Rhomboid. Es giebt möglicherweise eine unendliche Manchfaltigkeit von monoklinoëdrischen Pyramiden, welchen aber allen die Eigenschaft zukommt, in zwei von einander unabhängige Hemipyramiden zu zerfallen. Obgleich sie daher nur selten vollständig ausgebildet vorkommen, so ist es doch bei vielen Betrachtungen zweckmässig, sie in ihrer Vollständigkeit vorauszusetzen.

Ausser den Pyramiden spielen nun mehre Arten von offenen Formen eine äusserst wichtige Rolle; dahin gehören einestheils prismatische Formen, anderntheils Pinakoide. Die prismatischen Formen aber sind, eben so wie im rhombischen Systeme, von dreierlei Art, je nachdem ihre Flächen dieser oder jener der Axen parallel laufen: also verticale, horizontale und geneigte Prismen, von denen eine jede Art in der Richtung ihrer Axe von indefiniter Ausdehnung und unbestimmter Begränzung zu denken ist. Indem wir abermals das Wort Prisma lediglich für die vertical-prismatischen Formen gebrauchen, die übrigen als Domen bezeichnen, erhalten wir folgende Unterscheidung derselben.

2. Prismen, sind von 4, der Hauptaxe parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhombus ist; da also ihre Flächen gleich breit und gleichwerthig sind, so haben sie den Charakter von einfachen Formen; ihre Seitenkanten werden nach ihrer Lage als klinodiagonale und orthodiagonale Kanten unterschieden.

3. Klinodomen, sind von 4, der Klinodiagonale parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhombus ist, weshalb sie sich gleichfalls als einfache Formen erweisen; ihre Kanten werden nach ihrer Lage als Polkanten und Mittelkanten unterschieden.

4. Orthodomen, sind von 4, der Orthodiagonale parallelen Flächen gebildete Formen, deren Querschnitt ein Rhomboid ist; ihre Flächen haben daher ungleiche Breite, indem die zwei über dem spitzen Winkel *C* liegenden Flächen schmäler sind, als die zwei über den stumpfen Winkel fallenden Flächen. Hieraus ergiebt sich, dass jedes Orthodoma aus zwei ungleichwerthigen Flächenpaaren besteht, und in zwei Partialformen zerfällt, welche man Hemidomen nennen, und als positives und negatives Hemidoma unterscheiden kann. Je zwei correlate oder zusammengehörige Hemidomen sind in der Erscheinung eben so unabhängig von einander, wie je zwei correlate Hemipyramiden, und dieses Verhältniss seiner horizontalen Prismen bildet abermals eine hervorstechende Eigenthümlichkeit in der ganzen Ausbildung des monoklinoëdrischen Systems.

Die Pinakoide endlich sind gleichfalls dreierlei, nämlich

5. das Basopinakoid oder die schiefe Basis, d. h. das der Basis parallele Flächenpaar;
6. das Orthopinakoid, welches aus zweien, dem orthodiagonalen Hauptschnitte, und
7. das Klinopinakoid, welches aus zweien, dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallelen Flächen besteht.

§. 194. Hemipyramiden und Hemidomen.

Weil je zwei zusammengehörige oder correlate Hemipyramiden, und je zwei correlate Hemidomen in einer solchen gegenseitigen Unabhängigkeit stehen, dass sie in den Combinationen nur selten zugleich, und noch seltener im Verhältnisse des Gleichgewichtes auftreten, so erlangt die Bestimmung ihrer selbständigen oder isolirten Erscheinungsweise eine noch grössere Wichtigkeit, als die Bestimmung ihres gemeinschaftlichen Vorkommens in der vollständigen monoklinoëdrischen Pyramide und in dem vollständigen Orthodoma.

Eine jede Hemipyramide stellt für sich allein einen Inbegriff von vier gleichwerthigen, ihren klinodiagonalen Polkanten parallelen Flächen, also eigentlich eine offene, prismatoidische Form dar, welche sich jedoch von den eigentlichen prismatischen Formen dadurch unterscheidet, dass ihre Flächen keiner der Axen parallel sind. Sie kann übrigens eben so wenig, als irgend eine prismatische Form, selbständig, sondern nur in Combination mit anderen, ihre indefinite Ausdehnung begränzenden Formen auftreten.

Jede Hemipyramide besteht aus einem oberen und einem unteren Gliede oder Flächenpaare, welche, wenn sie mit einander zum Durchschnitte kommen, zwei schief liegende Mittelkanten bilden, die den klinodiagonalen Polkanten parallel sind. Diese Polkanten sind übrigens als die wichtigsten und gewissermaassen charakteristischen Begränzungs-Elemente der Hemipyramiden zu betrachten.

Bei der unbestimmten Begränzung der Hemipyramiden ist es zweckmässig, ihrer Ausdehnung subsidiarisch gewisse Gränzen zu setzen, wozu sich besonders der basische und der orthodiagonale Hauptschnitt, als diejenigen beiden Ebenen empfehlen, welche schon in der vollständigen monoklinoëdrischen Pyramide die Gränzen zwischen ihren beiden Partialformen bestimmen. Da nun jede Fläche einer Hemipyramide mit allen drei Hauptschnitten zum Durchschnitte kommt, und da ihre Neigungswinkel gegen die Hauptschnitte eine besondere Wichtigkeit erlangen, so wollen wir diese ihre drei Intersectionen und die ihnen entsprechenden Winkel unter den Namen der basischen, der orthodiagonalen und der klinodiagonalen Kante einführen.

Ein jedes Hemidoma stellt für sich allein einen Inbegriff von zwei gleichwerthigen, der Orthodiagonale parallelen Flächen dar, und ist daher in seiner geometrischen Erscheinungsweise ähnlich dem Basopinakoide und dem Orthopinakoide, unterscheidet sich jedoch von ihnen dadurch, dass seine Flächen nur der Orthodiagonale, aber keiner der beiden anderen Axen parallel sind. Die Hemidomen bilden daher alle diejenigen einzelnen Flächenpaare des Systems, welche möglicherweise zwischen der Basis und dem Orthopinakoide vorkommen können, während sie, wie diese, in die Zone der Orthodiagonale gehören.

Es ist zweckmässig, den Flächen der Hemidomen, wenn auch nicht in der Richtung der Orthodiagonale, so doch nach anderen Richtungen eine be-

stimmte Begränzung anzuweisen, wozu sich wiederum der basische und der orthodiagonale Hauptschnitt, als diejenigen beiden Ebenen empfehlen, welche schon in dem vollständigen Orthodoma die Gränzen seiner beiden Partialformen bestimmen. Die beiden Kanten, welche jede Fläche eines Hemidomas mit diesen beiden Hauptschnitten bildet, können wir als die Polkante und Mittelkante, oder auch als die orthodiagonale und die basische Kante des Hemidomas bezeichnen.

§. 195. Ableitung und Bezeichnung der Formen.

Wollen wir zu einer geordneten Uebersicht der mancherlei Formen und Partialformen, sowie zu einer Einsicht in ihren gegenseitigen Zusammenhang gelangen, so müssen wir eine allgemeine Ableitung derselben aus einer zweckmässig gewählten Grundform vornehmen. Zu solcher Grundform kann aber nur irgend eine Pyramide gewählt werden, weil diese die einzigen Formen sind, deren Flächen ein endliches Verhältniss der Parameter haben; auch wird die, in der Wirklichkeit nur selten erfüllte Voraussetzung einzuführen sein, dass diese Grundpyramide vollständig, also mit beiden, gleichmässig ausgedehnten Partialformen gegeben ist, weil nur dadurch auch in den abgeleiteten Gestalten der Zusammenhang der correlaten Partialformen erhalten bleibt, und zur Anschauung gebracht wird.

Wir bezeichnen diese vollständig vorausgesetzte Pyramide mit $\pm P$, indem uns $+P$ oder auch P schlechthin die positive, $-P$ die negative Hemipyramide bedeutet. Die sie bestimmenden Grundelemente, durch welche in jedem besonderen Falle die ganze Krystallreihe charakterisirt wird, sind der constante schiefe Winkel *C* oder γ, und das Verhältniss der Parameter a : b : c, von welchen a in die Hauptaxe, b in die Klinodiagonale und c in die Orthodiagonale fällt.

Aus dieser Grundform leiten wir nun, gerade so wie in den vorhergehenden Krystallsystemen, zuvörderst durch alleinige Veränderung der Hauptaxe nach einer Zahl m, die theils $>$ theils < 1 sein, und einerseits bis ∞ wachsen, anderseits bis 0 abnehmen kann, eine Reihe von Pyramiden ab, welche sämmtlich durch die Coincidenz oder den Parallelismus ihrer Mittelkanten mit den Mittelkanten der Grundform charakterisirt sind, und, wegen dieses unmittelbaren Zusammenhanges mit der Grundpyramide, sowie als die ersten Resultate der Ableitung abermals Protopyramiden genannt werden können. Als Gränzform dieser Pyramiden erscheint einerseits das Protoprisma, oder dasjenige Prisma, dessen Flächen den Mittelkanten der Grundform parallel sind, anderseits die schiefe Basis, oder das mit ihr aequivalente Basopinakoid. Während nun aber jede Protopyramide in zwei, von einander unabhängige Partialformen zerfällt, so ist solches mit diesen beiden Gränzformen nicht mehr der Fall, weshalb sich denn die Reihe der Protopyramiden oder die Grundreihe des Systems in folgender Weise herausstellt:

$$0P \;\ldots\; \overset{m<1}{\pm mP} \;\ldots\; \pm P \;\ldots\; \overset{m>1}{\pm mP} \;\ldots\; \infty P.$$

Die ferneren Ableitungen erfolgen in diesem Systeme auf ganz ähnliche Art, wie im rhombischen Systeme (S. 272), indem erst die eine, dann aber die andere Diagonale der Grundform als veränderlich eingeführt, oder mit einer Zahl n multiplicirt wird, welche stets > 1 ist, und bis ∞ wachsen kann. So erhalten wir aus jedem Gliede $\pm mP$ der Grundreihe zwei neue Reihen von Pyramiden, von denen die eine durch Vergrösserung der Orthodiagonale bei constanter Klinodiagonale, die andere durch Vergrösserung der Klinodiagonale bei constanter Orthodiagonale abgeleitet worden ist, während jene den klinodiagonalen Hauptschnitt, diese den orthodiagonalen Hauptschnitt mit $\pm mP$ noch gemein hat. Wir würden diese beiden Arten von Pyramiden, mit Beziehung auf diejenige Diagonale, durch deren Vergrösserung sie abgeleitet wurden, als orthodiagonale und klinodiagonale Pyramiden zu unterscheiden haben, erlauben uns jedoch dafür die abgekürzten Namen Orthopyramide und Klinopyramide in Vorschlag zu bringen. In der Bezeichnung aber können wir sie dadurch unterscheiden, dass wir das Grund-Element P entweder mit einem horizontalen, oder mit einem geneigten Striche versehen, und demnach $\pm m\bar{P}n$ als das Zeichen einer Orthopyramide, dagegen $\pm m\grave{P}n$ als das Zeichen einer Klinopyramide einführen. *)

Je grösser der Werth von n ist, um so bedeutender wird sich die Orthopyramide $\pm m\bar{P}n$ nach der Orthodiagonale in die Länge gestreckt zeigen; ist zuletzt $n = \infty$, so hört die Gestalt auf, eine Pyramide zu sein, und verwandelt sich in ein Orthodoma; daher wird $\pm m\bar{P}\infty$ das Zeichen eines vollständig ausgebildeten Orthodomas, welches jedoch nach §. 194 in zwei, von einander unabhängige Hemidomen, in $m\bar{P}\infty$ und $-m\bar{P}\infty$ zerfällt. Aehnliche Resultate ergeben sich für die Klinopyramiden $\pm m\grave{P}n$; je grösser die Zahl n ist, um so bedeutender wird eine solche Pyramide nach der Klinodiagonale in die Länge gestreckt erscheinen; wird zuletzt $n = \infty$, so geht die Pyramide in ein Klinodoma über, dessen Zeichen daher allgemein $m\grave{P}\infty$ geschrieben werden muss, ohne Vorsetzung der Zeichen + und −, weil ja die Klinodomen einfache, mit allen vier Flächen ausgebildete Formen sind.

Da übrigens diese doppelte Ableitung aus jedem Gliede der Grundreihe vorgenommen werden muss, so ist sie auch für das Protoprisma ∞P in Anwendung zu bringen, aus welchem sie uns einerseits auf verschiedene Orthoprismen $\infty\bar{P}n$ und auf das Orthopinakoid $\infty\bar{P}\infty$, anderseits auf verschiedene Klinoprismen $\infty\grave{P}n$ und auf das Klinopinakoid $\infty\grave{P}\infty$ gelangen lässt; womit denn alle Ableitungen im Gebiete dieses Systems erschöpft sind.

---

*) Dieses von *Ritgen*, im Neuen Jahrbuche für Min. 1833, S. 266 f. freilich in einem etwas anderen Sinne vorgeschlagene Hilfsmittel der Bezeichnung scheint mir zweckmässiger, als das von mir bisher gebrauchte Mittel, die Zeichen der klinodiagonalen Formen in Klammern einzuschliessen; daher ich mich desselben künftig bedienen werde.

Anm. Wie man die sämmtlichen Resultate dieser Ableitungen in einem rectangulären Schema auf eine übersichtliche Weise zusammenstellen kann, darüber sind meine Anfangsgründe der Krystallographie 2. Aufl. S. 243 nachzusehen. Noch einfacher ist ein triangulüres Schema, welches auf ganz ähnliche Weise zu construiren ist, wie das S. 273 stehende Schema des rhombischen Systems. Beide Schemata gewähren eine einfache und wohlgeordnete Uebersicht des ganzen Krystallsystems.

§. 196. Berechnung der monoklinoëdrischen Formen; Signatur der Winkel.

Bei der Berechnung der monoklinoëdrischen Formen werden wir zunächst die Pyramiden zu berücksichtigen haben, weil solche, eben so wie im rhombischen Systeme, als die allgemeinen Repräsentanten aller übrigen Formen zu betrachten sind. Da jedoch diese Pyramiden in der Regel nicht vollständig, sondern nur in einer ihrer beiden Hemipyramiden ausgebildet vorkommen, so hat auch die Berechnung der vollständigen monoklinoëdrischen Pyramiden eine weit geringere praktische Wichtigkeit, als die Berechnung ihrer einzelnen Hemipyramiden. Uebrigens brauchen wir die Rechnung zunächst nur für die Grundform oder für irgend eine Form von dem Parameter-Verhältnisse $a : b : c$ durchzuführen, weil die für sie gefundenen Resultate auch für alle übrigen Formen gelten, wenn man nur die denselben entsprechenden Ableitungszahlen m und n den betreffenden Grundparametern a, b und c als Factoren vorsetzt, oder auch ma statt a, und nb oder nc statt b oder c schreibt.

In der nachstehenden Figur erscheinen neben einander zwei correlate, nach §. 194 durch den basischen und orthodiagonalen Hauptschnitt begränzte Hemipyramiden von dem Parameter-Verhältnisse $a : b : c$, und von dem schiefen Axenwinkel C oder γ, so dass das rechts stehende Bild die positive, das links stehende Bild die negative Hemipyramide darstellt. Wir haben uns nun

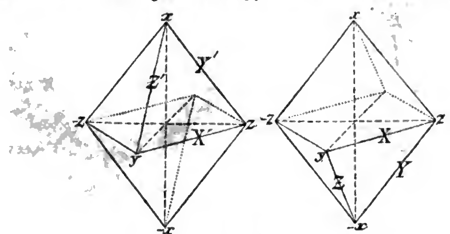


Fig. 84.

zuvörderst über die Signatur gewisser Winkel zu verständigen, welche bei der Berechnung einer jeden Hemipyramide zu berücksichtigen sind. Zu dem Ende bezeichnen wir in jeder positiven Hemipyramide:

die basische Kante mit X,
die orthodiagonale Kante mit Y,
die klinodiagonale Kante mit Z,

und lassen dieselben, mit Accenten versehenen Buchstaben, also X', Y' und Z' für die gleichnamigen Kanten der negativen Hemipyramide gelten.

Die Hauptschnittwinkel, welche von grosser Wichtigkeit sind, bezeichnen wir in jeder positiven Hemipyramide, wie folgt:

den Winkel der Kantenlinie X gegen die Orthodiagonale mit δ,
\- - - - - - - Klinodiagonale mit ε,
\- - - - Y - - Hauptaxe mit ϑ,
\- - - - - - - Orthodiagonale mit η,
\- - - - Z - - Klinodiagonale mit τ,
\- - - - - - - Hauptaxe mit ι.

In der negativen Hemipyramide haben die Winkel δ, ε, ϑ und η dieselben Werthe, wie in der correlaten positiven Hemipyramide, wogegen die beiden anderen Winkel verschieden sind, weshalb wir sie mit τ' und ι', so wie den für sie giltigen Neigungswinkel der Axen, $180^\circ - \gamma$ mit γ' bezeichnen wollen.

Uebrigens ergiebt sich unmittelbar aus den Verhältnissen des Axensystems, dass

$$\delta + \varepsilon = 90^\circ$$
$$\vartheta + \eta = 90^\circ$$
$$\gamma + \tau + \iota = 180^\circ$$
$$\gamma' + \tau' + \iota' = 180^\circ.$$

Nach diesen vorläufigen Bestimmungen verschreiten wir zur Berechnung der Formen selbst.

§. 197. Berechnung der Hemipyramiden.

In jeder Hemipyramide sind es besonders die Kantenlinien, die Hauptschnittwinkel und die Kantenwinkel, um deren Kenntniss es sich handelt.

1. Kantenlinien. Unter Voraussetzung des Parameter-Verhältnisses $a : b : c$ bestimmt sich in der Hemipyramide $\pm$P

die Mittelkante $X = \sqrt{b^2 + c^2}$,
die orthod. Kante $Y = \sqrt{c^2 + a^2}$,
die klinod. Kante $Z = \sqrt{a^2 + b^2 \mp 2abc\cos C}$,

in welchem letzteren Ausdrucke das negative Zeichen für die positive, das positive Zeichen für die negative Hemipyramide gilt.

2. Hauptschnittwinkel. Diese Winkel bestimmen sich aus den Grund-Elementen des Axensystems, wie folgt; es ist

$$\text{tang}\,\delta = \frac{b}{c}, \quad \text{tang}\,\varepsilon = \frac{c}{b},$$

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{c}{a}, \quad \text{tang}\,\eta = \frac{a}{c},$$

$$\tang\tau = \frac{a\sin C}{b - a\cos C}, \quad \tang\iota = \frac{b\sin C}{a - b\cos C},$$

$$\tang\tau' = \frac{a\sin C}{b + \cos C}, \quad \tang\iota' = \frac{b\sin C}{a + b\cos C}.$$

Einige dieser Winkel lassen sich leicht durch die Kantenwinkel bestimmen; es ist nämlich

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos Z}{\sin X} = \frac{\cos Z'}{\sin X'},$$

$$\cos\vartheta = \frac{\cos Z}{\sin Y} = \frac{\cos Z'}{\sin Y'},$$

$$\cos\tau = \frac{\cos X}{\sin Z}, \quad \cos\tau' = \frac{\cos X'}{\sin Z'},$$

$$\cos\iota = \frac{\cos Y}{\sin Z}, \quad \cos\iota' = \frac{\cos Y'}{\sin Z'}.$$

Anm. In der Praxis ist es oft wichtig, auch die Flächenwinkel der Hemipyramiden d. h. die ebenen Winkel ihrer Flächen, und zwar besonders die den beiden Kanten X und Y gegenüberliegenden Flächenwinkel zu kennen; bezeichnen wir diese beiden Winkel mit ξ und v, so findet sich:

$$\cos\xi = \cot Y \cot Z, \quad \cos\xi' = \cot Y' \cot Z',$$
$$= \cos\vartheta\cos\iota, \quad = \cos\vartheta\cos\iota',$$

$$\tang\xi = \frac{\tang\iota}{\cos Z}, \quad \tang\xi' = \frac{\tang\iota'}{\cos Z},$$

$$= \frac{\tang\vartheta}{\cos Y}, \quad = \frac{\tang\vartheta}{\cos Y'},$$

$$\cos v = \cot X \cot Z, \quad \cos v' = \cot X' \cot Z',$$
$$= \cos\varepsilon\cos\tau, \quad = \cos\varepsilon\cos\tau',$$

$$\tang v = \frac{\tang\tau}{\cos Z}, \quad \tang v' = \frac{\tang\tau'}{\cos Z},$$

$$= \frac{\tang\varepsilon}{\cos X} \quad = \frac{\tang\varepsilon}{\cos X'}.$$

3. Kantenwinkel. Der allgemeine Ausdruck für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen F und F' in einem monoklinoëdrischen Axensysteme lässt sich aus dem, S. 44 für ein triklinoëdrisches Axensystem aufgefundenen Ausdrucke ableiten, wenn man in selbigem

$$\alpha = 90^0, \quad \beta = 90^0, \quad \gamma = C$$
$$A = 90^0, \quad B = 90^0,$$

setzt, wodurch die drei Grössen A', B' und C' folgende Werthe erhalten:

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = \cos C.$$

Substituirt man alle diese Werthe, so folgt ganz allgemein

$$\cos W = \frac{bb'cc' + cc'aa' + aa'bb'\sin^2 C - cc'(ab' + a'b)\cos C}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2\sin^2 C - 2abc^2\cos C}\sqrt{b'^2c'^2 + c'^2a'^2 + a'^2b'^2\sin^2 C - 2a'b'c'^2\cos C}}$$

Da uns nun zunächst nur die Kanten X, Y und Z, oder die Neigungswinkel der Pyramidenfläche gegen die drei Hauptschnitte interessiren, so haben wir statt der zweiten Fläche F', deren Parameter in diesem allgemeinen Aus-

drucke mit a', b' und c' bezeichnet sind, successiv die Basis, den orthodiagonalen und den klinodiagonalen Hauptschnitt einzuführen, deren Gleichungen $x=0$, $y=0$ und $z=0$ sind. Behalten wir also die Buchstaben a, b und c bei, und setzen wir erst $a'=0$, dann $b'=0$, und endlich $c'=0$, so bestimmen sich die gesuchten Winkel wie folgt:

$$\cos X = \frac{c(b - a\cos C)}{\sqrt{K}},$$

$$\cos Y = \frac{c(a - b\cos C)}{\sqrt{K}},$$

$$\cos Z = \frac{ab\sin C}{\sqrt{K}}$$

in welchen Ausdrücken $\sqrt{K} = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2\sin^2 C - 2abc^2\cos C}$ ist.

Diese Werthe gelten zunächst für die positive Hemipyramide; für die negative Hemipyramide ist sowohl im Zähler als im Nenner das mit $\cos C$ behaftete Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen, also positiv einzuführen.

In der Praxis wird man es jedoch immer vorziehen, diese Kantenwinkel aus den Hauptschnittwinkeln zu berechnen, durch welche sie sich sehr einfach bestimmen; es ist nämlich in jeder positiven oder negativen Hemipyramide:

$$\text{tang}X = \frac{\text{tang}\tau}{\sin\varepsilon}, \quad \text{tang}X' = \frac{\text{tang}\tau'}{\sin\varepsilon},$$

$$\text{tang}Y = \frac{\text{tang}\iota}{\sin\vartheta}, \quad \text{tang}Y' = \frac{\text{tang}\iota'}{\sin\vartheta},$$

$$\text{tang}Z = \frac{\text{tang}\vartheta}{\sin\iota}, \quad \text{tang}Z' = \frac{\text{tang}\vartheta}{\sin\iota'},$$

$$= \frac{\text{tang}\varepsilon}{\sin\tau}, \quad = \frac{\text{tang}\varepsilon}{\sin\tau'}.$$

Diese trigonometrische Berechnung empfiehlt sich schon deshalb, weil man die Hauptschnittwinkel ohnediess berechnen muss, indem solche bei den meisten Problemen eine sehr wichtige Rolle spielen.

§. 198. Allgemeine Brauchbarkeit der gefundenen Resultate.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate, welche sich zunächst auf die Grundform, oder auf irgend eine unbestimmte Pyramide von dem Parameter-Verhältnisse $a : b : c$ beziehen, sind desungeachtet allgemein brauchbar für alle möglichen Formen einer Krystallreihe, wenn man zuvörderst statt a, b und c die betreffenden Grundparameter a, b und c, und hierauf die den übrigen Formen entsprechenden Ableitungszahlen m und n als Factoren vor a und b, oder a und c einführt. Man hat also

für irgend eine Protopyramide mP, ma statt a,
für irgend eine Orthopyramide mP̄n, ma statt a, und nc statt c,
für irgend eine Klinopyramide mP̸n, ma statt a, und nb statt b

einzuführen, um dieselben Resultate für eine dieser drei Arten von Pyramiden geltend zu machen.

Was die drei Arten von prismatischen Formen betrifft, so braucht man gleichfalls zunächst nur diejenigen zu berechnen, welche unmittelbar mit der Grundform oder mit der Pyramide von dem Parameter-Verhältnisse $a : b : c$ verbunden sind.

1. Berechnung der Prismen. Setzt man in den Resultaten des §. 197 $a = \infty$, so folgt für das Protoprisma ∞P

$$\cos X = \frac{c\cos C}{\sqrt{c^2+b^2\sin^2 C}} = \cos Y \cos C,$$

$$\cos Y = \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2\sin^2 C}},$$

$$\cos Z = \frac{b\sin C}{\sqrt{c^2+b^2\sin^2 C}} = \sin Y;$$

dabei bedeutet X den Winkel, welchen die prismatischen Flächen mit der Basis bilden. Da für ein jedes Prisma $\tau = C$ ist, so bestimmt sich auch

$$\tang X = \frac{\tang C}{\sin\varepsilon}, \text{ wo } \tang\varepsilon = \frac{c}{b},$$

$$\tang Z = \frac{\tang\varepsilon}{\sin C} = \frac{c}{b\sin C}.$$

Diese Ausdrücke gelten für jedes Orthoprisma $\infty P n$, wenn man nc statt c, und für jedes Klinoprisma $\infty P n$, wenn man nb statt b setzt.

2. Berechnung der Klinodomen. Setzt man in den Resultaten des §. 197 $b = \infty$, so folgt für das Klinodoma $P\infty$

$$\cos X = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2\sin^2 C}},$$

$$\cos Y = \frac{c\cos C}{\sqrt{c^2+a^2\sin^2 C}} = \cos X \cos C,$$

$$\cos Z = \frac{a\sin C}{\sqrt{c^2+a^2\sin^2 C}} = \sin X;$$

wobei Y den Neigungswinkel der domatischen Flächen gegen den orthodiagonalen Hauptschnitt bedeutet. Da ferner für jedes Klinodoma $\iota = C$ ist, so bestimmt sich auch

$$\tang Y = \frac{\tang C}{\sin\vartheta}, \text{ wo } \tang\vartheta = \frac{c}{a},$$

$$\tang Z = \frac{\tang\vartheta}{\sin C} = \frac{c}{a\sin C}.$$

Diese Ausdrücke gelten für jedes Klinodoma $mP\infty$, wenn man ma statt a setzt.

3. Berechnung der Hemidomen. Setzt man endlich in den Resultaten des §. 197 $c = \infty$, so folgt zunächst für das Hemidoma $P\infty$

$$\cos X = \frac{b - a\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}},$$
$$\cos Y = \frac{a - b\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}},$$
$$\cos Z = 0, \text{ also } Z = 90^\circ.$$

Da aber in dem Hemidoma die Winkel X und τ, Y und ι einander gleich sind, so wird auch

$$\tang X = \frac{a\sin C}{b - a\cos C}$$
$$\tang Y = \frac{b\sin C}{a - b\cos C}$$

Führt man in allen diesen Ausdrücken $\cos C$ negativ ein, so verwandeln sie sich in diejenigen, welche dem negativen Hemidoma $-P\infty$ entsprechen; also wird

$$\cos X' = \frac{b + a\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos C}},$$
$$\cos Y' = \frac{a + b\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos C}},$$
$$\tang X' = \frac{a\sin C}{b + a\cos C},$$
$$\tang Y' = \frac{b\sin C}{a + b\cos C}.$$

Alle diese Werthe aber gelten ganz allgemein für irgend ein Hemidoma $\pm mP\infty$, wenn man in ihnen ma statt a setzt.

§. 199. Hemimorphismus im monoklinoëdrischen Systeme.

Zwar hat *Pasteur* an einigen Salzen, wie z. B. am weinsteinsauren Ammoniak, eine Art von Hemiëdrie beobachtet, welche jener des rhombischen Systems analog zu sein scheint; da sie jedoch eine sehr untergeordnete, und selbst nach ihrer Gesetzmässigkeit noch nicht völlig constatirte Erscheinung ist, so lassen wir sie noch einstweilen auf sich beruhen. Wichtiger ist der zuweilen vorkommende Hemimorphismus, welcher unter anderen am Rohrzucker und an der Weinsäure in sehr ausgezeichneter Weise vorkommt, und zuerst von *Hankel* nachgewiesen, später von *Emil Wolff* ausführlicher zur Darstellung gebracht worden ist.*)

Dieser Hemimorphismus findet in der Richtung der Orthodiagonale Statt, so dass also die Krystalle des Zuckers und der Weinsäure sehr häufig an dem rechten Ende dieser Nebenaxe theilweise durch andere Flächen begränzt werden, als an dem linken Ende; eine Ausbildungsweise, welche nicht nur auf die ganze Erscheinung dieser Krystalle einen wesentlichen Ein-

*) *Hankel*, in Poggend. Ann. B. 49, S. 495 ff. und *Wolff*, im Journ. für prakt. Chemie, B. 28, S. 129 ff.

fluss ausübt, sondern auch mit ihren physischen Eigenschaften im genauesten Zusammenhange steht, indem der Hemimorphismus hier, wie in anderen Krystallsystemen, eine polare Pyro-Elektricität der Krystalle in der Richtung der hemimorphischen Axe bedingt.

Nach den von *Wolff* mitgetheilten Messungen ist im Zucker C oder $\gamma = 76^0\ 44'$, und $a : b : c = 0{,}688 : 1 : 0{,}8$, also $b\cos C = \frac{1}{4}a$, wodurch uns nach §. 204 die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten verbürgt wird. Die beistehende Figur stellt eine Combination dar, in welcher sich der Hemimorphismus besonders auffallend kund giebt. Dieselbe besteht wesentlich aus den Formen

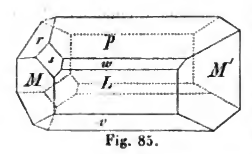


Fig. 85.

$0P = P$	deren wichtigste Winkel sind		
$\infty P = M,$	$M : M'$	$=$	$79^0\ 0'$
$\infty P\infty = L,$	$P : L$	$=$	$103\ 16$
$P\infty = v,$	$L : v$	$=$	$115\ 16$
$-P\infty = w,$	$L : w$	$=$	$133\ 19$

An der linken Seite des Krystalls erscheinen jedoch ausser den Flächen M noch die Flächen s, welche der Hemipyramide $-P$, und die Flächen r, welche dem Klinodoma $P\infty$ angehören, während dieselben Flächen an der rechten Seite des Krystalls vermisst werden.*) Offenbar ist diese Ausbildungsweise als eine hemimorphische in der Richtung der Orthodiagonale, nicht aber als eine Hemiëdrie zu erklären, weil ja der Hemimorphismus die Existenz gleicher Flächen an beiden Enden der ihn bestimmenden Axe, wie hier der Flächen M, keinesweges ausschliesst.

Ganz ähnlich verhalten sich die Krystalle der Weinsäure, nur mit dem Unterschiede, dass in ihnen die Flächen der Hemipyramide $-P$ und des Klinodomas $P\infty$ auf der rechten Seite der Orthodiagonale auftreten.

Zweites Capitel.

Combinationen und Zonen des monoklinoëdrischen Systems.

§. 200. Allgemeine Betrachtung über die Combinationen.

Die Combinationen des monoklinoëdrischen Systems haben eine grosse allgemeine Aehnlichkeit mit denen des rhombischen Systems, von welchen sie sich wesentlich nur durch die schiefe Lage der Basis, durch das Auftreten der Hemipyramiden und Hemidomen, sowie durch die mehr oder weniger willkürliche Wahl des Axensystems unterscheiden. Während nämlich im

*) In manchen Krystallen sind nur die Flächen r, in andern nur die Flächen s vorhanden, aber immer blos einseitig auf der linken Seite ausgebildet.

rhombischen Systeme alle drei Coordinat-Ebenen und somit alle drei Axen ihrer Lage nach absolut bestimmt sind, so ist diess hier nur mit einer Coordinat-Ebene und mit einer Axe der Fall. Der klinodiagonale Hauptschnitt ist die einzige absolut bestimmte und gar keiner willkürlichen Deutung unterworfene Ebene, wie er denn auch allein eine symmetrische Halbirung aller Formen und Combinationen gestattet; und eben so ist die Orthodiagonale die einzige absolut bestimmte Axe. Die beiden anderen Coordinat-Ebenen und die beiden anderen Axen dagegen sind mehr oder weniger unserer willkürlichen Bestimmung überlassen, indem sich möglicherweise je zwei verschiedene, in die Zone der Orthodiagonale fallende Flächenpaare als basischer und als orthodiagonaler Hauptschnitt betrachten lassen. Indessen wird in den meisten Fällen die Beschaffenheit der Combinationen ein sicheres Anhalten für die Wahl dieser beiden Coordinat-Ebenen, oder, was dasselbe ist, für die Wahl der Hauptaxe und der Klinodiagonale darbieten. Man hat dabei ganz vorzüglich auf die vorwaltenden Zonen, auf die besonders vorherrschenden Formen, bisweilen auch auf die vorwaltende Längenausdehnung der Krystalle und auf andere Verhältnisse Rücksicht zu nehmen, jedenfalls aber einen zu kleinen Werth des Winkels C oder γ zu vermeiden.

Nachdem so die Basis und der orthodiagonale Hauptschnitt, oder die Hauptaxe und die Klinodiagonale gewählt sind, so sondern sich, nach der Lage ihrer klinodiagonalen Kanten, die verschiedenen vierflächigen Formen in Prismen, Klinodomen und Hemipyramiden, die noch übrigen zweiflächigen Formen aber erhalten die Bedeutung von Hemidomen.

Aus den vorhandenen Hemipyramiden wählt man dann diejenige als Grundform, deren Verhältnisse zu den übrigen Formen sie vorzugsweise dazu geeignet erscheinen lassen. Dadurch wird auch das Verhältniss der Grundparameter $a : b : c$ für die betreffende Krystallreihe bestimmt, welche nun erst in allen ihren Elementen fixirt ist.

Anm. Bisweilen wird die Grundform vollständig ausgebildet sein. Weil aber je zwei correlate Hemipyramiden, ohne der Bedingung einer nothwendigen Coëxistenz unterworfen zu sein, durch die Identität ihrer Parameter so innig mit einander verknüpft sind, dass mit einer derselben zugleich die andere gegeben ist, so bedarf es auch nur der Ausbildung einer der Hemipyramiden der Grundform, um diese selbst und daher die ganze Krystallreihe nach ihren Lineardimensionen zu bestimmen. Sind gar keine Hemipyramiden, oder ist keine zur Grundform geeignete Hemipyramide vorhanden, so schliesst man aus den Verhältnissen der übrigen Formen auf dasjenige Parameter-Verhältniss, welches am vortheilhaftesten zu Grunde zu legen ist, oder bestimmt doch wenigstens diejenigen Glieder desselben, welche sich aus den wirklich vorhandenen Formen noch ableiten lassen.

Wie durch die Wahl der Hauptaxe und Klinodiagonale die verschiedenen Formen und Partialformen im Allgemeinen als Hemipyramiden, Prismen, Klinodomen und Hemidomen unterschieden werden, so bestimmen sich durch die Wahl der Grundform die verschiedenen Arten der Hemipyramiden und Prismen, womit denn die blose nomenclatorische oder allgemeine Entwickelung der Combination vollzogen ist.

§. 201. Theorie der binären Combinationen.

Die besondere Entwickelung der monoklinoëdrischen Combinationen, welche eine Bestimmung der krystallographischen Zeichen aller Formen und Partialformen erfordert, beruht, wie in allen Krystallsystemen, so auch hier theils auf der Theorie der binären Combinationen, theils auf der Zonenlehre, theils auch auf Messungen.

Was nun die Theorie der binären Combinationen betrifft, so ist solche in der Hauptsache keine andere, als jene der binären rhombischen Combinationen. Nur hat man dabei das selbständige Auftreten der Partialformen zu berücksichtigen, weshalb es denn nöthig wird, diese Theorie zunächst nur auf die Combinationen zweier Hemipyramiden zu gründen, wobei natürlich eine Zuschärfung der Polkanten nur noch für die klinodiagonalen Polkanten Statt finden wird, während sich solche für die orthodiagonalen und die basischen Kanten in eine blose Abstumpfung verwandelt. Ebenso werden die vierflächigen Zuspitzungen der Ecke in Zuschärfungen derselben übergehen, und in gleicher Weise werden die Combinations-Verhältnisse aller übrigen Formen in ihrem wörtlichen Ausdrucke angemessene Veränderungen erleiden, wie solche theils durch die andere Benennung der Nebenaxen, theils durch das Vorkommen von Hemipyramiden und Hemidomen bedingt werden. Diess gilt selbst für die Combinationen derjenigen Formen, deren Flächen in die Zone der Hauptaxe fallen, und deren Verhältnisse in diesem Systeme genau dieselben sind, wie im rhombischen Systeme. Dagegen stellen sich die durch die Ableitungszahlen ausgedrückten numerischen Bedingungen der verschiedenen Combinations-Verhältnisse im monoklinoëdrischen Systeme mit denselben Werthen heraus, wie in §. 170, weshalb wir es denn auch dem Leser überlassen können, sich die Theorie der binären Combinationen in derjenigen Ausdrucksweise abzuleiten, wie solche dem Charakter des monoklinoëdrischen Systems gemäss erfordert wird. Uebrigens gehören binäre Combinationen zu den minder häufigen Erscheinungen des monoklinoëdrischen Systems, in dessen eigenthümlichen Verhältnissen die Bedingung zur Ausbildung mehrzähliger Combinationen gegeben ist, weil jede einzelne Partialform als eine besondere Form mitzählt. Daher stellen sich denn auch schon die gewöhnlichen, einfacheren Combinationen meist als dreizählige, vierzählige oder mehrzählige Combinationen dar.

Eine ganz besondere Wichtigkeit für die Entwickelung der Combinationen erlangt die Lage der Combinationskanten, deren Unterscheidung in heteropolare und amphipolare Combinationskanten hier noch mehr als in den bisher betrachteten Krystallsystemen ihre Anwendung findet, wobei nicht nur der Gegensatz von oberen und unteren, sondern auch der Gegensatz von vorderen und hinteren Flächen geltend zu machen ist. Sehr häufig sind die Combinationskanten zweier Formen einem der Hauptschnitte parallel, und für solche Fälle ergeben sich unmittelbar aus den Resultaten der Ableitung folgende allgemeine Regeln.

1. Je zwei Formen, deren Combinationskanten dem basischen Hauptschnitte parallel sind, haben dasselbe Verhältniss der Klinodiagonale und Orthodiagonale; sie sind also gleichnamig, und haben $n' = n$.
2. Je zwei Formen, deren heteropolare Combinationskanten dem orthodiagonalen Hauptschnitte parallel sind, haben dasselbe Verhältniss der Hauptaxe und Orthodiagonale; sind sie also
   a. gleichnamig, und zwar
      α. orthodiagonal, so ist $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$,
      β. klinodiagonal, so ist $m' = m$,
   b. ungleichnamig, so ist $\frac{m'}{n'} = m$, wenn sich die accentuirten Buchstaben auf die orthodiagonale Form beziehen.
3. Je zwei Formen, deren heteropolare Combinationskanten dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallel sind, haben dasselbe Verhältniss der Hauptaxe und Klinodiagonale; sind sie also
   a. gleichnamig, und zwar
      α. orthodiagonal, so ist $m' = m$,
      β. klinodiagonal, so ist $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$,
   b. ungleichnamig, so ist $m' = \frac{m}{n}$, wenn der accentuirte Buchstabe auf die orthodiagonale Form bezogen wird.

Man wird sehr oft Gelegenheit haben, von diesen einfachen Regeln Gebrauch zu machen.

§. 202. Zonen des monoklinoëdrischen Systems.

Die Zonenlehre des monoklinoëdrischen Systems stimmt in allen wesentlichen Puncten mit jener des rhombischen Systems überein, sofern es sich nämlich um die Bestimmung der Lage der Flächen und ihrer Ableitungszahlen handelt; nur die Namen der Zonen und der ihnen tributären Formen erleiden eine, der besonderen Nomenclatur des Systems entsprechende Aenderung. Die einzige wesentliche Verschiedenheit betrifft den Werth der Tangente des Neigungswinkels zweier tautozonaler Flächen, welcher auch für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse auf eigenthümliche Bedingungen gelangen lässt. Daher wollen wir in diesem Paragraphen die wichtigsten Zonen nur nach den Positions-Verhältnissen ihrer Flächen, im nächsten Paragraphen aber die Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Flächen betrachten.

Die wichtigsten Zonen des monoklinoëdrischen Systems sind:

1. die Zone der Hauptaxe,
2. die Zone der Orthodiagonale,
3. die Zone der Klinodiagonale,

4. die Zonen der basischen Kanten der Hemipyramiden,
5. die Zonen der klinodiagonalen Polkanten der Hemipyramiden, und
6. die Zonen der orthodiagonalen Kanten der Hemipyramiden.

Die drei ersten, den Axen entsprechenden Zonen sind sehr leicht zu entwickeln.

1. Die Zone der Hauptaxe begreift die sämmtlichen verticalen Prismen und die beiden verticalen Pinakoide, also das Protoprisma ∞P, alle Orthoprismen $\infty \bar{P}n$, alle Klinoprismen $\infty \grave{P}n$, das Orthopinakoid $\infty \bar{P}\infty$ und das Klinopinakoid $\infty \grave{P}\infty$; sie stimmt nach allen ihren Verhältnissen mit der gleichnamigen Zone des rhombischen Systems überein.
2. Die Zone der Orthodiagonale begreift die sämmtlichen Orthodomen in ihren beiden Partialformen, die Basis und das Orthopinakoid, also alle positiven Hemidomen $m\bar{P}\infty$, alle negativen Hemidomen $-m\bar{P}\infty$, $0P$ und $\infty \bar{P}\infty$.
3. Die Zone der Klinodiagonale begreift die sämmtlichen Klinodomen $m\grave{P}\infty$, das Basopinakoid $0P$ und das Klinopinakoid $\infty \grave{P}\infty$.
4. Die Zonen der basischen Kanten einer Hemipyramide stehen unter dem Gesetze derselben Zonengleichung, wie die in §. 175 erläuterten Mittelkantenzonen der rhombischen Pyramiden, weshalb sich denn für sie folgende Resultate ergeben:

Diejenigen Formen, welche in die Zone der basischen Kanten einer Hemipyramide Flächen zu liefern vermögen, sind:

a. wenn die Zonenlinie die basische Kante einer Protopyramide ist, die Basis $0P$, alle mögliche $+mP$ oder $-mP$, und das Protoprisma ∞P;
b. wenn die Zonenlinie die basische Kante der Klinopyramide $\grave{P}n$ ist, alle mögliche Klinopyramiden $m\grave{P}n$ mit gleichem Werthe von n, das Klinoprisma $\infty \grave{P}n$ und die Basis $0P$;
c. wenn die Zonenlinie die basische Kante der Orthopyramide $\bar{P}n$ ist, alle mögliche Orthopyramiden $m\bar{P}n$ mit gleichem Werthe von n, das Orthoprisma $\infty \bar{P}n$ und die Basis $0P$.

5. Die Zonen der klinodiagonalen Polkanten einer Hemipyramide haben genau dieselbe Zonengleichung, wie die in §. 176 erläuterten makrodiagonalen Polkantenzonen der rhombischen Pyramiden, und die für sie giltigen Resultate sind im Allgemeinen folgende:

Diejenigen Formen, welche in die Zone der klinodiagonalen Polkanten irgend einer Hemipyramide Flächen liefern können, sind:

a. wenn die Zonenlinie die klinodiagonale Polkante einer Protopyramide $\pm mP$ ist:

das Hemidoma $\pm m\bar{P}\infty$,
alle Orthopyramiden $\pm m\bar{P}n$,
die Protopyramide $\pm mP$ selbst,
alle Klinopyramiden $\pm mn\grave{P}n$, und endlich
das Klinopinakoid $\infty \grave{P}\infty$;

b. wenn die Zonenlinie die klinodiagonale Polkante einer **Klinopyramide** $\pm m\mathrm{P}n$ ist:

das Hemidoma $\pm\frac{m}{n}\mathrm{P}\infty$,

alle Orthopyramiden $\pm\frac{m}{n}\mathrm{P}n'$,

die Protopyramide $\pm\frac{m}{n}\mathrm{P}$,

alle Klinopyramiden $\pm\frac{mn'}{n}\mathrm{P}n'$, mit $n' < n$,

die Klinopyramide $\pm m\mathrm{P}n$ selbst,

alle Klinopyramiden $\pm\frac{mn'}{n}\mathrm{P}n'$, mit $n' > n$, und

das Klinopinakoid $\infty\mathrm{P}\infty$;

c. wenn die Zonenlinie die klinodiagonale Polkante einer **Orthopyramide** $\pm m\mathrm{P}n$ ist:

das Hemidoma $\pm m\mathrm{P}\infty$,
alle Orthopyramiden $\pm m\mathrm{P}n'$, mit $n' > n$,
die Orthopyramide $\pm m\mathrm{P}n$ selbst,
alle Orthopyramiden $\pm m\mathrm{P}n'$, mit $n' < n$,
die Protopyramide $\pm m\mathrm{P}$,
alle Klinopyramiden von der Zeichenform $\pm mn'\mathrm{P}n'$, und
das Klinopinakoid $\infty\mathrm{P}\infty$.

6. Die Zonen der **orthodiagonalen Kanten** einer Hemipyramide nehmen für sich dieselbe Zonengleichung in Anspruch, wie die in §. 177 betrachteten brachydiagonalen Polkantenzonen der rhombischen Pyramiden, woraus sich denn folgende specielle Resultate ableiten lassen.

Diejenigen Formen, welche in die Zone der orthodiagonalen Kante irgend einer Hemipyramide Flächen liefern können, sind:

a. wenn die Zonenlinie die orthodiagonale Kante einer **Protopyramide** $\pm m\mathrm{P}$ ist:

das Klinodoma $m\mathrm{P}\infty$,
alle Klinopyramiden $\pm m\mathrm{P}n$,
die Protopyramide $\pm m\mathrm{P}$ selbst,
alle Orthopyramiden $\pm mn\mathrm{P}n$, und endlich
das Orthopinakoid $\infty\mathrm{P}\infty$;

b. wenn die Zonenlinie die orthodiagonale Kante einer Orthopyramide $\pm m\mathrm{P}n$ ist:

das Klinodoma $\frac{m}{n}\mathrm{P}\infty$,

alle Klinopyramiden $\pm\frac{m}{n}\mathrm{P}n'$,

die Protopyramide $\pm\frac{m}{n}\mathrm{P}$,

alle Orthopyramiden $\pm\frac{mn'}{n}$ Þn', mit $n' < n$,
die Orthopyramide $\pm m$Þn selbst,
alle Orthopyramiden $\pm\frac{mn'}{n}$Þn', mit $n' > n$, und
das Orthopinakoid ∞Þ∞;

c. wenn die Zonenlinie die orthodiagonale Kante einer Klinopyramide $\pm m$Pn ist:

das Klinodoma mP∞,
alle Klinopyramiden $\pm m$Pn', mit $n' > n$,
die Klinopyramide $\pm m$Pn selbst,
alle Klinopyramiden $\pm m$Pn', mit $n' < n$,
die Protopyramide $\pm m$P,
alle Orthopyramiden von der Zeichenform $\pm mn'$Þn', und
das Orthopinakoid ∞Þ∞.

Hiermit ist denn die allgemeine Entwickelung der oben aufgeführten sechs gewöhnlichsten Zonen vollständig erschöpft. Bei der Vielfältigkeit von Durchschnitten, welche, namentlich durch das isolirte Auftreten der Partialformen, selbst in den einfacheren oder minder reichhaltigen Combinationen herbeigeführt werden, kann es natürlich nicht fehlen, dass gerade in diesem Systeme, auch bei völlig normaler oder symmetrischer Ausbildung der Formen, oftmals noch viele andere Zonen sichtbar hervortreten. Sind dann in einer solchen nur irgend zwei Flächen bekannt, so wird die Auffindung der Zonengleichung nach §. 36 leicht bewerkstelligt werden können. Will man sich endlich für irgend einen Formen-Inbegriff, also für irgend eine Krystallreihe des Systems, alle und auch die verstecktesten Zonen zur Kenntniss bringen, so hat man nur für die gegebenen Formen die in §. 40 erläuterte graphische Linearmethode der Zonenprojection anzuwenden.

§. 203. Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Kanten, und Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse.

Um den Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier tautozonaler Flächen F und F' zu finden, welche in die Zone einer Linie von den Gleichungen

$$\frac{x}{\mu}-\frac{y}{\nu}=0, \text{ und } \frac{z}{\varrho}-\frac{x}{\mu}=0$$

fallen, haben wir in den S. 56 stehenden allgemeinen Ausdrücken, welche sich auf ein triklinoëdrisches Axensystem beziehen, die dem monoklinoëdrischen Systeme entsprechenden Bedingungen, nämlich:

$$\alpha=90^0,\quad \beta=90^0,\quad \gamma=C,$$
$$A=90^0,\quad B=90^0,\quad C=\gamma,$$
$$A'=0,\quad B'=0,\quad C'=\cos C,$$

einzuführen, wodurch man auf folgende einfachere Formel gelangt:

$$\tang W = \frac{k\sin C\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2+2\mu\nu\cos C}}{aa'bb'\sin^2 C+cc'aa'+bb'cc'-cc'(ab'+a'b)\cos C}$$

In diesem Ausdruck ist für k der, dem jedesmaligen Falle angemessene von den drei Werthen $\frac{M}{\mu}$, $\frac{N}{\nu}$ oder $\frac{R}{\varrho}$ einzuführen, in welchen

$$M=aa'(bc'-b'c),\quad N=bb'(ca'-c'a),\quad R=cc'(ab'-a'b)$$

ist. Schon diese allgemeine Formel lässt in vielen Fällen auf den gesuchten besonderen Werth von $\tang W$ gelangen.

Anm. Für die Hauptaxenzone z. B. ist $\mu=\infty$, $\nu=0$, $\varrho=0$, $a=a'=\infty$; setzt man also $k=\frac{M}{\mu}$, so folgt

$$\tang W = \frac{(bc'-b'c)\sin C}{bb'\sin^2 C+cc'}.$$

Für die Klinodiagonalzone ist $\mu=0$, $\nu=\infty$, $\varrho=0$, $b=b'=\infty$; nimmt man also den Werth $k=\frac{N}{\nu}$, so ergiebt sich

$$\tang W = \frac{(ca'-c'a)\sin C}{aa'\sin^2 C+cc'}$$

Für die Orthodiagonalzone ist $\mu=0$, $\nu=0$, $\varrho=\infty$, $c=c'=\infty$; weshalb denn für den Werth $k=\frac{R}{\varrho}$ der Ausdruck

$$\tang W = \frac{(ab'-a'b)\sin C}{aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos C}$$

gefunden wird, der uns schon auf die Bedingung verweist, dass das Product $ab\cos C$ einen rationalen Werth haben muss, wenn die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten auch in dieser Zone bestehen soll.

Man kann nun leicht zeigen, dass in einer jeden monoklinoëdrischen Krystallreihe die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten allgemein nur dann gewährleistet ist, wenn das Product $ab\cos C$ einen rationalen Werth hat.

Da nämlich die beiden Flächen F und F', als abgeleitete Flächen, auf irgend eine Grundform von dem Parameter-Verhältnisse a : b : c zu beziehen sind, und demgemäss

für F statt $a : b : c$ das Verhältniss ma : rb : sc,

für F' statt $a' : b' : c'$ das Verhältniss m'a : r'b : s'c

gesetzt werden kann, so tritt obiger Ausdruck von $\tang W$ als eine Function der Grundparameter a, b und c in nachstehender Form hervor:

$$\tang W = \frac{k\sin C\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2+2\mu\nu\cos C}}{mm'rr'a^2b^2\sin^2 C+ss'mm'c^2a^2+rr'ss'b^2c^2-ss'c^2(mr'+m'r)ab\cos C}$$

in welcher für k wiederum der dem jedesmaligen Falle entsprechende Werth $\frac{M}{\mu}$, oder $\frac{N}{\nu}$, oder $\frac{R}{\varrho}$ einzuführen ist.

Denken wir uns nun aus derselben Zone irgend zwei andere Flächen F_1 und F_1' gegeben, deren Parameter-Verhältnisse m_1a : r_1b : s_1c, und

$m'_1a : r'_1b : s'_1c$ sind, und nennen wir ihren Neigungswinkel W', so erhalten wir einen ganz ähnlichen Werth von tangW', und man erkennt sofort, dass beide diese Werthe Multipla einer und derselben irrationalen Grösse, nämlich der Grösse $\sin C\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2+2\mu\nu\cos C}$ sind, und dass die Factoren dieses irrationalen Grundwerthes von lauter rationalen Grössen gebildet werden, mit alleiniger Ausnahme des noch zweifelhaften Productes $ab\cos C$. Daher wird denn in dem monoklinoëdrischen Systeme die allgemeine Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse darin gegeben sein, dass das Product $ab\cos C$ einen rationalen Zahlwerth liefern muss.

Wir können mit *Kupffer*, welcher zuerst auf dieses Resultat gelangte*), diese Bedingung in der Weise erfüllt denken, dass $b\cos C = ha$ sein muss, wobei h eine rationale Zahl ist. Damit wäre uns denn ein bestimmtes Verhältniss angezeigt, welches zwischen den beiden auf einander schiefwinkeligen Lineardimensionen, oder zwischen der Hauptaxe und der Klinodiagonale der Grundform, und dem schiefen Neigungswinkel C obwalten muss. Fällen wir nämlich von dem Endpuncte der Klinodiagonale b eine Normale auf die Hauptaxe a, so muss der durch solche Normale abgeschnittene Theil der Hauptaxe, (denn das ist $b\cos C$), ein rationaler Bruchtheil von dieser Hauptaxe sein. Dabei scheint jedoch, nach Analogie anderer in der Krystallwelt herrschender Zahlen, für h nicht nur ein rationaler, sondern auch ein ziemlich einfacher Bruchwerth gefordert zu werden, weil sich bei Zulassung sehr complicirter, d. h. solcher Bruchwerthe, deren Zähler und Nenner durch grosse Zahlen dargestellt werden, in allen Fällen ein der Beobachtung entsprechender rationaler Näherungswerth von h auffinden lassen würde.

§. 204. Prüfung des, für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse giltigen Gesetzes.

Wir wollen nun beispielsweise zeigen, wie weit in einigen monoklinoëdrischen Krystallreihen das gefundene Gesetz in Erfüllung gebracht ist.

Im Glaubersalze ist nach den Messungen von *Mohs*:

$$a : b = 1{,}109 : 1, \text{ und } C = 72^\circ\ 15',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}2749\,a$, oder $h = \frac{11}{40}$.

Im Glauberite ist nach Messungen von *Phillips* und mir:

$$a : b = 0{,}8381 : 1, \text{ und } C = 68^\circ\ 16',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}4418\,a$, oder $h = \frac{4}{9}$.

Im Eisenvitriole ist nach den von *Miller* mitgetheilten Winkeln:

$$a : b = 1{,}311 : 1, \text{ und } C = 75^\circ\ 40',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}1888\,a$, oder $h = \frac{17}{90}$.

---

*) Handbuch der rechnenden Krystallonomie, S. 501. Man könnte eben so gut auch die Bedingung $a\cos C = gb$ geltend machen, wobei g eine rationale Zahl bedeutet; denn eigentlich müssen beide zugleich erfüllt sein.

In der **Kupferlasur** ist nach den Messungen von *Mohs*:

$$a : b = 2{,}079 : 1, \text{ und } C = 87^0\ 39',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}0197\,a$, oder $h = \frac{1}{50}$.

Im **Rothbleierze** ist nach den Messungen von *Kupffer*;

$$a : b = 0{,}9568 : 1, \text{ und } C = 78^0\ 1',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}217\,a$, oder $h = \frac{13}{60}$.

Im **Gypse** ist nach den von *Miller* angegeben Winkeln:

$$a : b = 0{,}5981 : 1, \text{ und } C = 80^0\ 36',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}2731\,a$, oder $h = \frac{3}{11}$.

Im **Lazulithe** ist nach den Messungen von *Prüfer*:

$$a : b = 1{,}755 : 1, \text{ und } C = 88^0\ 2',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}01956\,a$, oder $h = \frac{1}{51}$.

Im **Laumontite** ist, wenn wir in *Miller's* Figur*) $m = \infty P$, $x = 0P$, und $r = -P$ setzen, nach seinen Winkelangaben:

$$a : b = 0{,}5171 : 1, \text{ und } \cos C = 68^0\ 40',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}703\,a$, oder $h = \frac{7}{10}$.

Im **Titanite** ist nach den Messungen von *Gustav Rose*:

$$a : b = 1{,}537 : 1, \text{ und } C = 85^0\ 6',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}05557\,a$, oder $h = \frac{1}{18}$.

Im **Amphibole** ist nach den Messungen von *Phillips*:

$$a : b = 0{,}5401 : 1, \text{ und } C = 75^0\ 10',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}474\,a$, oder $h = \frac{9}{19}$.

Im **Klinochlor** ist nach den Messungen *v. Kokscharow's*, wenn wir die von ihm **) mit o bezeichneten Flächen $= \infty P$, und die mit M bezeichnetenFlächen $= P$ setzen,

$$a : b = 1{,}354 : 1, \text{ und } C = 76^0\ 4',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}1779\,a$, oder $h = \frac{8}{45}$.

Im **Freieslebenite** ist nach den Messungen von *Miller*:

$$a : b = 1{,}580 : 1, \text{ und } C = 87^0\ 46',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}02467\,a$, oder $h = \frac{1}{40}$.

Im **monoklinoëdrischen Schwefel** ist nach *Mitscherlich's* Messungen:

$$a : b = 0{,}9923 : 1, \text{ und } C = 84^0\ 14',$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}1012\,a$, oder $h = \frac{1}{10}$.

Diese Beispiele, in welchen meistentheils der angegebene Werth von h den Beobachtungen sehr genau entspricht, dürften wohl hinreichen, um die Realität monoklinoëdrischer Axensysteme darzuthun. Für den **Pyroxen** und für gewisse Varietäten (vielleicht eine besondere Species) des **Orthoklases** muss das einfache Gesetz $h = \frac{1}{2}$ Giltigkeit haben, wie die Zwillingskrystalle des Fassaites und jene des Feldspathes von Elba beweisen. Uebrigens würde

---

*) Elementary Introduction to Mineralogy, 1852, p. 452.

**) Materialien zur Mineralogie Russlands, B. II, S. 1, Taf. XXIV.

uns in dem Gesetze $b\cos C = ha$ auch eine Art von Controle für die Richtigkeit der Messungen, so wie ein Kriterium für die zweckmässige Wahl der Grundform geboten sein.

Drittes Capitel.

Transformation der Axen.

§. 205. Transformation des Axensystems durch Einführung einer neuen Hauptaxe und Klinodiagonale.

Die Orthodiagonale einer jeden monoklinoëdrischen Krystallreihe ist eine so absolut bestimmte Linie, dass sie bei allen Transformationen des Axensystems beizubehalten ist; dasselbe gilt aber auch von dem klinodiagonalen Hauptschnitte, welcher eben so die einzige absolut bestimmte Ebene der Krystallreihe darstellt. Wenn also die Lage dieser beiden Elemente eine unveränderliche ist, so werden sich auch alle Transformationen des Axensystems, sofern sie in einer Aenderung der Lage der Axen bestehen, nur noch auf die Hauptaxe und Klinodiagonale beziehen können, in welcher Hinsicht der Willkür allerdings ein grosser Spielraum gelassen ist. Denn in der That lassen sich statt der gegebenen Hauptaxe und Klinodiagonale die klinodiagonalen Kanten je zweier Formen derselben Krystallreihe als neue Hauptaxe und neue Klinodiagonale einführen. Dabei kann auch die Orthodiagonale, zwar nicht ihrer Lage, wohl aber ihrer Grösse nach als veränderlich gedacht werden, indem man nämlich statt des anfänglich in ihr gegebenen Grundparameters c irgend ein Multiplum desselben sc als neues Grundelement des Axensystems einführt. Doch wollen wir nur die Transformation des Axensystems bei unverändertem Werthe der Orthodiagonale in Betrachtung ziehen.

Es sei uns also ein monoklinoëdrisches Axensystem durch seine Grundelemente C und a : b : c, so wie in demselben irgend eine Fläche F durch ihre Parameter $a : b : c$ gegeben, wobei wir wie immer, die Buchstaben a, b und c auf die Axen der x, y und z beziehen.

Da der klinodiagonale Hauptschnitt (und mit ihm die Orthodiagonale) beibehalten werden muss, so sind auch nur statt der beiden anderen Hauptschnitte zwei neue Coordinat-Ebenen einzuführen, welche nothwendig die Parallelflächen irgend zweier Hemidomen sein müssen, und sich daher allgemein mit $m'P\infty$ und $m''P\infty$ bezeichnen lassen. Hieraus folgt denn, dass die Orthodiagonale gänzlich ausser dem Spiele bleibt, dass sich die Transformation lediglich auf die beiden Parameter a und b sowie auf den Winkel C beschränken wird, und dass wir also unsere ganze Betrachtung innerhalb des klinodiagonalen Hauptschnittes durchführen könnten. Der Gleichförmigkeit wegen ziehen wir es jedoch vor, sie nach Anleitung von §. 44 zu geben.

Die drei Flächen F', F'' und F''', welche dort als die neuen Coordinat-Ebenen eingeführt wurden, sind also in gegenwärtigem Falle:

die Fläche F', der gegebene klinodiagonale Hauptschnitt,

die Fläche F'', das Hemidoma m'P∞, als neuer orthodiagonaler Hauptschnitt, und

die Fläche F''', das Hemidoma m''P∞, als neuer basischer Hauptschnitt.

Die Gleichungen der neuen Axen L, L' und L'' sind daher:

für L, als neue Hauptaxe, $\frac{x}{m'\mathrm{a}}+\frac{y}{\mathrm{b}}=0$, und $z=0$,

für L', als neue Klinodiagonale, $\frac{x}{m''\mathrm{a}}+\frac{y}{\mathrm{b}}=0$, und $z=0$,

für L'', als die Orthodiagonale, $x=0$, und $z=0$;

woraus sich denn für die S. 58 stehenden Grössen M, N, R, M' u. s. w. folgende Werthe ergeben:

$$M = m'\mathrm{a},\quad N = -\mathrm{b},\quad R = 0,$$
$$M' = m''\mathrm{a},\quad N' = -\mathrm{b},\quad R' = 0,$$
$$M'' = 0,\quad N'' = 0,\quad R'' = 0.$$

Legen wir nun die, S. 59 unten, für ein triklinoëdrisches Axensystem giltigen Werthe von a_1, b_1 und c_1 zu Grunde, so haben wir in selbigen $\cos\alpha=0$ und $\cos\beta=0$ zu setzen, und erhalten daher, unter Benutzung der vorstehenden Werthe von M, N, u. s. w.

$$a_1=\frac{ab\sqrt{m'^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-2m'\mathrm{ab}\cos C}}{m'\mathrm{a}b-a\mathrm{b}}=\frac{ab\mathrm{a}'}{m'\mathrm{a}b-a\mathrm{b}}$$

$$b_1=\frac{ab\sqrt{m''^2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-2m''\mathrm{ab}\cos C}}{m''\mathrm{a}b-a\mathrm{b}}=\frac{ab\mathrm{b}'}{m''\mathrm{a}b-a\mathrm{b}}$$

$$c_1=c.$$

Da jedoch die Fläche F derselben Krystallreihe angehört, so werden ihre Parameter a, b und c durch ma, rb und sc auszudrücken sein, weshalb denn

$$a_1=\frac{mr\mathrm{a}'}{m'r-m}=p\mathrm{a}',$$

$$b_1=\frac{mr\mathrm{b}'}{m''r-m}=q\mathrm{b}',$$

$$c_1=s\mathrm{c}$$

geschrieben werden kann. Die beiden neuen Grundparameter a′ und b′ sind offenbar die, durch die Elemente des ursprünglichen Axensystems ausgedrückten klinodiagonalen Intersectionen derjenigen beiden Hemidomen m'P∞ und m''P∞, welche als die neuen Coordinat-Ebenen eingeführt worden sind.

Der schiefe Winkel C' des neuen Axensystems bestimmt sich aus den obigen Gleichungen der, die Axen a′ und b′ repräsentirenden Linien L und L', nach der S. 12 stehenden Formel für tang$W$, wie folgt:

$$\tang C'=\frac{(m'-m'')\mathrm{ab}\sin C}{m'm''\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-(m'+m'')\mathrm{ab}\cos C}.$$

Dieser Ausdruck gilt zunächst, wenn beide Hemidomen positive sind; ist das

eine, z. B. m''P∞, ein negatives, so hat man m'' mit negativem Werthe einzuführen.

Um nun aber aus denen für a_1, b_1 und c_1 gefundenen Werthen das, dem neuen Axensysteme entsprechende krystallographische Zeichen der Fläche F zu finden, dazu haben wir jedenfalls noch die beiden Grössen q und s zu vergleichen, von welchen ja immer die kleinere mit dem Werthe 1 zu nehmen ist. Je nachdem also $q >$ oder $< s$ ist, je nachdem ist das gefundene Verhältniss $pa' : qb' : sc$ entweder durch s oder durch q zu dividiren, wodurch endlich die gesuchten Ableitungszahlen erhalten werden.

Auch in dem neuen Axensysteme werden natürlich die Bedingungen $b'\cos C'' = h'a'$, und $a'\cos C' = g'b'$ gelten müssen, wobei h' und g' rationale Brüche bedeuten, weil die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten ganz unabhängig von der Wahl des Axensystems ist. Die Nothwendigkeit dieser Folgerung lässt sich leicht darthun. Es ist nämlich

$$a' = \sqrt{m'^2a^2 + b^2 - 2m'ab\cos C}$$

$$b' = \sqrt{m''^2a^2 + b^2 - 2m''ab\cos C}$$

$$\cos C' = \frac{m'm''a^2 + b^2 - (m' + m'')ab\cos C}{a'b'}$$

woraus sich denn ergiebt, dass

$$h' = \frac{b'\cos C'}{a'} = \frac{m'm''a^2 + b^2 - (m' + m'')ab\cos C}{m'a^2 + b^2 - 2m'ab\cos C}$$

$$g' = \frac{a'\cos C'}{b'} = \frac{m'm''a^2 + b^2 - (m' + m'')ab\cos C}{m''^2a^2 + b^2 - 2m''ab\cos C}$$

ist, welche beide Werthe in allen Fällen rational sein werden, wenn $b\cos C = ha$ mit rationalem h ist. Hieraus folgt denn, dass, wenn die Bedingung $b\cos C = ha$ für irgend ein Axensystem gilt, dann auch die analoge Bedingung für jedes andere Axensystem erfüllt ist, welches statt des ersteren eingeführt wird.

§. 206. Vertauschung der Hauptaxe mit der Klinodiagonale.

Bisweilen findet man sich wohl veranlasst, bei unveränderter Grundform, und mit Beibehaltung der Lage der Hauptaxe und der Klinodiagonale, nur die Bedeutung dieser beiden Axen zu vertauschen, also die Klinodiagonale zur Hauptaxe zu machen, und umgekehrt. In diesem Falle hat man es nicht sowohl mit einer Transformation des Axensystems, als nur mit einer Umstellung desselben, oder mit einer Veränderung des Namens zweier seiner Axen zu thun.

Dadurch verwandeln sich die Prismen in Klinodomen, die Klinodomen in Prismen, das Orthopinakoid wird zur Basis, und alle Pyramiden und Hemidomen erfordern gleichfalls ein neues Zeichensystem. Die Auffindung dieses Zeichensystems erfolgt nach ähnlichen Regeln, wie bei der in §. 179 erläuterten Umstellung einer rhombischen Krystallreihe, wenn deren Makrodiagonale zur Hauptaxe erhoben werden soll; denn die Umwandlung der krystal-

lographischen Zeichen ist in der Hauptsache ganz unabhängig davon, ob die Axen rechtwinkelig oder schiefwinkelig sind; nur haben wir jetzt statt der Makrodiagonale die Klinodiagonale zu berücksichtigen, und daher das Grössenverhältniss der beiden neuen Nebenaxen ausser Acht zu lassen.

Es sei uns also eine Fläche F durch die Parameter ma, rb und sc gegeben, indem wir es absichtlich unbestimmt lassen, ob r oder ob s mit dem Werthe n gegeben ist. Sollen nun die Hauptaxe und die Klinodiagonale ihre Rollen vertauschen, so wird in dem umgestellten Axensysteme $b = a'$, und $a = b'$ zu setzen, und dasselbe Parameter-Verhältniss $ra' : mb' : sc$ zu schreiben sein.

Das krystallographische Zeichen aber, welches der Fläche F in dem umgestellten Axensysteme zukommt, bestimmt sich wesentlich durch das Verhältniss der beiden Grössen m und s, von denen die kleinere immer auf den Werth 1 gebracht werden muss. Ist also $m > s$, so wird das ganze Verhältniss $ra' : mb' : sc$ durch s zu dividiren sein, und so muss die Fläche F

der klinodiagonalen Form $\frac{r}{s}\text{P}\frac{m}{s}$

angehören. Ist dagegen $m < s$, so hat man dasselbe Verhältniss durch m zu dividiren, und so bestimmt sich die Fläche F als eine Fläche

der orthodiagonalen Form $\frac{r}{m}\text{P}\frac{s}{m}$.

Aus diesen allgemeinen Resultaten lassen sich nun leicht folgende besondere Regeln ableiten.

1. In jeder Protopyramide $\pm m\text{P}$ ist $r = s = 1$; folglich wird solche nach der Umstellung des Axensystems

   entweder $\pm\text{P}m$, wenn $m > 1$,

   oder auch $\pm\frac{1}{m}\text{P}\frac{1}{m}$, wenn $m < 1$;

   die Grundform $\pm\text{P}$ bleibt daher unverändert, und das Protoprisma ∞P wird zu dem Klinodoma $\text{P}\infty$.

2. In jeder Orthopyramide $\pm m\text{P}n$ ist $r = 1$, und $s = n$; folglich wird solche nach der Umstellung des Axensystems

   entweder $\pm\frac{1}{n}\text{P}\frac{m}{n}$, wenn $m > n$,

   oder auch $\pm\frac{1}{m}\text{P}\frac{n}{m}$, wenn $m < n$;

   jedes Orthoprisma $\infty\text{P}n$ wird daher als das Klinodoma $\frac{1}{n}\text{P}\infty$, und jedes Hemidoma $\pm m\text{P}\infty$ als das Hemidoma $\pm\frac{1}{m}\text{P}\infty$ zu bezeichnen sein.

3. In jeder Klinopyramide $\pm m\text{P}n$ ist $r = n$, und $s = 1$; folglich wird solche nach der Umstellung des Axensystems

entweder $\pm n\text{P}m$, wenn $m > 1$,

oder auch $\pm\frac{n}{m}\text{P}\frac{1}{m}$, wenn $m < 1$;

jedes Klinoprisma $\infty\text{P}n$ wird daher als das Klinodoma $n\text{P}\infty$, und jedes Klinodoma $m\text{P}\infty$ entweder als $\infty\text{P}m$, oder auch als $\infty\text{P}\frac{1}{m}$ zu bezeichnen sein, je nachdem $m >$ oder < 1 ist.

Dass endlich bei dieser Umstellung des Axensystems die, für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse erforderliche Bedingung durch die Gleichung $a\cos C = gb$ auszudrücken ist, diess bedarf kaum erwähnt zu werden.

§. 207. Einführung eines rechtwinkeligen Axensystems mit Beibehaltung der Hauptaxe.

Da von mehren Krystallographen die Ansicht geltend gemacht wird, dass jede monoklinoëdrische Krystallreihe als eine meroëdrisch ausgebildete rhombische Krystallreihe zu betrachten, und folglich auf drei rechtwinkelige Axen zu beziehen sei, so ist es wohl der Mühe werth, die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen das einzuführende orthoëdrische Axensystem stehen wird.

Zuvörderst ist einleuchtend, dass auch bei dieser Transformation des Axensystems die Orthodiagonale und der klinodiagonale Hauptschnitt unverändert beizubehalten sind, und dass sich die ganze Aufgabe darauf beschränken wird, irgend zwei klinodiagonale Intersectionen aufzufinden, welche auf einander rechtwinkelig und daher geeignet sind, zugleich mit der Orthodiagonale ein orthoëdrisches Axensystem zu liefern.

Die einfachste Methode, eine monoklinoëdrische Krystallreihe auf ein rechtwinkeliges Axensystem zu beziehen, würde nun offenbar darin bestehen, dass man, bei unveränderter Hauptaxe, statt der Klinodiagonale diejenige, in der Ebene des klinodiagonalen Hauptschnitts enthaltene Linie, welche auf der Hauptaxe normal ist, als neue Nebenaxe einführte. Zu dieser Methode ist uns der Weg in den Betrachtungen des §. 203 bereits angebahnt worden; wenn nämlich die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten fordert, dass die Grösse $b\cos C$ ein rationales Submultiplum von a nach irgend einer Zahl h ist, so folgt daraus, dass die Flächen des Hemidomas $h\text{P}\infty$ in jeder monoklinoëdrischen Krystallreihe horizontal liegen müssen, dass wir also nur die Centroparallelfläche desselben als Basis einzuführen brauchen, um dieselbe Krystallreihe orthoëdrisch zu machen. Während also der klinodiagonale und der orthodiagonale Hauptschnitt unverändert bleiben, so vertauschen wir die geneigte Basis mit der horizontalen Basis, welche uns durch $h\text{P}\infty$ gegeben ist.

Für die drei Linien L, L' und L'', welche unter dieser Voraussetzung die Hauptaxe, die (neue) erste Nebenaxe, und die zweite Nebenaxe darstel-

len, gelten also in dem gegebenen (schiefwinkeligen) Axensysteme folgende Gleichungen *).

$$\text{für } L, \quad y=0, \text{ und } z=0,$$
$$\text{für } L', \quad \frac{x}{h\mathrm{a}}+\frac{y}{\mathrm{b}}=0, \text{ und } z=0,$$
$$\text{für } L'', \quad x=0, \text{ und } y=0;$$

aus welchen Gleichungen sich denn für die S. 58 stehenden Grössen M, N, R, M' u. s. w. folgende Werthe ergeben:

$$\begin{array}{lll} M = M, & N = 0, & R = 0, \\ M' = -h\mathrm{a}, & N' = \mathrm{b}, & R' = 0, \\ M'' = 0, & N'' = 0, & R'' = R''. \end{array}$$

Ist uns nun in dem schiefwinkeligen Axensysteme irgend eine Fläche F durch das Parameter-Verhältniss $a : b : c$ gegeben, so werden wir die ihr in dem rechtwinkeligen Axensysteme zukommenden Parameter a_1, b_1 und c_1 aus denen, S. 59 unten, für das triklinoëdrische Axensystem mitgetheilten Ausdrücken ableiten können, indem wir in selbigen $\alpha=\beta=90^0$, und für M, N, R, M' u. s. w. ihre vorstehenden Werthe einsetzen; wir erhalten so, nach abermaliger Substitution von ha für b$\cos C$,

$$a_1 = a,$$
$$b_1 = \frac{ab\sqrt{\mathrm{b}^2-h^2\mathrm{a}^2}}{a\mathrm{b}\mp bh\mathrm{a}},$$
$$c_1 = c;$$

wobei in dem Nenner des Werthes von b_1 das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Fläche F einer positiven oder einer negativen Form angehört. Da nun aber die Fläche F als eine abgeleitete Fläche auf die Grundparameter a, b und c zu beziehen, und demnach ihr Parameter-Verhältniss $a : b : c$ durch ma : rb : sc auszudrücken ist, so werden diese Werthe auch folgendermaassen zu schreiben sein:

$$a_1 = m\mathrm{a},$$
$$b_1 = \frac{mr\sqrt{\mathrm{b}^2-h^2\mathrm{a}^2}}{m\mp rh} = p\mathrm{b}',$$
$$c_1 = s\mathrm{c}.$$

Die Grösse $\sqrt{\mathrm{b}^2-h^2\mathrm{a}^2}$ oder b′ ist der in der neuen Axe liegende Grundparameter, und offenbar $=\mathrm{b}\sin C$. Je nachdem nun b′ > oder < c ist, demgemäss wird, bei der Uebersetzung der krystallographischen Zeichen in die Symbolik des rhombischen Systems, entweder b′ oder c als die Makrodiagonale einzuführen sein; weshalb sich denn die weitere Betrachtung nach zwei Richtungen spaltet, bei deren Verfolgung noch das Verhältniss der Grössen p und s zu berücksichtigen ist.

---

*) Wir wählen absichtlich diesen Gang, um die Allgemeingiltigkeit der in §. 44 angegebenen Methode zu bewähren; denn allerdings kann man auch auf anderem Wege zum Ziele gelangen, weil die ganze Betrachtung innerhalb der Ebene des klinodiagonalen Hauptschnittes sich bewegt.

I. Wenn b′ > c ist, so wird also b′ die Makrodiagonale und c die Brachydiagonale, und so gehört die Fläche F

der Form $\frac{m}{s}\bar{\mathrm{P}}\frac{mr}{s(m\mp rh)}$, wenn $p > s$, dagegen

der Form $\frac{m\mp rh}{r}\breve{\mathrm{P}}\frac{s(m\mp rh)}{mr}$, wenn $p < s$.

II. Wenn b′ < c ist, so wird c die Makrodiagonale, und b′ die Brachydiagonale, und so gehört die Fläche F

der Form $\frac{m}{s}\breve{\mathrm{P}}\frac{mr}{s(m\mp rh)}$, wenn $p > s$, dagegen

der Form $\frac{m\mp rh}{r}\bar{\mathrm{P}}\frac{s(m\mp rh)}{mr}$, wenn $p < s$.

Diese allgemeinen Resultate sind noch in jedem gegebenen Falle für die Protopyramiden $\pm m$P, für die Orthopyramiden $\pm m$Pn, und für die Klinopyramiden $\pm m$Pn besonders einzurichten, um die neuen krystallographischen Zeichen aller dieser Formen mit Leichtigkeit aus ihren ursprünglichen Zeichen ablesen zu können.

Man ersieht schon aus dieser allgemeinen Lösung des Problems, dass die Ableitungszahlen jeder, auf ein rechtwinkeliges Axensystem bezogenen monoklinoëdrischen Krystallreihe weniger einfach ausfallen werden, als diejenigen, welche ihren Formen in dem schiefwinkeligen Axensysteme zukommen. Die Einfachheit der krystallographischen Bezeichnung geht also mehr oder weniger verloren, sobald wir die monoklinoëdrischen Krystallreihen als hemiëdrische rhombische Krystallreihen darstellen wollen; mit Ausnahme der seltenen Fälle, da sich für h ein sehr einfacher Zahlwerth, wie z. B. $\frac{1}{2}$, bestimmt.

Anm. Ein Beispiel wird zur Erläuterung der Sache genügen. Nach *G. Rose* kommen am Titanite besonders häufig die folgenden Formen vor:
aus der Grundreihe: 0P, $\frac{1}{3}$P und ∞P;
von Hemidomen: $\frac{5}{9}$P∞, P∞, −P∞ und $\frac{14}{9}$P∞;
von Klinodomen: $\frac{1}{3}$P∞, P∞ und ∞P∞;
von Klinopyramiden: $\frac{2}{3}$P2, −2P2, 4P4, und das Prisma ∞P3.
Diese Zeichen beziehen sich auf ein monoklinoëdrisches Axensystem, in welchem $C = 85^0\ 6'$ und a : b : c = 1,537 : 1 : 2,342, woraus denn folgt, dass $h = \frac{1}{18}$ ist. Da nun in diesem Falle $\sqrt{b^2 - h^2a^2}$ oder b′ < c ist, so haben wir uns an die oben sub II stehenden Resultate zu halten.

Aus diesen folgt aber für die Protopyramiden $\pm m$P das Zeichen

$$m\breve{\mathrm{P}}\frac{m}{m-h},\ \text{oder}\ (m+h)\bar{\mathrm{P}}\frac{m+h}{m},$$

je nachdem die positive oder die negative Hemipyramide gemeint ist; folglich wird 0P, oder P*) = $\frac{1}{18}\bar{\mathrm{P}}$∞, ($a$: ∞b : c) nach *Rose*,

*) Wir fügen zur leichteren Orientirung die Signaturbuchstaben und die Parameter-Verhältnisse der Flächen bei, wie solche von *Rose* in seiner bekannten Abhandlung gewählt worden sind.

$\frac{1}{4}P$, oder $u = \frac{1}{4}\breve{P}\frac{8}{5}$, $(a : \frac{1}{6}b : \frac{1}{5}c)$ nach *Rose*
∞P, oder $l = \infty P$, $(\infty a : b : c)$

Für die Hemidomen $\pm m P\infty$ folgt aus den sub II stehenden Resultaten, weil $r = 1$, und $s = \infty$, folglich $p < s$ ist, das allgemeine Zeichen

$$(m \mp h)\bar{P}\infty;$$

folglich wird:

$\frac{3}{5}P\infty$, oder $x = \frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $(9a : \infty b : c)$ nach *Rose*,
$P\infty$, oder $y = \frac{17}{18}\bar{P}\infty$, $(17a : \infty b : c)$,
$-P\infty$, oder $v = \frac{19}{18}\bar{P}\infty$, $(19a : \infty b : c)$,
$\frac{14}{9}P\infty$, oder $z = \frac{3}{2}\bar{P}\infty$, $(27a : \infty b : c)$.

Für die Klinopyramiden $\pm m P n$ wird $r = n$, $s = 1$, also $p = \frac{mn}{m \mp nh}$, daher für die positiven Hemipyramiden jedenfalls $p > s$, und

$$m\breve{P}\frac{mn}{m-nh}$$

das gesuchte Zeichen. Für die negativen Hemipyramiden dagegen kann p sowohl $>$ als $< s$ sein, weshalb denn für sie

entweder $m\breve{P}\frac{mn}{m+nh}$

oder auch $\frac{m+nh}{n}\bar{P}\frac{m+nh}{mn}$

das gesuchte Zeichen ist, je nachdem $mn >$ oder $< m+nh$ ist; folglich wird

$\frac{2}{3}P2$, oder $n = \frac{2}{3}\breve{P}\frac{12}{5}$, $(a : \frac{1}{12}b : \frac{1}{3}c)$ nach *Rose*,
$4P4$, oder $s = 4\breve{P}\frac{72}{17}$, $(a : \frac{1}{72}b : \frac{1}{17}c)$
$-2P2$, oder $t = 2\breve{P}\frac{38}{19}$, $(a : \frac{1}{38}b : \frac{1}{19}c)$
$\infty P3$, oder $M = \infty\breve{P}3$, $(\infty a : b : 3c)$.

Endlich folgt für die Klinodomen $m P\infty$ das allgemeine Zeichen $m\breve{P}\frac{m}{h}$; folglich wird

$\frac{1}{3}P\infty$, oder $o = \frac{1}{3}\breve{P}6$, $(a : \frac{1}{6}b : c)$ nach *Rose*,
$P\infty$, oder $r = \breve{P}18$, $(a : \frac{1}{18}b : c)$
$\infty P\infty$, oder $q = \infty\breve{P}\infty$, $(\infty a : b : \infty c)$.

Man erkennt leicht, dass die hier gefundenen Zeichen mit jenen wesentlich übereinstimmen, welche *G. Rose* in seiner Abhandlung, unter Voraussetzung eines rechtwinkeligen Axensystems, aufgestellt hat; denn wir brauchen nur $\frac{1}{18}a$ als den Grundwerth der Hauptaxe einzuführen, um genau auf die von ihm angegebenen Parameter-Verhältnisse zu gelangen.

§. 208. Allgemeine Zurückführung auf ein rechtwinkeliges Axensystem.

Da nach §. 205 die klinodiagonalen Intersectionen je zweier verschiedener Formen als die beiden schiefwinkeligen Axen eingeführt werden können, so würde die Zurückführung einer monoklinoëdrischen Krystallreihe auf ein rechtwinkeliges Axensystem auch in dem Falle möglich sein, wenn irgend zwei verschiedene klinodiagonale Intersectionen derselben auf einan-

der rechtwinkelig wären. Um die Ableitungszahlen derjenigen beiden Intersectionen zu finden, welche dieser Bedingung Genüge leisten, haben wir den allgemeinen Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels zweier solcher Intersectionen $=\infty$ zu setzen, und die Folgerungen aufzusuchen, welche sich daraus für das Verhältniss dieser Ableitungszahlen ergeben.

Es ist aber nach §. 205 die Tangente des Neigungswinkels zweier Hemidomen $mP\infty$ und $m'P\infty$ durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\tang C' = \frac{(m-m')\mathrm{ab}\sin C}{mm'\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-(m+m')\mathrm{ab}\cos C}$$

welcher zunächst für zwei positive Hemidomen gilt, und in dem Falle, dass das eine derselben, z. B. $m'P\infty$, ein negatives ist, einen negativen Werth von m' erfordert.

Soll nun C ein rechter Winkel, oder $\tang C=\infty$ sein, so muss der Nenner dieses Ausdruckes $=0$ werden; setzt man also $\mathrm{b}\cos C=h\mathrm{a}$, so wird

$$mm'\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-(m+m')h\mathrm{a}^2=0$$

die Bedingungsgleichung für zwei auf einander rechtwinkelige Hemidomen, aus welcher denn folgt:

$$m'=\frac{mh\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{(m-h)\mathrm{a}^2}.$$

Vermuthet man also, dass irgend zwei Hemidomen auf einander rechtwinkelig sein können, so hat man zu prüfen, ob ihre Ableitungszahlen der vorstehenden Bedingungsgleichung Genüge leisten; und will man für irgend ein Hemidoma $mP\infty$ dasjenige bestimmen, dessen Flächen auf den seinigen rechtwinkelig sind, so wird man den vorstehenden Bedingungswerth von m' zu benutzen haben.

Natürlich wird man immer danach streben müssen, für m' einen möglichst einfachen numerischen Werth zu erhalten; daher sind die verschiedenen, in der Krystallreihe bekannten Hemidomen $mP\infty$ darauf zu prüfen, welches derselben den einfachsten und somit den wahrscheinlichsten Werth von m' liefert. Ist man zu einem befriedigenden Resultate gelangt, so wird dann die Krystallreihe nach Anleitung von §. 205 auf das neue Axensystem zurückzuführen sein, welches ein rechtwinkeliges oder orthoëdrisches ist. Man wird jedoch selten auf sehr ansprechende Resultate gelangen; blose Annäherungen zu einem rechten Winkel aber, welche sich wohl öfter darbieten, gewähren natürlich gar keine Lösung der Aufgabe, weil der Winkel C' dann immer noch ein schiefer, und folglich die Krystallreihe eine monoklinoëdrische bleibt.

Viertes Capitel.

Zwillingskrystalle des monoklinoëdrischen Systems.

§. 209. Allgemeine Grundlage zur Theorie derselben.

Die Zwillingskrystalle des monoklinoëdrischen Systems sind gewöhnlich nach sehr einfachen Gesetzen gebildet, und es ist wohl beachtenswerth, dass

jenes im rhombischen Systeme so häufige Gesetz, welches eine Fläche des Protoprismas ∞P als Zwillingsfläche erfordert, nur äusserst selten zur Verwirklichung gelangt, was doch kaum zu erwarten sein dürfte, wenn das monoklinoëdrische System wirklich nichts anderes wäre, als eine meroëdrische Ausbildungsform des rhombischen Systems.

Die beiden Gesetze, denen wir am häufigsten begegnen, sind nämlich die folgenden:

1. Zwillingsaxe die Hauptaxe, oder auch die Normale des Orthopinakoides, und
2. Zwillingsaxe die Normale der Basis.

Um jedoch eine allgemeine Grundlage für die Beurtheilung aller Zwillingskrystalle zu gewinnen, dazu müssen wir von der in §. 50 gegebenen Transposition der Axen eines triklinoëdrischen Axensystems ausgehen.

Es sei uns also die Zwillingsfläche durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben, so bestimmen sich in einem monoklinoëdrischen Axensysteme die in den Gleichungen der Zwillingsaxe erscheinenden Parameter p, q und s, wie folgt:

$$p=c(b-a\cos C),$$
$$q=c(a-b\cos C),$$
$$s=ab\sin^2 C;$$

die in den Gleichungen der transponirten Axen auftretenden Grössen μ, ν und ϱ (S. 72) erhalten daher die nachstehenden Werthe:

$$\mu=\frac{(b^2-a^2)c^2-a^2b^2\sin^2 C}{2bc}$$
$$\nu=\frac{(a^2-b^2)c^2-a^2b^2\sin^2 C}{2ca}$$
$$\varrho=\frac{a^2b^2\sin^2 C-c^2(a^2+b^2-2ab\cos C)}{2ab}$$

Diess sind also diejenigen Werthe, welche in den Gleichungen der transponirten Axen des Individuums II (S. 70), nämlich in den Gleichungen

für die Axe der x', $\frac{x}{\mu}-\frac{y}{q}=0$, und $\frac{y}{q}-\frac{z}{s}=0$,

für die Axe der y', $\frac{x}{p}-\frac{y}{\nu}=0$, und $\frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0$,

für die Axe der z', $\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0$, und $\frac{z}{\varrho}-\frac{x}{p}=0$,

einzusetzen wären, um die Theorie der monoklinoëdrischen Zwillingskrystalle in derselben Allgemeinheit zu entwickeln, wie solches in §. 49 für die Zwillingskrystalle der orthoëdrischen Krystallsysteme geschehen ist. Wir können jedoch auf diese allgemeine Entwickelung verzichten, weil uns in der Natur selbst meist nur sehr einfache Gesetze geboten werden, bei deren Betrachtung die vorstehenden allgemeinen Werthe von p, q, r, μ, ν und ϱ eine

sehr bedeutende Vereinfachung erfahren. Wir legen sie aber bei dieser Betrachtung zu Grunde, um ihre allgemeine Giltigkeit und Brauchbarkeit darzuthun, obgleich dieselben Resultate auch auf andere Weise leicht abgeleitet werden können. *)

§. 210. Zwillingsfläche das Orthopinakoid.

Das Gesetz: Zwillingsaxe die Hauptaxe, lässt sich in den meisten Fällen auch so aussprechen: Zwillingsfläche das Orthopinakoid, indem die Normale dieser Fläche eine mit der Hauptaxe aequivalente Zwillingsaxe ist. **) Lassen wir also den letzteren Ausdruck gelten, so ist in der Gleichung der Zwillingsfläche $a = c = \infty$, oder auch $b = 0$ zu setzen. Nach Einführung dieser Werthe erhalten wir denn für die transponirten Axen des Individuums II folgende Gleichungen:

für die Axe der x', $y = 0$, und $z = 0$,

für die Axe der y', $\frac{x}{2\cos C} + y = 0$, und $z = 0$,

für die Axe der z', $x = 0$, und $y = 0$,

welche sehr einfache Gleichungen zuvörderst lehren, dass die Axen der x' und z' mit den gleichnamigen Axen des Individuums I identisch werden, übrigens auch zu einer sehr leichten Transposition jeder beliebigen Fläche F des Individuums II auf das Individuum I gelangen lassen. Ist nämlich die Gleichung dieser Fläche

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} + \frac{z'}{c} = 1,$$

so bestimmen sich nach §. 49 ihre neuen Parameter in den Axen der x, y und z wie folgt:

$$a_1 = a,$$

$$b_1 = \mp \frac{ab}{a \mp 2b\cos C},$$

$$c_1 = c,$$

wobei in dem Werthe von b_1 die oberen Vorzeichen für positive, die unteren für negative Partialformen gelten.

Nun ist aber allgemein das Verhältniss $a : b : c = m\mathrm{a} : r\mathrm{b} : s\mathrm{c}$, wenn a, b und c die Grundparameter der betreffenden Krystallreihe sind; folglich lassen sich die vorstehenden Werthe auch so schreiben:

---

*) Wie solches z. B. in meinem Lehrbuche der Krystallographie, II, S. 325 ff. geschehen ist, aber noch weit einfacher geschehen kann, wenn man bedenkt, dass sich für die beiden oben angegebenen Gesetze die ganze Betrachtung lediglich auf die, in dem klinodiagonalen Hauptschnitte liegenden Axen bezieht, und daher in der Ebene dieses Hauptschnitts erledigen lässt.

**) Ueber aequivalente Zwillingsaxen siehe mein Lehrbuch der Krystallographie, II, S. 204 ff.

$$a_1 = m\mathrm{a},$$
$$b_1 = \mp \frac{mr\mathrm{ab}}{m\mathrm{a} \mp 2r\mathrm{b}\cos C} = \mp p\mathrm{b},$$
$$c_1 = s\mathrm{c}.$$

Soll nun die transponirte Fläche einer möglichen Fläche des Individuums I entsprechen, so muss der Factor von b in dem Ausdrucke für b_1, oder die Grösse

$$\frac{mr\mathrm{a}}{m\mathrm{a} \mp 2r\mathrm{b}\cos C}$$

eine rationale Zahl sein, was der Fall sein wird, wenn das Product $\mathrm{b}\cos C$ ein rationales Submultiplum von a, oder wenn $\mathrm{b}\cos C = h\mathrm{a}$ ist, wodurch

$$p = \frac{mr}{m \mp 2rh}$$

wird. Die krystallonomische Möglichkeit der Transposition aller Flächen des einen Individuums auf das andere beruht also auf derselben Bedingung, welche wir bereits in der Zonenlehre (§. 203) als die Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten kennen gelernt haben.

Ist nun aber diese Bedingung erfüllt, so kommt es ausserdem noch auf eine Vergleichung der Werthe von p und s an, um das krystallographische Zeichen der transponirten Fläche zu finden, weil ja immer der kleinere dieser beiden Factoren mit dem Werthe 1 einzuführen ist.

Wenn also $p > s$ ist, so sind alle drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit s zu dividiren; folglich wird

$$a_1 = \frac{m}{s}\mathrm{a} = m'\mathrm{a},$$
$$b_1 = \mp \frac{mr}{s(m \mp 2rh)}\mathrm{b} = \mp n'\mathrm{b},$$
$$c_1 = \mathrm{c},$$

und die transponirte Fläche gehört der klinodiagonalen Form $\pm m'\mathrm{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n' an.

Wenn dagegen $p < s$ ist, so sind die drei Grössen a_1, b_1 und c_1 mit p zu dividiren; folglich wird

$$a_1 = \frac{m \mp 2rh}{r}\mathrm{a} = m'\mathrm{a},$$
$$b_1 = \mp \mathrm{b},$$
$$c_1 = \frac{s(m \mp 2rh)}{mr}\mathrm{c} = n'\mathrm{c},$$

und die transponirte Fläche entspricht allgemein der orthodiagonalen Form $m'\mathrm{P}n'$ mit vorstehenden Werthen von m' und n'.

§. 211. Fortsetzung.

Bringen wir die in dem vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate für die verschiedenen Arten von Formen in Anwendung, so gelangen wir auf folgende Bestimmungen.

1. Für alle Protopyramiden $\pm m$P ist $r = s = 1$, also wird

$$p = \frac{m}{m \mp 2h}, \text{ und } s = 1;$$

für positive Hemipyramiden gilt daher $p > s$, für negative Hemipyramiden $p < s$, woraus sich denn ergiebt, dass jeder positiven Hemipyramide mP des einen Individuums die klinodiagonale Form

$$-m\text{P}\frac{m}{m-2h},$$

und dass jeder negativen Hemipyramide $-m$P desselben die orthodiagonale Form

$$(m+2h)\text{P}\frac{m+2h}{m}$$

des anderen Individuums entspricht.

Anm. Für $m = 2h$ verwandelt sich die erstere Form in das Klinodoma mP∞, und für $m < 2h$ wird die Hemipyramide positiv.

2. Für alle Klinopyramiden $\pm m$Pn ist $r = n$, und $s = 1$, also wird

$$p = \frac{mn}{m \mp 2nh}, \text{ und } s = 1;$$

für positive Hemipyramiden gilt daher jedenfalls $p > s$, woraus sich denn für die Hemipyramide $+m$Pn des einen Individuums folgende aequivalente Formen im anderen Individuum bestimmen:

die Hemipyramide $-m\text{P}\frac{mn}{m-2nh}$, wenn $m > 2nh$,

das Klinodoma $m\text{P}\infty$, wenn $m = 2nh$,

die Hemipyramide $+m\text{P}\frac{mn}{2nh-m}$, wenn $m < 2nh$.

Für negative Hemipyramiden dagegen wird $p >=< s$ sein, je nachdem $m >=< \frac{2nh}{n-1}$ ist, und es bestimmt sich daher für ein gegebenes $-m$Pn des einen Individuums die entsprechende Form im anderen Individuum

als $m\text{P}\frac{mn}{m+2nh}$, wenn $m(n-1) > 2nh$,

als mP , ... $= 2nh$,

als $\frac{m+2nh}{n}\text{P}\frac{m+2nh}{mn}$, ... $< 2nh$.

Hieraus ergeben sich denn auch zugleich für die Klinodomen mP∞ des einen Individuums als die aequivalenten Formen des anderen Individuums

die Hemipyramide $m\text{P}\frac{m}{2h}$ wenn $m > 2h$,

- - mP, ... $= 2h$,

- - $2h\text{P}\frac{2h}{m}$ . . . $< 2h$.

3. Für alle Orthopyramiden $\pm m\mathrm{P}n$ ist $r=1$, und $s=n$, also wird

$$p=\frac{m}{m\mp 2h}, \text{ und } s=n.$$

Für positive Hemipyramiden gilt $p=\frac{m}{m-2h}$, also wird $p >=< s$ sein, je nachdem $m <=> \frac{2nh}{n-1}$ ist. Hieraus bestimmen sich denn für jedes $+m\mathrm{P}n$ des einen Individuums folgende aequivalente Formen im anderen Individuum:

a. wenn $p > s$, oder $m < \frac{2nh}{n-1}$ ist:

die Hemipyramide $-\frac{m}{n}\mathrm{P}\frac{m}{n(m-2h)}$, so lange $m > 2h$ ist,

das Klinodoma $\frac{m}{n}\mathrm{P}\infty$, wenn $m=2h$ ist,

die Hemipyramide $\frac{m}{n}\mathrm{P}\frac{m}{n(2h-m)}$, wenn $m < 2h$ ist;

b. wenn $p=s$, oder $m=\frac{2nh}{n-1}$ ist:

die Hemipyramide $-\frac{m}{n}\mathrm{P}$;

c. wenn $p < s$, oder $m > \frac{2nh}{n-1}$ ist:

die Hemipyramide $(m-2h)\,\mathrm{P}\frac{n(m-2h)}{m}$.

Für negative Hemipyramiden gilt $p=\frac{m}{m+2h}$, also wird p stets $< s$ sein, weshalb sich denn für jedes $-m\mathrm{P}n$ des einen Individuums als aequivalente Form im andern Individuum

die Hemipyramide $(m+2h)\mathrm{P}\frac{n(m+2h)}{m}$

bestimmt.

Setzen wir in diesen Resultaten $n=\infty$, so gelangen wir auf diejenigen Formen, welche mit den Hemidomen aequivalent sind; es entspricht nämlich

jedem positiven Hemidoma $+m\mathrm{P}\infty$:

das Hemidoma $+(2h-m)\mathrm{P}\infty$, wenn $m < 2h$,

die Basis $0\mathrm{P}$, wenn $m=2h$,

das Hemidoma $-(m-2h)\mathrm{P}\infty$, wenn $m > 2h$;

und es entspricht jedem negativen Hemidoma $-m\mathrm{P}\infty$:

das Hemidoma $+(m+2h)\mathrm{P}\infty$.

Bei der so häufigen Ausbildung dieses ersten Zwillingsgesetzes glaubten wir auf diese specielle Verfolgung seiner Resultate nicht verzichten zu dürfen.

§. 212. Zwillingsfläche die Basis.

Wenn die Basis die Zwillingsfläche, oder ihre Normale die Zwillingsaxe ist, so haben wir in den Werthen der Parameter p, q, s, μ, ν und ϱ des §. 209 $b=c=\infty$, oder auch $a=0$ zu setzen, und erhalten dadurch für die transponirten Axen des Individuums II folgende Gleichungen:

für die Axe der x', $x+\frac{y}{2\cos C}=0$, und $z=0$,
für die Axe der y', $x=0$, und $z=0$,
für die Axe der z', $x=0$, und $y=0$,

aus welchen sich ergiebt, dass die Axen der y' und z' mit den gleichnamigen Axen des Individuums I identisch sind, während die Axe der x' in die Ebene (xy) fällt, und mit der Basis denselben Winkel bildet, wie die Axe der x. Ist uns nun im Individuum II irgend eine Fläche F durch ihre Gleichung

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}=1$$

gegeben, so findet sich leicht, dass ihre neuen, in dem Axensysteme des Individuums I erforderlichen Parameter die folgenden Werthe haben müssen:

$$a_1 = \frac{ab}{b\mp 2a\cos C},$$
$$b_1 = \mp b,$$
$$c_1 = c,$$

wobei in den Werthen von a_1 und b_1 das obere Vorzeichen für positive, das untere für negative Partialformen gilt.

Nun lässt sich allgemein das Verhältniss $a:b:c = m\text{a} : r\text{b} : s\text{c}$ setzen, wenn a, b und c die Grundparameter der Krystallreihe sind; folglich wird

$$a_1 = \frac{mr\text{ab}}{r\text{b}\mp 2m\text{a}\cos C} = p\text{a},$$
$$b_1 = \mp r\text{b},$$
$$c_1 = s\text{c}.$$

Soll also die transponirte Fläche einer krystallonomisch möglichen Fläche des Individuums I entsprechen, so muss in dem Ausdrucke für a_1 der Factor p eine rationale Zahl sein; welche Bedingung erfüllt ist, wenn das Product a$\cos C$ ein rationales Multiplum von b, oder wenn a$\cos C = g$b ist, woraus sich denn für a_1 der Werth

$$a_1 = \frac{mr}{r\mp 2mg}\text{a} = m'\text{a}$$

ergiebt. So finden wir uns denn abermals auf dieselbe Bedingung verwiesen, welche auch die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten beherrscht.

Zur Bestimmung des krystallographischen Zeichens der transponirten Fläche gelangen wir diessmal weit leichter, als bei dem vorher betrachteten Gesetze, weil beide Nebenaxen ihre ursprünglichen Parameter, und also auch ihre Ableitungszahlen behalten.

1. Für Protopyramiden $\pm m$P ist $r = s = 1$, folglich gilt für sie

$$a_1 = \frac{m}{1 \mp 2mg}, \quad b_1 = \mp \mathrm{b}, \quad c_1 = \mathrm{c},$$

und jeder solchen Hemipyramide des einen Individuums entspricht im anderen Individuum die Form

$$\mp \frac{m}{1 \mp 2mg} \mathrm{P}$$

wobei die oberen Vorzeichen für gegebene positive, die unteren Vorzeichen für gegebene negative Hemipyramiden gelten. Das Protoprisma ∞P entspricht also der Hemipyramide $\frac{1}{2g}$P. *)

2. Für Klinopyramiden $\pm m$Pn ist $r = n$, und $s = 1$, folglich gilt für sie

$$a_1 = \frac{mn}{n \mp 2mg}, \quad b_1 = \mp n\mathrm{b}, \quad c_1 = \mathrm{c};$$

daher wird für jede halbe Klinopyramide des einen Individuums die entsprechende Form im anderen Individuum durch das Zeichen

$$\mp \frac{mn}{n \mp 2mg} \mathrm{P}n$$

dargestellt. Hieraus folgt zugleich

für jedes Klinoprisma ∞Pn die Form $\frac{n}{2g}$Pn, und

für jedes Klinodoma mP∞ die Form mP∞, also es selbst.

3. Für Orthopyramiden $\pm m$Pn ist $r = 1$, und $s = n$, folglich gilt für sie

$$a_1 = \frac{m}{1 \mp 2mg}, \quad b_1 = \mp \mathrm{b}, \quad c_1 = n\mathrm{c};$$

daher wird für jede halbe Orthopyramide des einen Individuums die entsprechende Form im anderen Individuum durch das Zeichen

$$\mp \frac{m}{1 \mp 2mg} \mathrm{P}n$$

dargestellt. Hieraus folgt zugleich

für jedes Orthoprisma ∞Pn die Form $\frac{1}{2g}$Pn, und

für jedes Hemidoma $\pm m$P∞ die Form $\mp \frac{m}{1 \mp 2mg}$P∞.

§. 213. Zwillingsfläche eine Fläche des Klinodomas mP∞.

Es sind besonders die interessanten Zwillingskrystalle des Orthoklases, wie sie zu Baveno, bei Hirschberg, auf Elba und anderwärts vorkommen,

---

*) Für den Titanit ist sehr wahrscheinlich $g = \frac{3}{22}$, obwohl sich aus *Rose's* Messungen ein etwas abweichender Werth ergiebt.

welche uns veranlassen, noch ein drittes Gesetz der Zwillingsbildung in Betrachtung zu ziehen: das Gesetz nämlich, dass die Zwillingsfläche einer Fläche des Klinodomas $m\mathrm{P}\infty$ entspricht. Die Gleichung der Zwillingsfläche

$$\frac{x}{m\mathrm{a}} + \frac{z}{\mathrm{c}} = 1$$

giebt uns in diesem Falle die Werthe von $a = m\mathrm{a}$, $b = \infty\mathrm{b}$, und $c = \mathrm{c}$; doch ziehen wir es vor, die Rechnung mit den Buchstaben a und c zu führen, für welche zuletzt die Werthe ma und c zu substituiren sind.

Setzen wir also in den Werthen der Parameter p, q, s, μ, ν und ϱ des §. 209 $b = \infty$, so stellen sich für die transponirten Axen des Individuums II die folgenden Gleichungen heraus:

für die Axe der x', $\frac{x}{c^2 - a^2\sin^2 C} + \frac{y}{2c^2\cos C} = 0$, und $\frac{y}{c\cos C} + \frac{z}{a\sin^2 C} = 0$,

für die Axe der y', $x = 0$, und $z = 0$,

für die Axe der z', $x + \frac{y}{\cos C} = 0$, und $\frac{z}{a^2\sin^2 C - c^2} - \frac{x}{2ac} = 0$.

Ist uns nun im Individuum II irgend eine Fläche F durch ihre Gleichung

$$\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} + \frac{z'}{c'} = 1$$

gegeben, so werden wir die derselben Fläche in dem Axensysteme des Individuums I zukommenden Parameter a_1, b_1 und c_1 finden, wenn wir ein ganz ähnliches Verfahren zur Anwendung bringen, wie in §. 49, d. h. wenn wir die allgemeinen Ausdrücke für die Centrodistanzen irgend eines Punctes der Axe der x', der y' und der z' beziehendlich den Parametern a', b' und c' gleich setzen, dadurch die Coordinaten p, q, s u. s. w. der Durchschnittspuncte der Fläche F mit den Axen der x, y und z, sowie endlich aus diesen Coordinaten nach §. 18 die in diesen Axen liegenden Parameter der Fläche bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$a_1 = \frac{a'b'c'(a^2\sin^2 C + c^2)}{2c'a'c^2\cos C + b'c'(a^2\sin^2 C - c^2) - 2a'b'ca\sin^2 C}$$

$$b_1 = b'$$

$$c_1 = \frac{a'b'c'(a^2\sin^2 C + c^2)}{2ac(a'\cos C - b')c' - a'b'(a^2\sin^2 C - c^2)}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken für a und c die Werthe ma und c, so wie für a', b' und c' die Werthe m'a, r'b und s'c, so wird man aus ihnen die weiteren Bestimmungen der Flächen ableiten können.

Für die oben erwähnten Zwillingskrystalle des **Orthoklases** vereinfacht sich jedoch die ganze Betrachtung bedeutend dadurch, dass das Klinodoma $2\mathrm{P}\infty$, nach dessen Fläche sie gebildet sind, **rechtwinkelig** ist. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass $a\sin C = c$, mithin auch, dass

$$a^2\sin^2 C + c^2 = 2c^2$$

$$a^2\sin^2 C - c^2 = 0$$

ist. Setzen wir diese Werthe in die Ausdrücke von a_1, b_1 und c_1, so erhalten wir

$$a_1 = \frac{b'c'a}{ac'\cos C - b'},$$
$$b_1 = b',$$
$$c_1 = \frac{a'b'c}{a(a'\cos C - b')},$$

welche Parameter für irgend eine Fläche F von dem Verhältnisse $m\mathrm{a} : r\mathrm{b} : s\mathrm{c}$, unter Berücksichtigung dass $a = 2\mathrm{a}$, und $c = \mathrm{c}$, sowie $\mathrm{a}\cos C = g\mathrm{b}$ ist, endlich folgende Form annehmen:

$$a_1 = \frac{2rs\mathrm{a}}{2sg - r}$$
$$b_1 = r\mathrm{b}$$
$$c_1 = \frac{mr\mathrm{c}}{2(mg - r)}$$

Aus diesen Werthen wird man leicht für jede Form des einen Individuums die ihr im anderen Individuum entsprechende Form berechnen können.

Sechster Abschnitt.

Diklinoëdrisches System.

---

§. 214. Rechtfertigung der Annahme eines diklinoëdrischen Systems.

Als *Mitscherlich* vor dreissig Jahren die Formen des unterschwefeligsauren Kalkes beschrieb*), da erkannte sein Scharfblick sogleich, dass diese Formen einem ganz eigenthümlichen Gestaltungsgesetze unterworfen, und daher in ein besonderes Krystallsystem zu verweisen seien. Es ist jedoch der letzteren Folgerung vielfach die gebührende Anerkennung versagt, und die Selbständigkeit dieses Krystallsystems ignorirt oder angefochten worden. Da ich aber von der Richtigkeit jener Folgerung überzeugt war, so wurde es auch in einem besonderen Abschnitte meines Lehrbuches der Krystallographie**) zur Darstellung gebracht, und unter dem Namen des dikli-

*) *Poggendorff's* Annalen, B. VIII, 1826, S. 427.

**) Band II, S. 95—117; auch *Kupffer* hat in seinem Handbuche der rechnenden Krystallonomie S. 456—481 diesem Systeme einen besonderen Abschnitt gewidmet, die Selbständigkeit desselben anerkannt, und dafür den Namen des tritoprismatischen Systems in Vorschlag gebracht. *Rammelsberg* hat sich in seinem Handbuche der krystallographischen Chemie gleichfalls zur Annahme desselben entschlossen.

noëdrischen Systems eingeführt. Die grosse Seltenheit solcher Krystallreihen, deren Formen den Gesetzen dieses Systems unterworfen sind, mag vielleicht die Ignorirung desselben veranlasst haben; sie kann jedoch keinen zureichenden Grund zu seiner Zurückweisung liefern.

Es ist oft gesagt worden, das diklinoëdrische System sei nur eine Modalität des triklinoëdrischen Systems, keinesweges aber ein eigenthümliches siebentes Krystallsystem. Ein solcher Ausspruch liess eigentlich voraussetzen, dass dabei der Begriff von Krystallsystem, wie er von Denjenigen aufgestellt worden ist, welche das Mitscherlich'sche System adoptirt hatten, einigermaassen berücksichtigt worden wäre; diess ist aber keinesweges geschehen; ohne diese Begriffsbestimmung zu beachten, ist jenes Urtheil vom Standpuncte ganz anderer Definitionen aus gefällt worden. Wer den von mir seit längerer Zeit vorgeschlagenen, und auch in diesem Buche S. 74 aufgestellten Begriff von dem, was unter einem Krystallsysteme zu verstehen ist, einer Prüfung würdigen will, Dem wird die nothwendige Consequenz einleuchten, das von Mitscherlich entdeckte Gestaltungsgesetz als den Grundtypus eines selbständigen Krystallsystems anzuerkennen; wer aber ohne jene Prüfung das siebente Krystallsystem verläugnen will, gegen Den lässt sich freilich gar nicht streiten. *)

Indem wir also die Annahme eines diklinoëdrischen Systems, trotz der Seltenheit seiner Verwirklichung, für vollkommen gerechtfertigt halten, so hätten wir eigentlich jetzt eine Darstellung seiner Verhältnisse in ähnlicher Weise zu geben, wie diess bei den vorhergehenden Krystallsystemen geschehen ist. Indessen glauben wir uns, eben jener Seltenheit seines Vorkommens wegen, in gegenwärtigem Elementarbuche nur auf einige allgemeine Betrachtungen beschränken zu können. Wer sich weiter darüber unterrichten will, den verweisen wir auf unser Lehrbuch der Krystallographie und auf *Kupffer's* Handbuch der rechnenden Krystallonomie.

§. 215. Axensystem; Formen; Ableitung und Bezeichnung derselben.

Das diklinoëdrische Krystallsystem ist nach S. 74 der Inbegriff aller derjenigen Krystallformen, deren geometrischer Grundcharakter in drei Coordinat-Ebenen gegeben ist, von welchen sich zwei unter einem rechten Winkel schneiden, während die dritte auf beiden schiefwinkelig ist. Die Axen, als die Durchschnittslinien dieser Ebenen, scheinen unter dem Gesetze der durchgängigen Ungleichheit zu stehen. Weil aber diejenige Axe, welche die Durch-

*) Nach dem bekannten Satze: contra principia negantem disputari non potest. So lange der S. 74 aufgestellte Begriff von Krystallsystem nicht als falsch erkannt wird, so lange wird auch das von *Mitscherlich* entdeckte siebente Krystallsystem als ein solches gelten müssen. Die Gegner dieser Ansicht hätten ihre Kritik zunächst auf jenen Begriff richten, und das Fehlerhafte desselben darthun müssen, bevor sie über das Sein oder das Nichtsein eines siebenten Krystallsystems ihr Endurtheil aussprachen.

schnittslinie der beiden rechtwinkeligen Coordinat-Ebenen ist, vermöge solcher Lage einen eminenten Werth erhält, so wird sie die natürliche Hauptaxe, und daher die aufrechte Stellung des Systems nach ihr zu bestimmen sein. Die beiden anderen Axen erhalten dadurch die Bedeutung von Nebenaxen, für welche die verschiedene Grösse den besten Unterscheidungsgrund darbietet, daher wir sie, wie im rhombischen Systeme, als Makrodiagonale und Brachydiagonale unterscheiden.

Der Winkel A ist ein rechter, während die beiden Winkel B und C zweierlei verschiedene schiefe Winkel sind; die Axenwinkel α, β und γ aber sind durchgängig schief. Alle acht Raum-Octanten bilden sonach rechtwinkelige Triëder; oder ihre Intersectionen mit einer, um den Mittelpunct des Axensystems gedachten Kugelfläche bilden rechtwinkelige sphärische Dreiecke.

Construirt man um ein diklinoëdrisches Axensystem für ein gegebenes endliches Parameter-Verhältniss $a : b : c$, alle mögliche isoparametrische Flächen, so gelangt man auf eine von acht Dreiecken umschlossene Form, deren Flächen jedoch viererlei verschiedenen Werthes sind, da jede Fläche nur mit ihrer Gegenfläche übereinstimmt. Die so construirte Form ist also keine einfache, sondern eine tetramerische, aus vier Partialformen zusammengesetzte Form. Ihren allgemeinen Eigenschaften nach wird sie als eine diklinoëdrische Pyramide, und daher jede ihrer Partialformen als eine Viertelpyramide oder Tetartopyramide zu bezeichnen sein. Wie die zwei Hemipyramiden einer jeden monoklinoëdrischen, so sind auch die vier Viertelpyramiden einer jeden diklinoëdrischen Pyramide in ihrer Erscheinung völlig unabhängig von einander, weshalb wir auch nicht erwarten können, sie immer vollständig ausgebildet anzutreffen.

Nächst den Pyramiden giebt es noch in diesem Systeme drei Arten von prismatischen Formen, und die drei, den Coordinat-Ebenen des Axensystems entsprechenden Pinakoide. Die verticalen prismatischen Formen, für welche wir das Wort Prisma ausschliesslich gebrauchen, haben gleichwerthige Flächen und rhombische Querschnitte, sind also einfache Formen, und erscheinen immer vollständig mit allen vier Flächen, wie die gleichnamigen Formen des monoklinoëdrischen und rhombischen Systems. Diejenigen beiden Arten von prismatischen Formen aber, deren Flächen einer der Nebenaxen parallel laufen, haben ungleichwerthige Flächen und rhomboidische Querschnitte, sind also zusammengesetzte Formen, und zerfallen in zwei, von einander unabhängige Partialformen. Wir nennen diese geneigt-prismatischen Formen im Allgemeinen Domen, unterscheiden sie, wie im rhombischen Systeme, nach derjenigen Axe, welcher ihre Flächen parallel sind, als Makrodomen und Brachydomen, und ihre Partialformen als Hemidomen.

Dieselben Gründe, welche uns in §. 195 bestimmten, den Ableitungen im monoklinoëdrischen Systeme eine vollständig vorausgesetzte Pyramide zu Grunde zu legen, nöthigen uns, auch für die Ableitungen im diklinoëdrischen Systeme eine vollständige, mit allen vier, im Gleichgewichte ausgebildeten

Partialformen erscheinende Pyramide als Grundform anzunehmen. Diese Grundform wird bestimmt durch das Verhältniss der Grundparameter a : b : c, und durch die beiden Winkel B und C, aus welchen die Axenwinkel α, β und γ leicht zu berechnen sind. Die Bezeichnung der Grundform, die Ableitung selbst, und die Bezeichnung der abgeleiteten Formen stimmt so vollkommen mit den gleichnamigen Verhältnissen des triklinoëdrischen Systems überein, dass wir deshalb auf die in §. 220 folgenden Betrachtungen verweisen.

§. 216. Berechnung der Formen, Combinationen, Zonenlehre.

Bei der Berechnung der diklinoëdrischen Formen sind zunächst die einzelnen Viertelpyramiden zu berücksichtigen, deren jede mit den drei Hauptschnitten drei Kanten, in diesen Hauptschnitten aber sechs ebene Winkel bildet, welche neun Grössen als die wichtigsten Gegenstände der Berechnung zu betrachten sind. Da die beiden verticalen Hauptschnitte noch rechte Winkel bilden, da folglich jede Pyramidenfläche am Axensysteme ein rechtwinkeliges Triëder begränzt, so wird die Rechnung im Vergleich zu dem triklinoëdrischen Systeme bedeutend vereinfacht, obgleich sie wegen der beiden schiefen Neigungswinkel B und C der Basis, und wegen der drei schiefen Axenwinkel weit complicirter werden muss, als im monoklinoëdrischen Systeme. Es ist zweckmässig, die Signatur der verschiedenen Winkel ganz übereinstimmend mit jener des triklinoëdrischen Systems zu wählen; dann brauchen wir nur in denen, weiter unten für dieses System mitgetheilten Resultaten $A = 90^0$ zu setzen, um solche dem diklinoëdrischen Systeme anzupassen.

Die Combinationen stehen ihren Symmetrie-Verhältnissen nach mitten inne zwischen jenen des monoklinoëdrischen und des triklinoëdrischen Systems, indem alle diejenigen Formen, deren Flächen in die Hauptaxenzone fallen, eben so ausgebildet sind, wie im monoklinoëdrischen (oder auch im rhombischen) Systeme, während alle übrigen Formen derselben Ausbildungsweise unterliegen, wie im triklinoëdrischen Systeme. Wer sich also mit diesem letzteren Systeme bekannt gemacht hat, der wird auch keine Schwierigkeiten bei der Beurtheilung und Entwickelung der diklinoëdrischen Combinationen finden.

Die Zonenlehre fällt, soweit sie die Position der Flächen betrifft, fast ganz mit jener des triklinoëdrischen Systems zusammen, mit Ausnahme der Hauptaxenzone, deren Verhältnisse dieselben sind, wie im monoklinoëdrischen Systeme. Dagegen erhält die Tangente tautozonaler Kanten, vermöge der fünf schiefen Neigungswinkel des Axensystems, einen besonderen Werth, welcher sich aus dem, S. 56 stehenden Ausdrucke von tangIV bestimmt, wenn in selbigem $A = 90^0$ gesetzt wird; man erhält so für irgend zwei Flächen F und F', welche in eine Zone fallen, deren Zonenlinie durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\mu} - \frac{y}{\nu} = 0, \text{ und } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{\mu} = 0$$

gegeben ist: $\operatorname{tang} W$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma\sqrt{\mu^2+\nu^2+\varrho^2+2\mu\nu\cos\gamma+2\varrho\mu\cos\beta+2\nu\varrho\cos\alpha}}{aa'bb'\sin^2\gamma+cc'aa'\sin^2\beta+bb'cc'\sin^2\alpha-bb'(ca'+c'a)\cos B\sin\gamma\sin\alpha-cc'(ab'+a'b)\cos C\sin\alpha\sin\beta}$$

Werden nun die beiden Flächen F und F' als abgeleitete Flächen auf die Grundparameter a, b und c bezogen, so ist für sie

das Verhältniss $a : b : c$, mit ma : rb : sc,

das Verhältniss $a' : b' : c'$, mit m'a : r'b : s'c

zu vertauschen, und setzt man diese Werthe in den Ausdruck von $\operatorname{tang} W$ ein, so erkennt man leicht, dass die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse in diesem Krystallsysteme nur dann bestehen kann, wenn den beiden Producten

$$\text{ca}\cos B\sin\gamma\sin\alpha \text{ und ab}\cos C\sin\alpha\sin\beta$$

rationale Zahlenwerthe entsprechen.

Wir wollen diese Bedingungen für die Krystallreihe des unterschwefeligsauren Kalkes prüfen, von welcher uns *Mitscherlich* sehr genaue Messungen geliefert hat, aus denen sich folgende Elemente ergeben:

$$\text{a} : \text{b} : \text{c} = 1{,}533 : 1 : 0{,}7849$$

$$B = 98^0\,21', \quad C = 107^0\,2',$$

$$\alpha = 87^0\,25', \quad \beta = 98^0\,44', \quad \gamma = 107^0\,13';$$

aus diesen Elementen des Axensystems folgt aber:

$$\text{ca}\cos B\sin\gamma\sin\alpha = 0{,}1667 = \tfrac{1}{6},$$

$$\text{ab}\cos C\sin\alpha\sin\beta = 0{,}4434 = \tfrac{4}{9}.$$

Wir erhalten also wirklich ein paar sehr einfache rationale Zahlwerthe mit einer Genauigkeit, welche gar nichts zu wünschen übrig lässt, indem die gemessenen Winkel nur um 1 bis 2′ geändert zu werden brauchen, um jene Producte genau auf die Zahlen $\frac{1}{6}$ und $\frac{4}{9}$ zu bringen. Demnach sind wir wohl berechtigt, das von *Mitscherlich* für den unterschwefeligsauren Kalk eingeführte Axensystem, und somit sein siebentes Krystallsystem als hinreichend begründet anzusehen.

Anm. Es scheinen aber auch die Producte $\text{ca}\sin\gamma\sin\alpha$ und $\text{ab}\sin\alpha\sin\beta$ für sich rationalen Zahlen zu entsprechen; denn man findet:

$$\text{ca}\sin\gamma\sin\alpha = 1{,}148, \text{ oder sehr nahe } \tfrac{23}{20},$$

$$\text{ab}\sin\alpha\sin\beta = 1{,}514, \text{ oder sehr nahe } \tfrac{41}{27},$$

woraus denn weiter folgen würde, dass auch $\cos B$ und $\cos C$ rationale Werthe haben; denn

$$\text{wenn } \tfrac{23}{20}\cos B = \tfrac{1}{6}, \text{ so ist } \cos B = \tfrac{10}{69},$$

$$\text{und wenn } \tfrac{41}{27}\cos C = \tfrac{4}{9}, \text{ so ist } \cos C = \tfrac{12}{41};$$

hiernach findet man $B = 98^0\,20'$, und $C = 107^0\,1'$, was bis auf 1′ mit den von *Mitscherlich* gemessenen Winkeln übereinstimmt.

Noch genauer wird auch das Product $\text{bc}\sin\beta\sin\gamma$ durch eine rationale Zahl ausgedrückt; man findet nämlich

$$\text{bc}\sin\beta\sin\gamma = 0{,}7413, \text{ oder } = \tfrac{20}{27}.$$

Diess würde zur Berechnung der Grundparameter a, b und c gelangen lassen, indem man das Product aus $\text{ca}\sin\gamma\sin\alpha$ und $\text{ab}\sin\alpha\sin\beta$ durch $\text{bc}\sin\beta\sin\gamma$

dividirt, dabei deren Werthe $\frac{23}{20}$, $\frac{41}{27}$ und $\frac{39}{27}$ zu Grunde legt, und so zuvörderst die Grösse $a\sin\alpha$, dann aber, durch Division mit $a\sin\alpha$, die Grössen $b\sin\beta$ und $c\sin\gamma$ bestimmt, und endlich, durch Division dieser drei Grössen beziehendlich mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$, die Werthe von a, b und c findet. Führt man diese Rechnung aus, so erhält man

$$a : b : c = 1{,}5370 : 1{,}0006 : 0{,}7843,$$

was äusserst wenig von demjenigen Verhältnisse abweicht, welches aus den Messungen von *Mitscherlich* folgt.

Siebenter Abschnitt.

Triklinoëdrisches System.

Erstes Capitel.

Formen des triklinoëdrischen Systems.

§. 217. Axensystem und Elemente desselben.

Das triklinoëdrische System ist der Inbegriff aller derjenigen Krystallformen, deren geometrischer Grundcharakter durch drei, auf einander schiefwinkelige, und zwar ungleich schiefwinkelige Coordinat-Ebenen, sowie durch drei ungleiche, und daher ungleichwerthige Axen bestimmt wird. Demnach findet in diesem Systeme eine durchgängige Ungleichheit der Angular- und Linear-Dimensionen, und die grösste Abweichung von der Regelmässigkeit des Tesseralsystems Statt. Wie also für dieses letztere System in der Rechtwinkeligkeit seiner Coordinat-Ebenen und in der Gleichheit seiner Axen die Bedingungen für das Maximum der Symmetrie, so sind für das triklinoëdrische System in der Schiefwinkeligkeit seiner Coordinat-Ebenen und in der Ungleichheit seiner Axen die Bedingungen für das Maximum der Unsymmetrie gegeben, welches überhaupt in einem trimetrischen Axensysteme vorkommen kann.

Den drei schiefen Neigungswinkeln *A*, *B* und *C* der Coordinat-Ebenen entsprechen die drei Axenwinkel α, β und γ, welche in der Regel gleichfalls alle schief sind, obwohl auch in manchen Fällen einer derselben ein rechter sein kann; was jedoch keine Verschiedenheit des Krystallsystems bedingen würde.

Da für die aufrechte Stellung des Axensystems keine bestimmten Indicationen geboten sind, so haben wir willkürlich eine der Axen als Hauptaxe zu bestimmen, worauf die beiden anderen Axen, weil sie die Diagonalen

der schiefen rhomboidischen Basis bilden, wie im rhombischen Systeme, als **Makrodiagonale** und **Brachydiagonale** unterschieden werden können. Die drei Coordinat-Ebenen erhalten demgemäss wiederum die Namen des basischen, des makrodiagonalen und des brachydiagonalen Hauptschnitts. Gewöhnlich ist es zweckmässig, bei der wissenschaftlichen Betrachtung der Formen den brachydiagonalen Hauptschnitt auf uns zulaufend zu denken, wobei uns auch die Basis meistentheils entgegen fällt, weil in der Regel die Brachydiagonale einen kleineren Winkel mit der Hauptaxe bildet, als die Makrodiagonale.

Anm. Man könnte füglich die ganze Krystallographie auf die Betrachtung des triklinoëdrischen Systems gründen, und würde damit der Forderung vollkommen entsprechen, vom Allgemeinen auf das Besondere überzugehen; denn in der That brauchen wir nur angemessene Veränderungen in den Elementen des Axensystems eintreten zu lassen, um von dem triklinoëdrischen Systeme auf irgend eines der anderen Krystallsysteme zu gelangen. Indessen ist es aus manchen Gründen zweckmässiger, den entgegengesetzten Weg einzuschlagen, also mit dem tesseralen Systeme zu beginnen, und mit dem triklinoëdrischen Systeme zu schliessen.

§. 218. Triklinoëdrische Pyramiden.

Denken wir uns um ein triklinoëdrisches Axensystem, für irgend ein endliches Verhältniss der Parameter $a : b : c$, den vollständigen Inbegriff aller isoparametrischen Flächen ausgebildet, so erhalten wir eine von 8, viererlei ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, deren Mittelkanten in der Ebene der Basis liegen, oder eine vollständige triklinoëdrische Pyramide.

Von den Flächen dieser Pyramide sind aber immer nur zwei Gegenflächen einander gleich und ähnlich, weshalb es überhaupt viererlei verschiedene Flächen giebt, welche die Pyramide aus vier Partialformen zusammengesetzt erscheinen lassen, deren jede einzelne nur zwei parallele Flächen darstellt, und als eine Viertelpyramide oder Tetartopyramide bezeichnet werden kann. Die Kanten zerfallen in sechs, durch ihre Länge, wie durch ihr Winkelmaass verschiedene Kantenpaare, von denen immer ein längeres und ein kürzeres in je einem der drei Hauptschnitte enthalten ist. Die Ecke sind viererleikantig und dreierlei, nämlich zwei Polecke, zwei spitzere Mittelecke an den Endpuncten der längeren, und zwei stumpfere Mittelecke an den Endpuncten der kürzeren Nebenaxe. Die Hauptschnitte und alle ihnen parallele Schnitte sind **Rhomboide**.

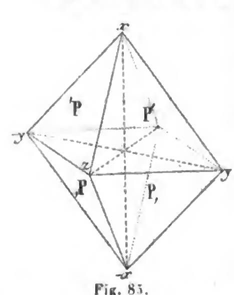


Fig. 85.

Die triklinoëdrischen Pyramiden erscheinen jedoch niemals so vollständig mit allen vier, im Gleichgewichte ausgebildeten Partialformen, wie diess die vorstehende Beschreibung und Figur voraussetzt; vielmehr sind diese Partialformen eben so unabhängig von einander, wie die Hemipyramiden des monoklinoëdrischen Systems, weshalb denn die Pyramiden im gegenwärtigen Systeme gewöhnlich nur mit einzelnen Viertelpyramiden ausgebildet sind, welche selbst in denjenigen Fällen, da ihrer zwei, drei, oder alle vier vorhanden sein sollten, eine sehr ungleichmässige Ausdehnung ihrer Flächen zu zeigen pflegen.

Bei dieser gegenseitigen Unabhängigkeit der correlaten Viertelpyramiden wird es nothwendig, eine jede derselben besonders in das Auge zu fassen, und sie auch in der Bezeichnung von einander zu unterscheiden. Haben wir uns einmal über die Stellung des Axensystems verständigt, so ist diese Unterscheidung am leichtesten und einfachsten in der Weise zu bewerkstelligen, dass wir dabei die verschiedene *Lage* der *vorderen*, uns zugewendeten Flächen jeder Pyramide nach *oben* und *unten*, nach *rechts* und *links* berücksichtigen, und daher dem Buchstaben P, als dem Grundelemente in dem Zeichen einer jeden Viertelpyramide, einen *Accent* an derjenigen Stelle beifügen, welche der Lage ihrer *vorderen* Fläche entspricht. Demgemäss würde also in dem Zeichen einer Viertelpyramide, deren vordere Fläche *oben rechts* oder *oben links* erscheint, P' oder 'P, in dem Zeichen einer Viertelpyramide aber, deren vordere Fläche *unten rechts* oder *unten links* erscheint, $P_{,}$ oder $_{,}P$ zu schreiben sein. Nur auf diese oder eine ähnliche Weise ist es möglich, ein Collectivzeichen für die vollständige Pyramide zu geben, weil sich jene vier Zeichen in das einzige Zeichen $'_{,}P'_{,}$ zusammenziehen lassen.

Da eine jede Viertelpyramide nur ein einziges Flächenpaar darstellt, so kann sie auch nicht für sich allein erscheinen; wollen wir sie uns aber in ihrer Isolirung vorstellen, so müssen wir ihren Flächen irgend eine bestimmte Begränzung anweisen, wozu sich am besten die drei Hauptschnitte des Axensystems eignen, welche ja schon in der vollständigen Pyramide die Gränzflächen ihrer einzelnen Partialformen abgeben. Die beiden Flächen jeder Viertelpyramide fallen in zwei Gegen-Octanten des Axensystems, und eine jede derselben bildet mit den Hauptschnitten oder Coordinat-Ebenen drei Intersectionen, welche wir nach ihrer Lage als die *brachydiagonale*, die *makrodiagonale* und die *basische Kante* unterscheiden, und welche weit wichtiger sind, als die Kanten der vollständigen triklinoëdrischen Pyramide.

§. 219. Prismatische Formen und Pinakoide.

Ausser den Pyramiden erscheinen noch dreierlei verschiedene *prismatische Formen*, nämlich *verticale* Prismen, für welche wir, wie in den vorhergehenden Systemen, das Wort *Prisma* ausschliesslich gebrauchen werden, und zwei Arten von *geneigten* Prismen, welche wir abermals *Domen* nennen, und als *Makrodomen* und *Brachydomen* unterscheiden

wollen, je nachdem ihre Flächen der Makrodiagonale oder der Brachydiagonale der Grundform parallel sind.

Alle diese prismatischen Formen des triklinoëdrischen Systems haben **rhomboidische** Querschnitte, bestehen daher aus zwei **ungleichwerthigen** Flächenpaaren, und zerfallen demgemäss in **zwei Partialformen**, deren eine jede für sich wiederum nur ein einziges Flächenpaar darstellt, während beide in der Erscheinung eben so unabhängig von einander sind, wie die vier Viertelpyramiden einer und derselben Pyramide. Wir unterscheiden sie daher als **Hemiprismen** und als **Hemidomen**.

Die drei **Pinakoide** endlich sind die drei, den Hauptschnitten des Axensystems parallelen Flächenpaare.

Da also die Pyramiden dieses Systems in vier, die prismatischen Formen desselben in zwei Partialformen zerfallen, und da jede dieser Partialformen, eben so wie jedes Pinakoid, nur aus zwei parallelen Flächen besteht, so haben wir es in jedem triklinoëdrischen Krystalle überhaupt nur mit lauter einzelnen, ungleichwerthigen Flächenpaaren zu thun, weil für jede Fläche einzig und allein in ihrer Gegenfläche eine gleichwerthige Fläche vorhanden ist*). Diese Vereinzelung aller Flächen hat für die Erscheinungsweise der triklinoëdrischen Combinationen in manchen Fällen einen solchen Mangel an Symmetrie zur Folge, dass sie sich sehr auffallend von den Combinationen aller bisher betrachteten Systeme unterscheiden, während sich dagegen in anderen Fällen durch simultane Ausbildung der correlaten Partialformen eine Annäherung an die Symmetrie des monoklinoëdrischen Systems zu erkennen giebt.**)

Jedenfalls aber werden wir sowohl bei gegenwärtiger allgemeiner Darstellung des Systems, als auch bei der besonderen Betrachtung einer jeden triklinoëdrischen Krystallreihe die, gewissermaassen nur in ihrer Zerstückelung erscheinenden Formen in unserer Vorstellung zu ergänzen haben, indem wir die einzelnen Partialformen, gleichsam die disjecta membra derselben, immer mit ihren correlaten Formen in Beziehung denken. Denn ohne dieses Hilfsmittel würde kaum eine klare Uebersicht in einem Systeme zu gewinnen sein, dessen Krystallformen nur Aggregate von einzelnen Flächenpaaren, und dessen Symmetrie-Verhältnisse oft so versteckt sind, dass man bisweilen an dem Vorhandensein derselben zweifelhaft werden möchte.

§. 220. Ableitung und Bezeichnung der Formen.

Bei der allgemeinen schematischen Ableitung der Formen gehen wir von irgend einer **vollständigen** triklinoëdrischen Pyramide als Grundform aus,

*) Mehr, als in jedem anderen, würde daher in **diesem** Krystallsysteme eine Bevorzugung der einzelnen Flächen vor den Formen, und eine solche Bezeichnung gerechtfertigt sein, welche zunächst nur die einzelnen Flächen erfasst.

**) Das Erstere ist z. B. der Fall mit dem Axinite und Kupfervitriol, das Letztere mit den verschiedenen triklinoëdrischen Feldspathen.

bezeichnen solche mit ${}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,}$ und bestimmen ihre aufrechte Stellung. Das, ihren Flächen zukommende Parameter-Verhältniss a : b : c, und die drei Neigungswinkel A, B und C der Coordinat-Ebenen oder Hauptschnitte liefern uns in jedem besonderen Falle die Elemente des Axensystems.

Aus dieser Grundform wird nun, wie im rhombischen Systeme, durch blose Veränderung des in der Hauptaxe liegenden Parameters a, zunächst die Grundreihe des Systems

$$0P \; \ldots\ldots \underset{m<1}{m{}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,}} \; \ldots\ldots {}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,} \; \ldots\ldots \underset{m>1}{m{}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,}} \; \ldots\ldots \infty{}^{\prime}P^{\prime}$$

abgeleitet, welche die sämmtlichen Protopyramiden das Protoprisma und das Basopinakoid begreift, und deren Glieder rechter Hand alle spitzer, linker Hand alle flacher sind, als ${}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,}$. Diese Reihe ist eigentlich eine vierfache Reihe, indem jedes ihrer Glieder, mit Ausnahme der beiden äussersten, in vier Viertelpyramiden $mP^{\prime}$, $m^{\prime}P$, $mP_{,}$ und $m_{,}P$ zerfällt, welche von einander gänzlich unabhängig sind. Das eine Gränzglied 0P ist, wie immer, das basische Flächenpaar oder das Basopinakoid, während das andere Gränzglied $\infty{}^{\prime}P^{\prime}$ ein verticales Prisma von rhomboidischem Querschnitte darstellt, welches also in die zwei Hemiprismen $\infty P^{\prime}$ und $\infty{}^{\prime}P$ zerfällt.

Aus jedem Gliede dieser Grundreihe lassen sich nun abermals zwei Reihen von Pyramiden ableiten, indem man einerseits den in der Makrodiagonale der Grundform gegebenen Parameter b, anderseits den in der Brachydiagonale gegebenen Parameter c mit irgend einer Zahl n multiplicirt, welche alle möglichen rationalen Werthe von 1 bis ∞ haben kann. Nennen wir diese Pyramiden wiederum, wie im rhombischen Systeme, Makropyramiden und Brachypyramiden, und benutzen wir, wie dort, zu ihrer Unterscheidung die prosodischen Zeichen der Länge und Kürze, so lässt sich der Inbegriff aller, aus irgend einem $m{}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,}$ durch Veränderung der Makrodiagonale abgeleiteten Formen in der Reihe

$$m{}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,} \; \ldots\ldots \; m{}^{\prime}_{,}\bar{P}^{\prime}_{,} \; \ldots\ldots \; m{}^{\prime}_{,}\bar{P}^{\prime}_{,}\infty$$

und der Inbegriff aller, durch Veränderung der Brachydiagonale abgeleiteten Formen in der Reihe

$$m{}^{\prime}_{,}P^{\prime}_{,} \; \ldots\ldots \; m{}^{\prime}_{,}\breve{P}^{\prime}_{,} \; \ldots\ldots \; m{}^{\prime}_{,}\breve{P}^{\prime}_{,}\infty$$

zusammenfassen. Die letzten Gränzglieder dieser Reihen sind geneigte Prismen oder Domen, und zwar einerseits ein Makrodoma, anderseits ein Brachydoma, von denen aber ein jedes in zwei von einander unabhängige Hemidomen zerfällt. Je nachdem nun, vermöge der einmal gewählten Stellung des Axensystems, die Brachydiagonale, oder die Makrodiagonale auf den Beobachter zuläuft, je nachdem wird man die brachydiagonalen Hemidomen mit den Zeichen $m^{\prime}\breve{P}_{,}\infty$ und $m_{,}\breve{P}^{\prime}\infty$, dagegen die makrodiagonalen Hemidomen mit den Zeichen $m^{\prime}\bar{P}^{\prime}\infty$ und $m_{,}\bar{P}_{,}\infty$ zu versehen haben, oder auch umgekehrt; weil die Stellung der Accente der Lage entsprechen muss, in welcher sich die vorderen Flächen dieser Hemidomen dem Beobachter präsentiren.

Wird dieselbe Ableitung auch für das Protoprisma $\infty{}^{\prime}P^{\prime}$ geltend gemacht, so gelangt man auf folgende zwei Reihen verticaler Prismen:

$$\infty'P' \; . \; . \; . \; . \; . \; \infty'\bar{P}'n \; . \; . \; . \; . \; . \; \infty\bar{P}\infty$$
$$\text{und } \infty'P' \; . \; . \; . \; . \; . \; \infty'\breve{P}'n \; . \; . \; . \; . \; . \; \infty\breve{P}\infty.$$

Wir nennen die erstere die Reihe der Makroprismen, die zweite die Reihe der Brachyprismen, und erkennen in ihren äussersten Gränzgliedern das Makropinakoid und das Brachypinakoid, während die übrigen Glieder Prismen von rhomboidischen Querschnitten sind, und folglich in zwei von einander unabhängige Hemiprismen zerfallen, welche als rechte und linke unterschieden werden, wozu in dem Zeichen ein einziger, rechts oder links angebrachter Accent ausreichend ist.

Anm. Hiermit ist denn die Ableitung sämmtlicher Formen und Partialformen vollständig erschöpft, und es bedarf nur noch der Bemerkung, dass sich auch in diesem Systeme die Resultate aller Ableitungen in einem einzigen Schema zusammenstellen lassen, welches eine vollständige und wohl geordnete Uebersicht des ganzen Krystallsystems gewährt.

§. 221. Berechnung der Formen; Pyramiden.

Bei der Berechnung der triklinoëdrischen Formen haben wir zunächst irgend eine Viertelpyramide von dem Parameter-Verhältnisse $a : b : c$ zu berücksichtigen, weil sich aus den für sie gefundenen Formeln sehr leicht diejenigen ableiten lassen, welche irgend einer anderen Form entsprechen. Die Signatur der Winkel wählen wir gerade so, wie im rhombischen Systeme; für irgend eine Viertelpyramide Fig. 86 bedeuten uns also:

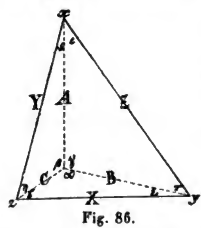


Fig. 86.

A, B und C die an den Axen der x, y und z anliegenden Neigungswinkel je zweier Coordinat-Ebenen oder Hauptschnitte,

α, β und γ die ihnen gegenüberliegenden Axenwinkel,

X, Y und Z die den Axen gegenüberliegenden Intersectionen, oder die drei Kanten der Viertelpyramide,

endlich δ und ε, ϑ und η, $\varkappa$ und ι die Hauptschnittwinkel des basischen, des brachydiagonalen und des makrodiagonalen Hauptschnitts.

Man könnte alle diese Winkel durch zweckmässig angebrachte Accente auf ähnliche Weise unterscheiden, wie diejenigen Viertelpyramiden, welchen sie angehören. Uebrigens darf man nicht vergessen, dass in allen folgenden Rechnungen die sechs Winkel A, B und C, α, β und γ als spitze Winkel vorausgesetzt sind, weshalb in jedem besonderen Falle genau darauf zu achten ist, ob einige, und welche von diesen Winkeln für die betreffende Viertelpyramide als stumpfe Winkel auftreten.

Indem wir die Grundwinkel A, B und C im Allgemeinen als bekannt voraussetzen, so bestimmen sich aus ihnen die Axenwinkel α, β und γ wie folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$
$$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}$$
$$\cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

Doch braucht man immer nur einen dieser Winkel unmittelbar zu berechnen, weil sich die beiden anderen aus dem einfachen Verhältnisse

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin A : \sin B : \sin C$$

ableiten lassen. In einer und derselben Krystallreihe sind diese sechs Winkel als constante Elemente gegeben, welche in allen Formen denselben Werth behaupten, und nur insofern eine Verschiedenheit zulassen, wiefern sie bald als spitze, bald als stumpfe Winkel auftreten.

Für eine jede Viertelpyramide sind nun die Hauptschnittwinkel, die Kantenwinkel und die Kantenlinien als die drei wichtigsten Gegenstände der Berechnung zu betrachten.

I. Hauptschnittwinkel einer Viertelpyramide.

Diese Winkel bestimmen sich als Functionen der Parameter durch folgende einfache Werthe ihrer Tangenten:

$$\tang\delta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}, \quad \tang\varepsilon = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha},$$
$$\tang\vartheta = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}, \quad \tang\eta = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta},$$
$$\tang\tau = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}, \quad \tang\iota = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}.$$

Bei dem Gebrauche dieser Formeln hat man sorgfältig darauf zu achten, welche von den Winkeln α, β und γ spitz oder stumpf sind, weil im letzteren Falle der betreffende Cosinus negativ zu nehmen ist.

Als Functionen der Kantenwinkel X, Y und Z werden die Hauptschnittwinkel durch folgende Formeln dargestellt:

$$\cos\delta = \frac{\cos Y + \cos X \cos C}{\sin X \sin C}, \quad \cos\varepsilon = \frac{\cos Z + \cos X \cos B}{\sin X \sin B},$$
$$\cos\vartheta = \frac{\cos Z + \cos Y \cos A}{\sin Y \sin A}, \quad \cos\eta = \frac{\cos X + \cos Y \cos C}{\sin Y \sin C},$$
$$\cos\tau = \frac{\cos X + \cos Z \cos B}{\sin Z \sin B}, \quad \cos\iota = \frac{\cos Y + \cos Z \cos A}{\sin Z \sin A},$$

wobei ebenfalls zu berücksichtigen ist, welche von den Winkeln A, B und C etwa stumpfe sind, weil dann die betreffenden Cosinus negativ einzuführen sind. Uebrigens bedarf man dieser Formeln nur zur Berechnung je eines Hauptschnittwinkels, weil zwischen diesen Winkeln und den Kantenwinkeln folgende allgemeine Relationen gelten:

$$\sin\delta : \sin\eta = \sin Y : \sin X$$
$$\sin\vartheta : \sin\iota = \sin Z : \sin Y$$
$$\sin\tau : \sin\varepsilon = \sin X : \sin Z$$

welche für je zwei, an **derselben Axe** anliegende Hauptschnittwinkel, so wie:

$$\sin\delta : \sin\varepsilon = \sin Y : \sin Z$$
$$\sin\vartheta : \sin\eta = \sin Z : \sin X$$
$$\sin\tau : \sin\iota = \sin X : \sin Y$$

welche für je zwei, in **demselben Hauptschnitte** liegende Hauptschnittwinkel ihre Anwendung finden.

Ausserdem sind noch je zwei, in **demselben Hauptschnitte** liegende Winkel durch die Gleichungen

$$\alpha + \delta + \varepsilon = 180^0$$
$$\beta + \vartheta + \eta = 180^0$$
$$\gamma + \tau + \iota = 180^0$$

mit einander und mit dem gleichliegenden Axenwinkel verbunden.

II. **Kantenwinkel** einer Viertelpyramide.

Die Kantenwinkel einer Viertelpyramide berechnen sich am leichtesten aus je zweien, an **derselben Axe** anliegenden Hauptschnittwinkeln und dem dazu gehörigen Grundwinkel des Axensystems mittels der Neperschen Analogieen, wie folgt:

1. X und Y, aus δ, η und C:

$$\tang\tfrac{1}{2}(X+Y) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\delta)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(X-Y) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\eta+\delta)}$$

2, Z und X, aus ε, τ und B:

$$\tang\tfrac{1}{2}(Z+X) = \cot\tfrac{1}{2}B\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\tau)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\tau)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(Z-X) = \cot\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\tau)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\tau)}$$

3. Y und Z, aus ι, ϑ und A:

$$\tang\tfrac{1}{2}(Y+Z) = \cot\tfrac{1}{2}A\frac{\cos\frac{1}{2}(\iota-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\iota+\vartheta)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(Y-Z) = \cot\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(\iota-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\iota+\vartheta)}$$

Will man also die drei Kantenwinkel einer Viertelpyramide berechnen, so sucht man zuvörderst aus den Parametern und den Axenwinkeln die Winkel **zweier Hauptschnitte**, und findet hierauf, nach einer der vorstehenden Analogieen, zunächst **zwei** Kantenwinkel; der **dritte** bestimmt sich durch das einfache Verhältniss, welches zwischen den Sinus je zweier Winkel desselben Hauptschnitts und den Sinus der ihnen gegenüberliegenden Kantenwinkel besteht.

Wenn auch nicht zur unmittelbaren Berechnung, so doch zur allgemeinen Beurtheilung ihrer Verhältnisse und zur Benutzung für anderweite Folgerungen ist es nützlich, die Kantenwinkel auch als Functionen der Grund-

Elemente des Axensystems zu kennen. Man geht dabei von dem S. 44 stehenden allgemeinen Ausdrucke für $\cos W$ aus, indem man in selbigem successiv a', b' und $c'=0$ setzt, und erhält so folgende Werthe:

$$\cos X = \frac{bc\sin\alpha - ab\cos B\sin\gamma - ca\cos C\sin\beta}{\sqrt{K}}$$

$$\cos Y = \frac{ca\sin\beta - bc\cos C\sin\alpha - ab\cos A\sin\gamma}{\sqrt{K}}$$

$$\cos Z = \frac{ab\sin\gamma - ca\cos A\sin\beta - bc\cos B\sin\alpha}{\sqrt{K}}$$

in welchen $K = b^2c^2\sin^2\alpha + c^2a^2\sin^2\beta + a^2b^2\sin^2\gamma - 2a^2bcA' - 2b^2caB' - 2c^2abC'$ ist, wobei

$$A' = \cos A\sin\beta\sin\gamma$$
$$B' = \cos B\sin\gamma\sin\alpha$$
$$C' = \cos C\sin\alpha\sin\beta.$$

III. Kantenlinien einer Viertelpyramide.

Die Kenntniss der Kantenlinien ist besonders wichtig für die, zur Entwerfung von Modellnetzen erforderliche Construction der einzelnen Flächen einer vollständigen triklinoëdrischen Pyramide. Da nun diese Kantenlinien diejenigen Linien sind, welche die Endpuncte je zweier Parameter mit einander verbinden, so folgt

$$X = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$
$$Y = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta}$$
$$Z = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

wobei für den Fall, dass einer der Winkel α, β und γ ein stumpfer ist, der betreffende Cosinus negativ genommen werden muss.

Man kann dieselben Linien auch nach folgenden Formeln berechnen:

$$X = \frac{b\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{c\sin\alpha}{\sin\varepsilon},$$

$$Y = \frac{c\sin\beta}{\sin\vartheta} = \frac{a\sin\beta}{\sin\eta},$$

$$Z = \frac{a\sin\gamma}{\sin\tau} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\iota}.$$

Anm. Alle diese Resultate gelten unmittelbar für die Grundform, wenn man für a, b und c die Werthe der Grundparameter einführt; setzt man dann ma statt a, so gelten sie für irgend eine Protopyramide, und setzt man noch nb statt b, oder nc statt c, so gelten sie für irgend eine Makropyramide oder eine Brachypyramide.

§. 222. Fortsetzung; prismatische Formen.

In den verschiedenen prismatischen Formen sind von Hauptschnittwinkeln nur noch diejenigen zu berechnen, welche dem gegen die prisma-

tische Axe geneigten Hauptschnitte angehören. Dagegen bilden alle drei Kantenwinkel, nämlich die beiden Längskanten, und die mit jenem Hauptschnitte hervorgebrachte Endkante, einen Gegenstand der Berechnung, welche jedoch dadurch vereinfacht wird, dass die beiden Längskanten einer jeden hemiprismatischen Form mit je einem der drei Grundwinkel A, B oder C 180^0 bilden, und dass die Endkanten je zweier correlater hemiprismatischer Formen gleichfalls supplementar sind.

1. Verticales Hemiprisma, von dem Verhältniss $\infty a : b : c$.

Der basische Hauptschnitt liefert die einfachste Endfläche der Form, weshalb nur noch die beiden Hauptschnittwinkel δ und ε zu berechnen sind; denn es ist $\tau = \gamma$, $\eta = \beta$, und $\vartheta = \iota = 0^0$. Wie in den Pyramiden bestimmt sich

$$\text{tang}\delta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha},\ \text{tang}\varepsilon = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha}.$$

Die Endkante X, und eine der beiden Längskanten Y oder Z finden sich mittels der Neperschen Analogieen aus δ, β und C, oder aus ε, γ und B; z. B. X und Y durch die beiden Formeln

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(X+Y) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\delta)}$$

$$\text{und } \text{tang}\tfrac{1}{2}(X-Y) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\delta)}$$

worauf die Längskante Z durch die einfache Gleichung $Z = 180^0 - A - Y$ gegeben ist.

Anm. Setzt man nb statt b, oder auch nc statt c, so gelten dieselben Rechnungen für irgend ein beliebiges makrodiagonales oder brachydiagonales Hemiprisma; nur ist immer darauf Rücksicht zu nehmen, ob die Winkel α, β und C spitz oder stumpf sind.

2. Makrodiagonales Hemidoma, von dem Verhältniss $a : \infty b : c$.

Der brachydiagonale Hauptschnitt bildet die einfachste Endfläche der Form, weshalb nur noch die beiden Hauptschnittwinkel ϑ und η zu berechnen sind; denn es ist $\delta = \alpha$, $\iota = \gamma$, und $\tau = \varepsilon = 0^0$. Wie in der Pyramide bestimmt sich

$$\text{tang}\vartheta = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta},\ \text{tang}\eta = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}.$$

Die Endkante Y, und eine der beiden Längskanten Z oder X finden sich mittels der Neperschen Analogieen aus ϑ, γ und A, oder aus η, α und C; z. B. Y und Z durch die beiden Formeln:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(Y+Z) = \cot\tfrac{1}{2}A\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}$$

$$\text{und } \text{tang}\tfrac{1}{2}(Y-Z) = \cot\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)}$$

worauf die Längskante X durch die einfache Gleichung $X = 180^0 - B - Z$ gegeben ist.

Anm. Setzt man ma statt a, so gelten dieselben Rechnungen für irgend ein beliebiges makrodiagonales Hemidoma; nur hat man in allen Fällen zu berücksichtigen, ob die Winkel β, γ und A spitz oder stumpf sind.

3. Brachydiagonales Hemidoma, von dem Verhältnisse $a{:}b{:}\infty c$.

Der makrodiagonale Hauptschnitt liefert die einfachste Endfläche dieser Form, weshalb nur noch die beiden Hauptschnittwinkel τ und ι zu berechnen sind; denn es ist $\vartheta = \beta$, $\varepsilon = \alpha$, und $\delta = \eta = 0^\circ$. Wie in der Pyramide bestimmt sich

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma},\ \operatorname{tang}\iota = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}.$$

Die Endkante Z, und eine der beiden Längskanten X und Y finden sich mittels der Neperschen Analogieen aus τ, α und B, oder aus ι, β und A; z. B. Z und X durch die beiden Formeln:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z+X) = \cot\tfrac{1}{2}B\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\tau)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\tau)}$$

$$\text{und } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z-X) = \cot\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\tau)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\tau)}$$

worauf die Längskante Y durch die Gleichung $Y = 180^\circ - C - X$ gegeben ist.

Anm. Setzt man ma statt a, so gelten dieselben Rechnungen für irgend ein beliebiges brachydiagonales Hemidoma; jedenfalls aber ist darauf zu achten, ob die Winkel γ, α und B spitz oder stumpf sind.

Zweites Capitel.

Combinationen und Zonenlehre.

§. 223. Wahl der Hauptschnitte und der Grundform.

Da eine jede Partialform, welchen Namen sie auch führen mag, nur ein Flächenpaar darstellt, so werden in jeder triklinoëdrischen Combination eben so viele Partialformen enthalten sein, als sie Flächenpaare enthält. Wiewohl daher die Combinationen dieses Systems nur solche Polyëder darstellen, welche von lauter ungleichwerthigen und oft ganz beziehungslos erscheinenden Flächenpaaren gebildet werden, und wiewohl sie bisweilen durch das isolirte Auftreten einzelner, oder durch die sehr ungleichmässige Ausdehnung correlater Partialformen einen solchen Schein von Unregelmässigkeit annehmen, dass man auf den ersten Anblick an der Auffindung irgend einer Gesetzmässigkeit verzweifeln möchte, so werden doch diese Schwierigkeiten grösstentheils gehoben, wenn man sich die Regeln der Ableitung, und die derselben zu Grunde liegende Vorstellung vergegenwärtigt, welcher zufolge alle correlate Partialformen in simultaner Existenz zu denken sind.

Die wichtigste Frage, welche man sich bei der Betrachtung einer jeden triklinoëdrischen Krystallreihe zu beantworten hat, ist unstreitig die, welche drei von den wirklich vorhandenen, oder doch angezeigten Flächenpaaren den drei Hauptschnitten entsprechen, und daher mit 0P, $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ bezeichnet werden sollen; denn von der mehr oder weniger glücklichen Wahl der Hauptschnitte hängt die mehr oder weniger leichte Uebersicht der Formen und Combinationen ab. Die Zonen müssen bei dieser Wahl vorzüglich zur Richtschnur dienen, indem man wo möglich diejenigen, entweder wirklich ausgebildeten, oder durch die Verhältnisse der übrigen Formen angedeuteten Flächen zu den Hauptschnitten wählt, denen die meisten Combinationskanten parallel laufen. Mit der Wahl der drei Hauptschnitte sind auch die drei Grundwinkel A, B und C, sowie die drei Axen ihrer Lage nach bestimmt, deren Neigungswinkel α, β und γ unmittelbar aus den Grundwinkeln berechnet werden können.

Die zweite wichtige Frage nach der Grundform ist zunächst nur für eine Viertelpyramide zu beantworten, und daher irgend eines der vorhandenen Flächenpaare, dessen Flächen keiner der Axen parallel sind, mit P', 'P, P, oder ,P zu bezeichnen. Man hat dabei wiederum auf die Zonen und auf die allgemeine Regel zu achten, dass sich diejenige Form vorzugsweise als Grundform empfiehlt, welche die leichteste Entwickelung der Combinationen und die einfachsten Zeichen für ihre Formen in Aussicht stellt. Hieraus ergiebt sich von selbst die besondere Regel, die Wahl der Grundform wo möglich so zu treffen, dass sich für eine ihrer Viertelpyramiden noch andere Flächenpaare als correlate Viertelpyramiden bestimmen. Durch die Wahl der Grundform wird auch das Verhältniss der Grundparameter a : b : c, oder der Grund-Dimensionen der Krystallreihe bestimmt, welches aus irgend zwei gemessenen Kanten einer der Viertelpyramiden der Grundform abgeleitet werden kann.

Anm. Die Grund-Elemente einer jeden triklinoëdrischen Krystallreihe, nämlich die Winkel A, B und C, und das Parameter-Verhältniss a : b : c erfordern also allemal fünf Winkel, überhaupt fünf von einander unabhängige Beobachtungs-Elemente zu ihrer Bestimmung. Im diklinoëdrischen Systeme werden nur vier, im monoklinoëdrischen Systeme nur drei, und im rhombischen Systeme nur noch zwei Winkel als Beobachtungs-Elemente erfordert.

§. 224. Allgemeine Regeln für die Entwickelung der Combinationen.

Nachdem die drei Hauptschnitte und die Grundform gewählt sind, so hat die allgemeine oder nomenclatorische Entwickelung der Combinationen keine besonderen Schwierigkeiten. Die prismatischen Formen geben sich im Allgemeinen dadurch zu erkennen, dass ihre Flächen in die Zonen der drei Axen fallen; zu den verticalen oder eigentlichen Prismen insbesondere gehören also alle verticalen Flächen, mit Ausnahme der beiden vertica-

len Pinakoide; zu den makrodiagonalen Hemidomen gehören alle Flächen, welche der Makrodiagonale, zu den brachydiagonalen Hemidomen alle Flächen, welche der Brachydiagonale parallel sind, wiederum mit Ausnahme des basischen und je eines der verticalen Pinakoide. Alle noch übrigen Flächen müssen dann nothwendig Pyramiden angehören, von denen es gewöhnlich durch eine aufmerksame Beachtung ihrer Lage leicht zu ermitteln ist, ob sie als Protopyramiden, Makropyramiden oder Brachypyramiden betrachtet werden müssen.

Für die besondere Entwickelung der triklinoëdrischen Combinationen gelten wesentlich dieselben Regeln, welche in §. 170 u. s. w. für die rhombischen Combinationen mitgetheilt worden sind; nur erleiden diese Regeln eine, durch das selbständige Auftreten der Partialformen gebotene Modification, welcher zufolge alle Zuschärfungen von Kanten, und alle Zuspitzungen von Ecken als blose Abstumpfungen dieser Begränzungs-Elemente darzustellen sind.

Die Theorie der binären Combinationen würde in diesem Systeme auf die Combination zweier verschiedener Viertelpyramiden zu gründen sein, wobei auf die verschiedene Lage ihrer Flächen entweder in demselben, oder in verschiedenen Raum-Octanten Rücksicht genommen werden müsste. Die Betrachtung der monoklinoëdrischen Combinationen, welche zwischen denen des rhombischen und des triklinoëdrischen Systems mitten inne stehen, bahnt uns den Weg zur Entwickelung dieser letzteren, welche keine besonderen Schwierigkeiten darbieten, sobald man sich einmal an die Dismembration der Formen, an das isolirte Auftreten der einzelnen Viertelpyramiden, Hemiprismen und Hemidomen gewöhnt hat. Eine ganz besondere Wichtigkeit erlangt die Lage der Combinationskanten, und die damit zusammenhängende Zonenlehre. Da uns nun diejenigen Combinationskanten, welche einem der drei Hauptschnitte parallel sind, sofort über das Verhältniss zweier Parameter der betreffenden Flächen belehren, und da dergleichen Kanten sehr häufig ausgebildet zu sein pflegen, so mag es genügen, die durch sie bestimmten Verhältnisse hervorzuheben.

Bezeichnen wir für irgend zwei Flächen F und F' ihre in der Hauptaxe, in der Makrodiagonale und Brachydiagonale gelegenen Parameter mit a, b, c, und mit a', b' und c', so gelten für diese Flächen, welche Lage sie auch haben mögen, folgende drei allgemeine Regeln:

1. ist ihre Combinationskante parallel dem basischen Hauptschnitte, so ist jedenfalls $b' : c' = b : c$;
2. ist ihre Combinationskante parallel dem makrodiagonalen Hauptschnitte, so ist jedenfalls $a' : b' = a : b$;
3. ist ihre Combinationskante parallel dem brachydiagonalen Hauptschnitte, so ist jedenfalls $a' : c' = a : c$.

Mittels dieser Regeln und mittels der Zonengleichung, welche uns in allen denjenigen Fällen, da die Combinationskante zweier bekannter Flächen durch eine dritte unbekannte Fläche abgestumpft wird, auf eine theilweise Bestimmung des Parameter-Verhältnisses dieser unbekannten Fläche gelangen

lässt, wird man sehr häufig zur Entwickelung der Combinationen gelangen, für welche noch ausserdem in diesem Systeme, mehr als in irgend einem der bisher betrachteten, die Aufsuchung und Benutzung der Zonen von der grössten Wichtigkeit ist.

§. 225. Zonen des triklinoëdrischen Systems.

Bei der Selbständigkeit aller einzelnen Flächenpaare lässt sich erwarten, dass in den Combinationen des triklinoëdrischen Systems nach mancherlei Richtungen sehr verschiedene Zonen zur Ausbildung kommen werden, und dass also die Zonenlehre eine gar häufige Anwendung finden wird. Es fällt aber diese Zonenlehre, soweit sie die Positions-Verhältnisse der Flächen betrifft, wesentlich mit jener des rhombischen Systems zusammen; selbst die Namen der Zonen sind fast dieselben, wie in diesem Systeme, nur mit dem Unterschiede, dass statt der Pyramiden zunächst immer nur Viertelpyramiden, und statt der Prismen und Domen zunächst immer nur Hemiprismen und Hemidomen zu denken, sowie dass die Mittelkanten der Pyramiden als basische Kanten, ihre beiderlei Polkanten aber als makrodiagonale und brachydiagonale Kanten einzuführen sind. Hieraus folgt denn auch, dass im triklinoëdrischen Systeme eine jede Zone einzig in ihrer Art ist, und dass es, wenn auch analoge, so doch keine eigentlich correlaten Zonen giebt.

Die Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Kanten bestimmt sich dagegen ganz anders, und erhält in gegenwärtigem Systeme einen Werth, welcher für diesen Theil der Zonenlehre einen sehr wesentlichen Unterschied zwischen ihm und dem rhombischen Systeme begründet.

Die gewöhnlichsten Zonen sind, gerade wie im rhombischen Systeme, die folgenden.

1. Die Zone der Hauptaxe; sie begreift alle verticalen Flächen des Systems, also die sämmtlichen Hemiprismen und die beiden verticalen Pinakoide.
2. Die Zone der Makrodiagonale; sie begreift alle, der Makrodiagonale der Grundform parallele Flächen, also die sämmtlichen makrodiagonalen Hemidomen, das Makropinakoid und die Basis.
3. Die Zone der Brachydiagonale; sie begreift alle Flächen, welche der Brachydiagonale der Grundform parallel sind, also die sämmtlichen brachydiagonalen Hemidomen, das Brachypinakoid und die Basis.
4. Die basische Kantenzone einer Viertelpyramide begreift alle diejenigen Flächen, welche ihrer basischen Kante parallel sind, für welche also $b' : c' = b : c$ ist. Die Entwickelung dieser Zone ist wesentlich dieselbe, wie die S. 288 gegebene Entwickelung der Mittelkantenzonen der rhombischen Pyramiden, doch hat man dabei zunächst immer nur auf die einzelnen Viertelpyramiden und Hemiprismen Rücksicht zu nehmen. — Von den vier Partialformen einer jeden Pyramide liefern

einerseits die beiden rechten, und anderseits die beiden linken Viertelpyramiden eine und dieselbe basische Kantenzone.

5. Die makrodiagonale Kantenzone einer Viertelpyramide begreift alle diejenigen Flächen, welche ihrer makrodiagonalen Kante parallel sind, für welche also $a' : b' = a : b$ ist. Die Entwickelung derselben ist wesentlich dieselbe, wie die S. 290 mitgetheilte Entwickelung der makrodiagonalen Polkantenzonen der rhombischen Pyramiden; nur hat man dabei wiederum die Zerfällung sämmtlicher Formen in ihre Partialformen zu berücksichtigen, und demgemäss die dort stehenden Regeln in ihrem Ausdrucke zu modificiren. — Von den vier Partialformen einer jeden Pyramide liefern einerseits die obere rechte und untere linke, anderseits die untere rechte und obere linke Viertelpyramide eine und dieselbe makrodiagonale Kantenzone.

6. Die brachydiagonale Kantenzone einer Viertelpyramide begreift alle diejenigen Flächen, welche ihrer brachydiagonalen Kante parallel sind, für welche also $a' : c' = a : c$ ist. Die Entwickelung derselben ist wesentlich dieselbe, wie die S. 292 gegebene Entwickelung der brachydiagonalen Polkantenzonen der rhombischen Pyramiden, deren Resultate jedoch abermals zunächst nur auf die einzelnen Viertelpyramiden und Hemidomen zu beziehen sind. — Von den vier Partialformen einer jeden Pyramide liefern einerseits die beiden oberen, und anderseits die beiden untern Viertelpyramiden eine und dieselbe brachydiagonale Kantenzone.

Anm. Will man die letzten drei Zonen als Endkantenzonen prismatischer Formen bezeichnen, so wird natürlich jedes verticale Prisma zwei verschiedene basische, jedes Makrodoma zwei verschiedene brachydiagonale, und jedes Brachydoma zwei verschiedene makrodiagonale Endkantenzonen liefern.

Ausser diesen sechs Zonen wird man in den meisten Combinationen noch viele andere Zonen entdecken, welche durch die mancherlei Durchschnitte ungleichnamiger Flächen hervorgebracht werden; weshalb sich denn sehr oft Gelegenheit darbieten wird, die unbekannten Flächen nach Anleitung von §. 37 aus irgend zwei bekannten Zonen zu bestimmen.

§. 226. Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Flächen.

Für die Tangente des Neigungswinkels tautozonaler Flächen gelten unmittelbar und ganz allgemein die Betrachtungen des §. 42. Für irgend zwei Flächen F und F', von den Parameter-Verhältnissen $a : b : c$ und $a' : b' : c'$, welche in eine Zone fallen, deren Zonenlinie durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\mu} - \frac{y}{\nu} = 0, \text{ und } \frac{z}{\varrho} - \frac{x}{\mu} = 0$$

gegeben ist, wird daher

$$\tang W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma k \sqrt{P}}{Q}$$

und für irgend zwei andere Flächen F_1 und F_1' derselben Zone, von den Parameter-Verhältnissen $a_1 : b_1 : c_1$ und $a_1' : b_1' : c_1'$, wird eben so

$$\mathrm{tang} W' = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma k_1 \sqrt{P}}{Q_1},$$

in welchen Ausdrücken

$$P = \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 + 2\mu\nu\cos\gamma + 2\varrho\mu\cos\beta + 2\nu\varrho\cos\alpha,$$

$$Q = aa'bb'\sin^2\gamma + cc'aa'\sin^2\beta + bb'cc'\sin^2\alpha - aa'(bc'+b'c)A' - bb'(ca'+c'a)B' - cc'(ab'+a'b)C'$$

ist, und Q_1 einen ganz ähnlichen Werth wie Q hat, welchen man erhält, wenn man in diesem letztern a_1, b_1 und c_1 statt a, b und c, sowie a_1', b_1' und c_1' statt a', b' und c' schreibt. Die Grössen A', B' und C' aber haben in beiden Ausdrücken die Werthe:

$$A' = \cos A \sin\beta \sin\gamma,$$
$$B' = \cos B \sin\gamma \sin\alpha,$$
$$C' = \cos C \sin\alpha \sin\beta,$$

Das Verhältniss der Tangenten beider tautozonaler Kanten ist daher:

$$\mathrm{tang} W : \mathrm{tang} W' = \frac{k}{Q} : \frac{k_1}{Q_1}$$

und es wird selbiges ein rationales Verhältniss sein, wenn die beiden Grössen $\frac{k}{Q}$ und $\frac{k_1}{Q_1}$ rationale Werthe haben.

Da nun aber die Flächen F und F', eben sowohl wie die Flächen F_1 und F_1', als abgeleitete Flächen, auf die Grundparameter a, b und c zu beziehen, da folglich ihre Parameter-Verhältnisse

$$a : b : c, \quad \text{mit } m\mathrm{a} : r\mathrm{b} : s\mathrm{c},$$
$$a' : b' : c', \quad \text{mit } m'\mathrm{a} : r'\mathrm{b} : s'\mathrm{c},$$
$$a_1 : b_1 : c_1, \quad \text{mit } m_1\mathrm{a} : r_1\mathrm{b} : s_1\mathrm{c},$$
$$\text{und } a_1' : b_1' : c_1', \quad \text{mit } m_1'\mathrm{a} : r_1'\mathrm{b} : s_1'\mathrm{c}$$

zu vertauschen sind, so ergiebt sich, nach Einführung dieser Werthe von a, b, c, a' u. s. w., in jene von Q und Q_1, von k und k_1, dass in einer und derselben triklinoëdrischen Krystallreihe von den Grundwinkeln A, B und C, den Axenwinkeln α, β und γ, und den Grundparametern a, b und c die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse für alle Fälle nur dann bestehen kann, wenn jedes der drei Producte

$$\mathrm{bc} \cos A \sin\beta \sin\gamma$$
$$\mathrm{ca} \cos B \sin\gamma \sin\alpha$$
$$\mathrm{ab} \cos C \sin\alpha \sin\beta$$

für sich einen rationalen Zahlwerth hat. Wir gelangen also in diesem Krystallsysteme auf drei Bedingungen von derselben Art, wie deren im diklinoëdrischen Systeme nur zwei erfüllt zu sein brauchen, und es handelt sich blos noch darum, ein paar der bekannten triklinoëdrischen Krystallreihen darauf zu prüfen, ob und wie weit diese Bedingungen für sie wirklich in Erfüllung gebracht sind. Wir wählen dazu die Krystallreihen des Albites und Anorthites.

1. Prüfung der Krystallreihe des Albites.

Aus den von *G. Rose* mitgetheilten Messungen ergeben sich für den Albit folgende Elemente:

$$a : b : c = 0{,}887 : 1{,}627 : 1$$

$$A = 88^0\,39' \qquad \alpha = 86^0\,45'$$
$$B = 63\;\;34 \qquad \beta = 63\;\;25$$
$$C = 86\;\;24 \qquad \gamma = 85\;\;20$$

Aus diesen Elementen folgt:

$$bc\cos A\sin\beta\sin\gamma = 0{,}03417 = \tfrac{1}{29},$$
$$ca\cos B\sin\gamma\sin\alpha = 0{,}3929 = \tfrac{13}{33},$$
$$ab\cos C\sin\alpha\sin\beta = 0{,}0809 = \tfrac{3}{37},$$

welche rationale Werthe den wirklich gefundenen Werthen so nahe stehen, dass sie wohl als die wahren zu betrachten sein dürften.

Anm. Es ist merkwürdig, dass auch hier wiederum die Producte $bc\sin\beta\sin\gamma$, $ca\sin\gamma\sin\alpha$ und $ab\sin\alpha\sin\beta$ sehr nahe durch rationale Zahlen dargestellt werden; man findet nämlich:

$$bc\sin\beta\sin\gamma = 1{,}452 = \tfrac{42}{29},$$
$$ca\sin\gamma\sin\alpha = 0{,}883 = \tfrac{39}{44},$$
$$ab\sin\alpha\sin\beta = 1{,}288 = \tfrac{48}{37},$$

woraus denn weiter folgen würde, dass auch $\cos A$, $\cos B$ und $\cos C$ für sich rationale Werthe haben; in der That wird

$$\cos A = \tfrac{1}{42}, \quad \cos B = \tfrac{4}{9}, \quad \cos C = \tfrac{1}{16}.$$

Berechnet man nach diesen Werthen die Winkel, so ergiebt sich

$$A = 88^0\,38', \quad B = 63^0\,37', \quad C = 86^0\,25',$$

welche nur um 1 bis 3′ von denen durch die Beobachtung gegebenen Winkeln abweichen.

Die Grundparameter bestimmen sich, auf ähnliche Weise wie im diklinoëdrischen Systeme:

$$a : b : c = 0{,}8917 : 1{,}629 : 1$$

was ebenfalls den Beobachtungen sehr nahe entspricht.

2. Prüfung der Krystallreihe des Anorthites.

Aus den von *G. Rose* angestellten Messungen bestimmen sich als Elemente dieser Krystallreihe:

$$a : b : c = 0{,}866 : 1{,}570 : 1$$

$$A = 87^0\,0' \qquad \alpha = 88^0\,42'$$
$$B = 63\;\;37 \qquad \beta = 63\;\;25$$
$$C = 85\;\;48 \qquad \gamma = 86\;\;48$$

Aus diesen Elementen folgt:

$$bc\cos A\sin\beta\sin\gamma = 0{,}07358 = \tfrac{7}{95},$$
$$ca\cos B\sin\gamma\sin\alpha = 0{,}3841 = \tfrac{5}{13},$$
$$ab\cos C\sin\alpha\sin\beta = 0{,}08928 = \tfrac{1}{11\frac{1}{5}},$$

welche rationale Werthe gleichfalls den wirklich gefundenen Werthen sehr nahe stehen.

Anm. Auch die Producte $bc\sin\beta\sin\gamma$ u. s. w. lassen sich recht genau durch rationale Zahlen darstellen; es wird nämlich:

$$bc \sin\beta \sin\gamma = 1{,}406 = \tfrac{7}{5},$$
$$ca \sin\gamma \sin\alpha = 0{,}8644 = \tfrac{13}{15},$$
$$ab \sin\alpha \sin\beta = 1{,}219 = \tfrac{11}{9}.$$

Daraus ergiebt sich denn

$$\cos A = \tfrac{1}{19}, \quad \cos B = \tfrac{4}{9}, \quad \cos C = \tfrac{3}{41},$$

welchen die Winkelwerthe

$$A = 86^0\,59', \quad B = 63^0\,37', \quad C = 85^0\,48'$$

entsprechen, die mit den beobachteten Winkeln vollkommen übereinstimmen.

Die Verhältnisse dieser beiden Krystallreihen beweisen daher jedenfalls so viel, dass das allgemeine Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Kanten auch in ihnen erhalten bleibt, wenn sie auf schiefwinkelige Axensysteme bezogen, d. h. als triklinoëdrische Krystallreihen betrachtet werden.

Drittes Capitel.

Transformation der Axen, und Zwillingskrystalle des triklinoëdrischen Systems.

§. 227. Reduction auf ein orthoëdrisches Axensystem.

Die Zurückführung einer triklinoëdrischen Krystallreihe auf ein orthoëdrisches Axensystem würde krystallonomisch nur dann gerechtfertigt sein, wenn sich in ihr wirklich drei auf einander rechtwinkelige Zonen nachweisen liessen. Die entsprechenden Zonenlinien würden dann die drei Axen desjenigen neuen Axensystems liefern, auf welches sämmtliche Flächen zu transponiren wären, um deren neue Zeichen bestimmen zu können. Die Krystallreihe selbst aber würde gewissermaassen als eine tetartoëdrisch ausgebildete Krystallreihe des rhombischen Systems darzustellen sein.*)

Man kann aber auch zu einer ähnlichen Darstellung gelangen, indem man irgend ein willkürliches rechtwinkeliges Axensystem einführt, und auf selbiges die Flächen der gegebenen Krystallreihe bezieht; ein Verfahren, welches geometrisch immer ausführbar ist, ohne doch in allen Fällen auf krystallonomische Berechtigung Anspruch machen zu können. Dasselbe gewährt uns nur versuchsweise die Lösung der Aufgabe, eine gegebene triklinoëdrische Krystallreihe auf ein orthoëdrisches Axensystem zurückzuführen, und es wird auf den jedesmaligen Erfolg ankommen, in wie weit man an dem Resultate des Experimentes seine Befriedigung finden kann, oder nicht.

Wir wollen also das Problem beispielsweise in der Art lösen, dass die Hauptaxe und der brachydiagonale Hauptschnitt der triklinoëdrischen Krystallreihe beibehalten werden sollen. Dann haben wir zunächst, statt der gegebenen Makrodiagonale, als erste neue Nebenaxe die Centro-

*) Bekanntlich ist diess die Ansicht derjenigen Mineralogen und Krystallographen, welche die Existenz schiefwinkeliger Axensysteme läugnen.

normale des brachydiagonalen Hauptschnitts, und hierauf, statt der gegebenen Brachydiagonale, als zweite neue Nebenaxe die in der Ebene desselben Hauptschnitts liegende Normale der Hauptaxe einzuführen. Bezeichnen wir also die neuen Axen als Axe der x', der y' und der z', so wird die Axe der x' identisch mit der Axe der x, die Axe der y' dagegen die Centronormale der Coordinat-Ebene (xz), und die Axe der z' die in derselben Ebene liegende Normale der Axe der x.

Nun ist $y=0$ die Gleichung der Coordinat-Ebene (xz); wenn also die Gleichungen der Centronormale dieser Ebene

$$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0, \text{ und } \frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0$$

sind, so haben wir in den S. 40 stehenden allgemeinen Werthen von p, q und s den Parameter $b=0$ zu setzen; dadurch wird

$$p=-ca(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)=-ca\cos C\sin\alpha\sin\beta,$$
$$q=ca\sin^2\beta,$$
$$s=-ca(\cos a-\cos\beta\cos\gamma)=-ca\cos A\sin\beta\sin\gamma.$$

Folglich werden die Gleichungen für die Axe der y':

$$\frac{x}{\cos C\sin\alpha}+\frac{y}{\sin\beta}=0, \text{ und } \frac{z}{\cos A\sin\gamma}-\frac{x}{\cos C\sin\alpha}=0.$$

Für die Axe der z' aber bestimmen sich die Gleichungen:

$$y=0, \text{ und } \frac{x}{\cos\beta}+z=0.$$

Ist uns nun in dem triklinoëdrischen Axensysteme irgend eine Fläche F durch ihre Parameter a, b und c, oder durch ihre Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben, so handelt es sich nur noch darum, diejenigen Längen der Axen der y' und z' zu finden, welche von dieser Fläche abgeschnitten werden. Wir erhalten solche, indem wir durch Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen der Axen der y' und z' die Coordinaten der betreffenden Durchschnittspuncte Y' und Z' aufsuchen, und hierauf die Centrodistanzen dieser beiden Puncte bestimmen; auf diese Weise finden sich zuvörderst die Coordinaten für den Punct Y':

$$x=\frac{abc\cos C\sin\alpha}{G},\ y=-\frac{abc\sin\beta}{G},\ z=\frac{abc\cos A\sin\gamma}{G},$$

in welchen Werthen $G=bc\cos C\sin\alpha-ca\sin\beta+ab\cos A\sin\gamma$ ist; und die Coordinaten für den Punct Z':

$$x=-\frac{ca\cos\beta}{a-c\cos\beta},\ y=0,\ z=\frac{ca}{a-c\cos\beta}.$$

Aus den Coordinaten für Y' folgt nach S. 35 die Centrodistanz dieses Punctes, oder der Parameter in der Axe der y':

$$b_1=\frac{abc\sin A\sin\beta\sin\gamma}{G}$$

und aus den Coordinaten für Z' bestimmt sich die Centrodistanz dieses Punctes, oder der Parameter in der Axe der Z':

$$c_1 = \frac{ca\sin\beta}{a - c\cos\beta}$$

Folglich werden überhaupt für die Fläche F die drei neuen, in dem rechtwinkeligen Axensysteme der x', y' und z' ihr zukommenden Parameter:

$$a_1 = a,$$
$$b_1 = \frac{abc\sin A\sin\beta\sin\gamma}{bc\cos C\sin\alpha - ca\sin\beta + ab\cos A\sin\gamma},$$
$$c_1 = \frac{ca\sin\beta}{a - c\cos\beta}.$$

Für die Fläche F, als irgend eine abgeleitete Fläche, ist aber allgemein statt $a : b : c$ das Verhältniss $m\mathrm{a} : r\mathrm{b} : s\mathrm{c}$ einzuführen; daher werden endlich die Werthe der rechtwinkeligen Parameter:

$$a_1 = m\mathrm{a}$$
$$b_1 = \frac{mrs\mathrm{abc}\sin A\sin\beta\sin\gamma}{rs\mathrm{bc}\cos C\sin\alpha - sm\mathrm{ca}\sin\beta + mr\mathrm{ab}\cos A\sin\gamma}$$
$$c_1 = \frac{ms\mathrm{ca}\sin\beta}{m\mathrm{a} - s\mathrm{c}\cos\beta}.$$

Wird nun z. B. die Fläche F als eine Viertelpyramide der neuen Grundform eingeführt, so würden die Werthe der rechtwinkeligen Parameter a'_1, b'_1 und c'_1 irgend einer anderen Fläche F' mit den schiefwinkeligen Parametern $m'\mathrm{a} : r'\mathrm{b} : s'\mathrm{c}$, genau eben so, jedoch mit accentuirten Buchstaben m, r und s zu schreiben sein, und so würden diese Werthe rationale Multipla von a_1, b_1 und c_1 sein müssen, dafern die ganze Transformation des Axensystems eine krystallonomische Bedeutung haben sollte. Man sieht, wie selten diese Bedingung erfüllt sein wird, weil solche ganz besondere Werthe der Grund-Elemente des gegebenen triklinoëdrischen Axensystems voraussetzt.

§. 228. Zwillingskrystalle des triklinoëdrischen Systems; allgemeine Betrachtung derselben.

Die allgemeine Theorie der Zwillingskrystalle des triklinoëdrischen Systems würde zu sehr weitläufigen Rechnungen führen, weil sie von der Voraussetzung ausgehen müsste, dass die Fläche irgend einer Pyramide die Zwillingsfläche sei. Da jedoch in der Natur bisher weder pyramidale noch prismatische Flächen als Zwillingsflächen beobachtet worden sind, da vielmehr allen bis jetzt bekannt gewordenen Zwillingskrystallen sehr einfache Gesetze zu Grunde liegen, so dürfte es auch hinreichen, die Theorie derselben nur für einige der wirklich nachgewiesenen Gesetze zu entwickeln.

Die Zwillingsbildung ist übrigens in manchen triklinoëdrischen Krystallreihen eine sehr gewöhnlich vorkommende Erscheinung; sie findet in der Regel mit Juxtaposition der Individuen und in vielfacher Wiederholung Statt,

wobei die Individuen gar häufig einer so ausserordentlichen Verkürzung in der Richtung der Zwillingsaxe unterliegen, dass sie als mehr oder weniger dünne, ja als mikroskopisch feine Lamellen erscheinen, und dass eigenthümliche polysynthetische Krystalle zum Vorschein kommen, welche aus zahlreichen lamellaren Individuen bestehen, obgleich sie in ihrer Totalform das Ansehen eines einzigen Krystalls haben. Wenn dann in einer die Lamellen durchschneidenden Richtung eine ausgezeichnete Spaltbarkeit vorhanden ist, so zeigen die Spaltungsflächen jene eigenthümliche Zwillingsstreifung, welche als eines der wichtigsten Unterscheidungsmerkmale der triklinoëdrischen Feldspathe von den monoklinoëdrischen Feldspathen bekannt ist.

Als Grundlage der Theorie der Zwillingskrystalle ist auch in diesem Systeme die in §. 50 behandelte Transposition der Axen des Individuums II auf das Axensystem des Individuums I zu betrachten. Wenn nämlich die Zwillingsfläche durch die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

gegeben ist, so erhalten wir für die Axen des Individuums II folgende Gleichungen:

für die Axe der x': $\frac{x}{\mu}-\frac{y}{q}=0$, und $\frac{y}{q}-\frac{z}{s}=0$;

für die Axe der y': $\frac{x}{p}-\frac{y}{\nu}=0$, und $\frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0$;

für die Axe der z': $\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0$, und $\frac{z}{\varrho}-\frac{x}{p}=0$;

in welchen Gleichungen die Parameter p, q, s, μ, ν und ϱ die nachstehenden Werthe haben:

$$p = bc\sin^2\alpha - ab\cos B\sin\gamma\sin\alpha - ca\cos C\sin\alpha\sin\beta,$$
$$q = ca\sin^2\beta - bc\cos C\sin\alpha\sin\beta - ab\cos A\sin\beta\sin\gamma,$$
$$s = ab\sin^2\gamma - ca\cos A\sin\beta\sin\gamma - bc\cos B\sin\gamma\sin\alpha,$$
$$\mu = \frac{p^2-q^2-s^2-2qs\cos\alpha}{2bcE},$$
$$\nu = \frac{q^2-s^2-p^2-2sp\cos\beta}{2caE},$$
$$\varrho = \frac{s^2-p^2-q^2-2pq\cos\gamma}{2abE},$$

wobei $E = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ist. *)

Man ersieht schon aus diesen Werthen, in welche weitläufige Rechnungen uns eine allgemeinere Verfolgung des Problems nach Anleitung von §. 49 verwickeln würde. Allein die Natur selbst überhebt uns dieser Mühe, weil

*) Man braucht nur in den Nennern der drei S. 72 stehenden Ausdrücke von μ, ν und ϱ die vorstehenden Werthe von p, q und s einzuführen, um auf die hier benutzte Darstellung derselben zu gelangen.

sie immer nur sehr einfache Gesetze zur Verwirklichung gebracht hat, von denen wir ein paar der gewöhnlichsten in den folgenden Paragraphen betrachten wollen.

§. 229. Fortsetzung; Zwillingsfläche das Brachypinakoid.

Bei weitem das häufigste unter den bis jetzt nachgewiesenen Gesetzen der Zwillingsbildung ist dasjenige, da der brachydiagonale Hauptschnitt die Zwillingsfläche liefert. Da nun die Gleichung dieses Hauptschnitts $y=0$ ist, so haben wir zuvörderst in den zu Ende von §. 228 stehenden Werthen der Parameter p, q, s, μ, ν und ϱ die Grösse $b=0$ zu setzen; dadurch erhalten wir

$$p = -ca\cos C\sin\alpha\sin\beta,$$
$$q = ca\sin^2\beta,$$
$$s = -ca\cos A\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\mu = \infty,$$
$$\nu = \frac{q^2-s^2-p^2-2sp\cos\beta}{caE} = \tfrac{1}{2}ca\sin^2\beta,$$
$$\varrho = \infty.$$

Folglich werden im vorliegenden Falle die Gleichungen der drei Axen des Individuums II,

für die Axe der x': $\quad y=0$, und $z=0$,

für die Axe der y': $\quad \frac{x}{2\cos C\sin\alpha}+\frac{y}{\sin\beta}=0$, und $\frac{z}{\cos A\sin\gamma}-\frac{x}{\cos C\sin\alpha}=0$

für die Axe der z': $\quad x=0$, und $y=0$.

Hieraus folgt denn, was auch von selbst einleuchtet, dass die Axen der x' und z' mit den gleichnamigen Axen des Individuums I zusammenfallen, während die Axe der y' in ihrer Lage von der Axe der y abweicht.

Anm. Im diklinoëdrischen Systeme ist $A=90^0$, also $\cos A=0$; folglich verschwindet in der zweiten Gleichung der Axe der y' das mit x behaftete Glied, und es wird $z=0$, während die erste Gleichung unverändert bleibt. In diesem Krystallsysteme fällt also die Axe der y' in die Coordinat-Ebene (xy), während ihre besondere Lage in solcher durch die Gleichung

$$\frac{x}{2\cos C\sin\alpha}+\frac{y}{\sin\beta}=0$$

bestimmt wird. — Wenn wir im monoklinoëdrischen Systeme die Orthodiagonale einstweilen als die Axe der y bezeichnen, so wird in ihm auch $C=90^0$, und B den schiefen Neigungswinkel vorstellen; dann verschwindet auch in vorstehender Gleichung das mit y behaftete Glied, und es bleibt $x=0$: folglich fallen in diesem Systeme, wenn der klinodiagonale Hauptschnitt als Zwillingsfläche gedacht wird, alle drei Axen des einen Individuums mit denen des andern zusammen, weshalb denn dieses Gesetz gar keine Zwillingskrystalle liefert, wie bekannt ist.

Aus den aufgefundenen Gleichungen der drei Axen ergiebt sich, was auch der Augenschein lehrt, dass eine jede Fläche F des Individuums II, deren Parameter a, b und c sind, ihre Parameter a und c auch in den Axen

der x und z behalten muss, und es handelt sich also eigentlich nur noch darum, ihren neuen, in die Axe der y fallenden Parameter b_1 zu bestimmen, was durch eine ganz ähnliche Schlussfolge erlangt wird, wie in §. 49.

Ein jeder Punct der Axe der y' steht nämlich unter den Gesetzen der beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{2\cos C\sin\alpha}+\frac{y}{\sin\beta}=0,\ \text{und}\ \frac{y}{\sin\beta}+\frac{z}{2\cos A\sin\gamma},$$

aus welchen sich für irgend einen gegebenen Werth von y die Werthe von x und z bestimmen wie folgt:

$$x=-\frac{2\cos C\sin\alpha}{\sin\beta}y=-\frac{2\text{C}}{\sin\beta}y,$$

$$z=-\frac{2\cos A\sin\gamma}{\sin\beta}y=-\frac{2\text{A}}{\sin\beta}y.$$

Der allgemeine Ausdruck für die Centrodistanz D irgend eines, durch seine Coordinaten x, y und z bestimmten Punctes ist aber (nach §. 28, II)

$$D=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma}$$

Setzen wir in diesen Ausdruck die vorstehenden Werthe von x und z, so gilt er für die Centrodistanz irgend eines Punctes der Axe der y', und erhält zunächst folgende Gestalt:

$$D=\frac{y}{\sin\beta}\sqrt{\sin^2\beta+4\text{C}^2+4\text{A}^2+8\text{CA}\cos\beta-4(\text{C}\cos\gamma+\text{A}\cos\alpha)\sin\beta}$$

werden hierin für A und C ihre Werthe

$$\text{A}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}$$

$$\text{und C}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta}$$

substituirt, so erkennt man, dass sich die ganze Wurzelgrösse auf $\sin\beta$ reducirt, woraus denn folgt, dass $D=y$ ist, welcher Werth uns lehrt, dass die Makrodiagonalen beider Individuen gegen die Zwillingsfläche eine symmetrische Lage haben.

Nun ist aber für denjenigen Punct P', in welchem die Axe der y' von der Fläche F geschnitten wird, $D=b$, also wird für d i e s e n Punct $y=b$, und überhaupt

$$x=p'=-\frac{2b\cos C\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$y=q'=b,$$

$$z=s'=-\frac{2b\cos A\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Es hat aber derjenige Punct P, in welchem von derselben Fläche F die Axe der x' geschnitten wird, die Coordinaten

$$p=-a,\ q=0,\ s=0,$$

und derjenige Punct P'', in welchem die Axe der z' geschnitten wird, die Coordinaten $\quad p''=0,\quad q''=0,\quad s''=-c.$

Diese Coordinaten der die Fläche F bestimmenden drei Puncte P, P' und P'' beziehen sich auf das Axensystem des Individuums I; wir brauchen

sie also nur nach den S. 23 stehenden Formeln zu combiniren, um endlich die der Fläche F im Axensysteme I zukommenden Parameter zu erhalten, und finden so

$$a_1 = -a,$$
$$b_1 = \frac{abc\sin\beta}{ca\sin\beta - 2bc\cos C\sin\alpha - 2ab\cos A\sin\gamma},$$
$$c_1 = -c;$$

multipliciren wir den Werth von b_1 im Zähler und Nenner mit $ca\sin\beta$, so wird

$$b_1 = \frac{c^2a^2\sin^2\beta \times b}{c^2a^2\sin^2\beta - 2c^2ab\cos C\sin\alpha\sin\beta - 2a^2bc\cos A\sin\beta\sin\gamma}.$$

Da nun aber die transponirte Fläche F als eine abgeleitete Fläche auf die Grundparameter a, b und c zu beziehen ist, so haben wir das Verhältniss $a : b : c$ mit $ma : rb : sc$ zu vertauschen, wodurch denn der Werth von b_1 folgende Gestalt erhält:

$$b_1 = \frac{m^2s^2rc^2a^2\sin^2\beta \times b}{m^2s^2c^2a^2\sin^2\beta - 2mrs^2c^2ab\cos C\sin\alpha\sin\beta - 2m^2rsa^2bc\cos A\sin\beta\sin\gamma}$$

Soll nun die transponirte Fläche einer möglichen Fläche des Individuums I entsprechen, so muss b_1 ein rationales Multiplum von b sein, welche Forderung nur dann erfüllt sein wird, wenn die beiden Producte $ab\cos C \sin\alpha\sin\beta$ und $bc\cos A\sin\beta\sin\gamma$ durch rationale Zahlen gegeben sind.

Hieraus folgt denn, dass sich bei diesem so gewöhnlichen Zwillingsgesetze des triklinoëdrischen Systems die sämmtlichen Flächen des einen Individuums nur dann als krystallonomisch-mögliche Flächen des anderen Individuums erweisen werden, wenn für die Grund-Elemente der betreffenden Krystallreihe dieselben Bedingungen in Erfüllung gebracht sind, welche nach §. 226 die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten ermöglichen.

§. 230. Fortsetzung; Zwillingsfläche die Basis.

Das Gesetz, dass die Basis als Zwillingsfläche auftritt, ist zwar weit seltener verwirklicht, als das vorher betrachtete, kommt aber doch zuweilen vor, weshalb wir es noch in Betrachtung ziehen wollen. Da die Gleichung der Zwillingsfläche in diesem Falle $x = 0$ ist, so haben wir in den allgemeinen Werthen der Parameter p, q, s, μ, ν und ϱ des §. 228 zunächst $a = 0$ zu setzen, und erhalten dadurch

$$p = bc\sin^2\alpha,$$
$$q = -bc\cos C\sin\alpha\sin\beta,$$
$$s = -bc\cos B\sin\gamma\sin\alpha,$$
$$\mu = \frac{p^2 - q^2 - s^2 - 2qs\cos\alpha}{bcE} = \tfrac{1}{2}bc\sin^2\alpha,$$
$$\nu = \varrho = \infty.$$

Demnach werden die Gleichungen der drei Axen des Individuums II

für die Axe der x': $\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{y}{2\cos C\sin\beta} = 0$, und $\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{z}{2\cos B\sin\gamma} = 0$,

für die Axe der y': $x=0$, und $z=0$,
für die Axe der z': $x=0$, und $y=0$,
aus welchen folgt, dass die beiden Nebenaxen des Individuums II mit denen des Individuums I zusammenfallen, während die Hauptaxen beider Individuen eine verschiedene Lage haben.

Anm. Im diklinoëdrischen Systeme gelten diese Gleichungen unverändert, weil sowohl B als C schiefe Winkel sind. Für das monoklinoëdrische System wird $B=\alpha=\beta=90^0$; folglich erhalten die Axen dieselben Gleichungen wie in §. 212.

Die für die Axen gefundenen Gleichungen lehren uns, dass eine jede Fläche des Individuums II, von dem Parameter-Verhältnisse $a:b:c$, ihre Parameter b und c unverändert in die Axen der y und z übertragen wird, weshalb wir nur noch ihren in die Axe der x fallenden Parameter a_1 nach Anleitung von §. 49 zu bestimmen haben. Aus den Gleichungen der Axe der x' bestimmen sich für jeden ihrer Puncte, bei einem gegebenen Werthe von x, die Werthe der Coordinaten y und z, wie folgt:

$$y=-\frac{2\cos C\sin\beta}{\sin\alpha}x=-\frac{2\mathrm{C}}{\sin\alpha}x,$$

$$z=-\frac{2\cos B\sin\gamma}{\sin\alpha}x=-\frac{2\mathrm{B}}{\sin\alpha}x.$$

Setzen wir diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck für die Centrodistanz D eines Punctes, so wird

$$D=\frac{x}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha+4\mathrm{C}^2+4\mathrm{B}^2+8\mathrm{BC}\cos\alpha-4(\mathrm{B}\cos\beta+\mathrm{C}\cos\gamma)\sin\alpha}$$

welcher Ausdruck sich, nach Substitution der Werthe von

$$\mathrm{B}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{und } \mathrm{C}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}$$

auf $D=x$ reducirt. Es hat aber für denjenigen Punct P, in welchem die Axe der x' von der Fläche F geschnitten wird, diese Centrodistanz den Werth a; also gelten für diesen Punct die Coordinaten:

$$x=p=\quad a,$$

$$y=q=-\frac{2a\cos C\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$z=s=-\frac{2a\cos B\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Dagegen hat der Durchschnittspunct P' derselben Fläche mit der Axe der y' die Coordinaten:

$$p'=0,\quad q'=-b,\quad s'=0;$$

und ihr Durchschnittspunct P'' mit der Axe der z' die Coordinaten:

$$p''=0,\quad q''=0,\quad s''=-c.$$

Da sich nun alle diese Coordinaten auf das Axensystem des Individuums I beziehen, und da die zu transponirende Fläche F durch die drei Puncte P, P'

und P'' geht, so bestimmen sich, nach den S. 23 stehenden Formeln, ihre Parameter in dem Axensysteme I wie folgt:

$$a_1 = \frac{abc\sin\alpha}{bc\sin\alpha - 2ab\cos B\sin\gamma - 2ca\cos C\sin\beta}$$

oder, wenn wir den Zähler und Nenner mit $bc\sin\alpha$ multipliciren,

$$a_1 = \frac{b^2c^2\sin^2\alpha \times a}{b^2c^2\sin^2\alpha - 2b^2ca\cos B\sin\gamma\sin\alpha - 2c^2ab\cos C\sin\alpha\sin\beta},$$

$$b_1 = -b,$$

$$c_1 = -c.$$

Setzen wir endlich für die Fläche F statt $a : b : c$ das Parameter-Verhältniss $ma : rb : sc$, so wird

$$a_1 = \frac{mr^2s^2b^2c^2\sin^2\alpha \times a}{r^2s^2b^2c^2\sin^2\alpha - 2msr^2b^2ca\cos B\sin\gamma\sin\alpha - 2mrs^2c^2ab\cos C\sin\alpha\sin\beta}$$

$$b_1 = -rb,$$

$$c_1 = -sc,$$

woraus sich denn für die krystallonomische Möglichkeit der Fläche F am Individuum I die Bedingungen ergeben, dass die beiden Producte $ca\cos B \sin\gamma\sin\alpha$ und $ab\cos C\sin\alpha\sin\beta$ rationale Zahlwerthe haben müssen; Bedingungen, welche abermals dieselben sind, durch welche die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten bestimmt wird.

Anm. Man sieht, dass sich im monoklinoëdrischen Systeme, in welchem $\cos B = 0$, und $\sin\alpha = \sin\beta = 1$ ist, der Werth von a_1 auf denjenigen reducirt, welcher in §. 212 gefunden worden ist. Will man übrigens in irgend einem besondern Falle von vorstehendem Werthe von a_1, oder von dem in §. 229 gefundenen Werthe von b_1 Gebrauch machen, um die Flächen des einen Individuums als Flächen des anderen zu bestimmen, so hat man bei jeder Fläche, nach Maassgabe ihrer Lage, sorgfältig darauf zu achten, welche von den Winkeln B, C, α, β und γ für sie als spitze, oder als stumpfe Winkel gegeben sind, weil sich danach die Vorzeichen der Glieder des Nenners in den Ausdrücken von a_1 und b_1 modificiren. Denn so, wie die Formeln hier stehen, setzen sie voraus, dass alle diese Winkel spitze sind.

Corrigenda.

S. 23, Z. 5 v. u., lies zweier statt zwei.
- 28, - 10 v. u., lies Gleichungen statt Gleichung.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.





